

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

František Kuřina

Začarovaný kruh školské geometrie

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 32 (1987), No. 5, 290--295

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/139831>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1987

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

pojmu a operací matematické analýzy, jako jsou derivace, primitivní funkce, Riemannův integrál atd. Pro výklad fyziky, pro popis a studium fyzikálních dějů v základním kursu je to mnohem důležitější než např. znalost algoritmů a pravidel pro výpočet derivací, integrálů atd.

Dosáhnout toho, aby studenti získali poznatky na předpokládané vysokoškolské úrovni, vyžaduje čas, který závisí na mnoha faktorech a který lze při vhodném řízení výuky i studia s užitím moderních pedagogických metod zkrátit. Průkopnickou práci v oblasti vědeckého řízení výuky vykonal u nás Výzkumný ústav inženýrského studia při ČVUT v Praze. Domnívám se, že výsledky výzkumů v této oblasti by zasluhovaly větší pozornost, než se jim dostává dosud. Například důkladný rozbor činnosti studentů nutné k dosažení stanovených studijních cílů vede většinou ke zjištění, že obtíže, které mají studenti s fyzikou, pramení jednak z toho, že studium fyziky na ně klade velké, často nepřiměřené psychické a časové nároky, jednak z toho, že zvládnutí fyziky na požadované úrovni vyžaduje soustavné studijní úsilí během celého semestru. To je však činnost, kterou dnes většina studentů VŠTZ není ochotna fyzice věnovat, pokud nejsou v práci soustavně kontrolováni.

Řízení výuky a studia vedoucí ke zvýšení efektivity práce i ke zvýšení kvality získávaných poznatků vyžaduje vhodnou formu výuky. Při dosavadním tradičním dělení výuky na přednášky a cvičení jsou touto formou především cvičení, neboť kromě jiného umožňují řídit i usměrňovat studijní činnost posluchačů a současně ji i soustavně kontrolovat. Domnívám se, že v současné situaci by fyzikálnímu vzdělávání budoucích inženýrů kromě redukce osnov velmi prospělo podstatné rozšíření času věnovaného teoretickému i laboratornímu

cvičení na úkor času věnovaného přednáškám.

Závěrem poznamenejme, že problémy fyzikálního vzdělávání u nás a v zahraničí se příliš neliší. K jejich řešení by prospěla živější konfrontace celkové koncepce fyzikálního vzdělávání i pedagogických metod užívaných v praxi.

ZAČAROVANÝ KRUH ŠKOLSKÉ GEOMETRIE

František Kuřina, Hradec Králové

Tento příspěvek vznikl z podnětu dvou článků s geometrickou tematikou publikovaných ve 2. čísle tohoto ročníku *Pokroky**).

Ačkoliv otázka vrácení geometrie do škol není u nás aktuální, neboť v našich školách geometrie měla v minulosti a má i v současnosti své místo, je Kapadiův článek poučný, protože znovu připomíná některé zásadní otázky vyučování geometrii, které se dosud v praxi vyučování matematice u nás neuskutečňují. Medkův článek nadhazuje řadu konkrétních problémů vyučování geometrii, jejichž řešení by bezesporu přispělo k zlepšení práce naší školy. Pokusme se shrnout problematiku a k některým otázkám zaujmout stanovisko. Nebudeme se zabývat otázkami geometrického vzdělávání techniků a jen okrajově se zmíníme o problematice učitelského vzdělání. Tyto tematické okruhy jsou velmi důležité a zasloužily by si podrobný rozbor. Budeme se zabývat

*) R. KAPADIA: *Vratte geometrii do škol.*

V. MEDEK: *Vyjadrenie k vyučovaniu geometrie na našich školách.*

hlavně otázkami vyučování geometrii na základní škole.

Různé pohledy na geometrii

Geometrii v užším smyslu můžeme chápat jako určitou *matematickou strukturu*. V Hilbertově pojetí to patrně bude struktura

$$(B, P, i, m, s_1, s_2),$$

kde B je množina objektů zvaných body, P je množina objektů zvaných přímky, i je binární relace incidence, m je ternární relace mezi, s_1 je binární relace shodnost úseček a s_2 je relace shodnost úhlů; ve Weylově pojetí jde o strukturu

$$(B, V, s, n_1, n_2, v),$$

kde B je množina bodů, V je množina vektorů, s je binární operace sčítání vektorů, n_1 je binární operace násobení vektoru číslem, n_2 je skalární násobení vektorů a v je zobrazení, které každým dvěma bodům přiřazuje vektor. Přitom samozřejmě v obou případech je explicitně určen systém vlastností, které charakterizují příslušné relace a definují tak axiomaticky strukturu.

Takovýto pohled na geometrii je dobře znám z literatury. Zdá se, že mnozí autoři školních učebnic pokládají za základní cíl vyučování podat věku žáků přiměřený popis geometrické struktury. Jedinou metodou jejího studia by ovšem měla být metoda deduktivní, pomocí níž na základě přijatých axiomů odvozujeme další vlastnosti geometrických objektů. Vzhledem k tomu, že na škole axiomaticky postupovat není možné, vezme se obvykle z konstrukce struktury aspoň posloupnost pojmů. Tomuto přístupu se velmi blíží např. pojetí geometrie na prvním stupni naší

základní školy. Žáci se seznamují s prostorem jako s množinou bodů a příslušnými relacemi incidence, mezi, shodnosti atd. Důsledkem toho jsou verbální a do značné míry formální geometrické znalosti žáků. Považují tento ahistorický přístup ke geometrii za nevhodný jak pro žáky základní a střední školy, tak i pro vzdělání učitelů. Je nevhodný již proto, že popisuje hotový výsledek deduktivní konstrukce geometrie a nepřihlíží k faktickému vzniku této disciplíny. Přiblížit žákům proces a metody poznávání je patrně důležitější než jejich seznámení s popisem jakési abstraktní struktury.

Tím se dostáváme k dalšímu pohledu na geometrii. Školskou geometrii můžeme chápat jako *popis fyzikálního prostoru*, v němž žák žije. Geometrické pojmy mají v žakově okolí modely, s geometrickými poznatky se můžeme setkávat při pozorování a experimentování v objektivní realitě. Součástí geometrického vzdělávání je tedy i dovednost pozorovat, představovat si, modelovat, rýsovat. V takto pojaté geometrii mají své místo intuice a indukce, dedukce je až druhotná.

Kapadia i Medek zdůrazňují význam grafického způsobu předávání informací. Tato stránka geometrie je v naší škole silně potlačena. Snaha po preciznosti a jednoznačnosti vyjadřování zastírá důležitý pohled na geometrii jako na *jazyk matematiky a techniky*. Pomocí obrázků kreslených dohodnutým způsobem můžeme např. metodami deskriptivní geometrie sdělovat velmi ekonomicky, přehledně a srozumitelně poznatky o vlastnostech geometrických útvarů. Popisy provozu metra, zapojení elektrického zařízení nebo spojnice dvou bodů na povrchu tělesa by byly bez obrázků velmi těžkopádné a prakticky nesrozumitelné. V geometrii ovšem můžeme pomocí obrázků, tedy rýsováním,

získávat i odpovědi na položené otázky. Typické to je pro deskriptivní geometrii (Jsou dané přímky mimoběžné?), mnohé úlohy řešila rýsováním i tradiční škola (Který čtverec má stejný obsah jako daný obdélník?). Považuji proto za důležité připomenout Vopěnkovu charakteristiku geometrie jako *metody řešení úloh rýsováním*. V našich současných učebnicích pro základní školu je úloh na rýsování velmi málo a mají spíše teoretický než praktický charakter. Autoři učebnic považují zřejmě za sdělnější než obrázek množinově logický jazyk matematiky. I když mají zápisy konstrukcí svůj význam, jsou na naší základní škole přebujelé, ubírají čas i místo vlastním konstrukcím a nepřispívají k rozvíjení geometrické představivosti žáků.

Kapadiův článek znovu oživil otázku významu geometrie jako zásobárny vhodných *úloh*. Jsem přesvědčen, že paleta problémů, které školská geometrie může poskytnout (od jednoduchých úloh až k vědeckým problémům srozumitelným žákům), není ničím nahraditelná. Většina geometrických úloh totiž spojuje intuitivní nazírání se zárodky abstraktního myšlení, a může tak přispívat k nejdůležitějšímu formativnímu cíli vyučování matematice: k rozvíjení myšlení.

Geometrii tedy můžeme posuzovat minimálně z těchto hledisek: z hlediska její struktury jako teoretické disciplíny, z hlediska popisu fyzikálního prostoru, z hlediska jazyka i metody a konečně z hlediska souboru úloh, které poskytuje žákům.

Různé přístupy ke geometrii

Jak jsme se již zmínili, je jednou z metod studia geometrie metoda *deduktivní*. Ačko-

liv nebezpečí přecenění tohoto přístupu u nás asi nehrozí, je tato otázka stále živá. Např. nová sovětská učebnice geometrie od Pogorelova, o níž se zmiňuje V. Medek a o níž přinesla informaci Matematika a fyzika ve škole*), je v podstatě budována deduktivně. Přitom je to učebnice pro žáky 6.–10. ročníku střední školy. Podle G. Polyi vede právě přílišné zdůrazňování axiomatických aspektů geometrie (především dokazování intuitivně zřejmého) k tomu, že se od geometrie odvrací budoucí vědci, inženýři, umělci a filozofové. Ty lze pro tuto disciplínu získat spíše zajímavými geometrickými útvary, indukivními objevy nebo ilustracemi, schémata a grafy, které podněcují k úvahám. I. M. Jaglom uvádí, že existují sice již na základní škole žáci, kteří pocítují potřebu dokazovat i věci z názoru zřejmé, ale tito žáci jsou řídkou výjimkou, s níž není nutno počítat při koncipování výuky. Podle mého názoru je pro každou vážnou práci základní otázka smyslu. Teprve když dokážeme navodit ve škole atmosféru pochybností o tvrzení nebo potřebu vyjasnění souvislostí, můžeme s úspěchem zařadit deduktivní úvahy.

Metodologickým protikladem deduktivní metody, jejímž základem je axiomatická konstrukce geometrie, je *problémový přístup k vyučování*. Jeho zdrojem mohou být zajímavé problémy matematické na různé úrovni abstraktnosti nebo nematematické podněty např. aplikačního typu. Problémová metoda může přispívat k rozvíjení zájmu o geometrii u některých žáků, nelze však zastírat, že její uplatnění přináší i vážné potíže. Jednou z nich je poměrně značná časová náročnost problé-

*) J. MÜLLEROVÁ: *Nová učebnice geometrie v SSSR, Matematika a fyzika ve škole*, č. 9, roč. 15, 1985.

mového přístupu k učivu, druhou je skutečnost, že poznatky takto získané nebudou patrně tvořit ucelený systém. Přesto jsem přesvědčen, že prvky problémového přístupu bychom měli v praxi vyučování matematice na všech úrovních uplatňovat.

Nejvýznamnější nedostatky ve vyučování geometrii

V souladu s Medkovým článkem považuji za nejvýznamnější nedostatky ve vyučování geometrii

- a) nízkou úroveň geometrické představitivosti,
- b) malý rozsah a nízkou úroveň aplikovatelných geometrických dovedností žáků.

Podle mého názoru jsou tyto nedostatky nejvýznamnější na úrovni základní školy, neboť negativně působí na technickou přípravu žáků pro povolání. Prostorová představitivost podmiňuje do značné míry technickou tvořivost, nedostatky ve vyučování geometrii mohou negativně ovlivňovat i rozvíjení technických dovedností. Protože rozvíjení geometrické představitivosti souvisí s rozvojem poznávacích schopností žáků, je účelné věnovat této problematice náležitou pozornost od samého začátku školní docházky.

Geometrie na prvním stupni naší základní školy není bohužel ani z tohoto hlediska koncipována šťastně. Množinové definice pojmů (trojúhelník ABC jako množina všech bodů X všech úseček AY , kde Y je libovolný bod strany BC , ...) a studium jedno- a dvojdimenzionálních útvarů a nikoli těles v prostoru nemohou geometrickou představitivost žáků náležitě rozvíjet. Domnívám se, že je třeba ke geometrickým

pojům přistupovat na základě zkušeností, které mají žáci s jejich modely v prostoru, který je obklopuje, a nikoli na základě abstraktních množinových konstrukcí. Na druhém stupni základní školy není prostorová představitivost rozvíjena náležitě, neboť se málo pracuje s tělesy a s jejich průměty, na střední škole chybí zařazení deskriptivní geometrie.

Užití vzorců pro výpočet obsahů geometrických útvarů a povrchů a objemů těles by opět mělo být více vázáno na stereometrické úvahy spojené s rozvíjením geometrické představitivosti. Tato technicky důležitá část školské geometrie je významná i z hlediska matematického, neboť poskytuje žákům netriviální příklady kvadratických a kubických závislostí a příklady funkcí dvou a více proměnných. Část absolventů střední školy vykazuje skutečně velmi malou úroveň geometrické představitivosti a technických znalostí geometrického charakteru. Dokazuje to např. existence studentů učitelství prvního stupně, kteří očekávají, že zdvojnásobením hrany krychle se zdvojnásobí i její objem. Rozbor příčin tohoto stavu by ovšem vyžadoval podrobné studium nejen učebnic, ale celého vyučovacího procesu. Jedním z negativních faktů, který je patrný na první pohled, je málo propracovaný systém vhodných úloh. Jako doklad tohoto tvrzení může sloužit např. téma o objemu koule probírané v 7. ročníku ZŠ. Nedostatkem je ovšem i to, že v 8. ročníku je stereometrie prakticky pěstována jen v hodinách věnovaných rýsování. V nových učebnicích matematiky pro gymnázia je stereometrii věnováno dosti prostoru. Při dobré přípravě žáků a poctivém probírání této tematiky by se měla úroveň geometrických znalostí maturantů zlepšit.

Možná východiska

V roce 1955 formuloval na pražském didaktickém semináři akademik E. Čech své názory na vyučování geometrii v 6. ročníku ZŠ takto:

1. Učivo i jeho zpracování má vzbuzovat co největší zájem. Nejde ani tak o to něco naučit, ale docílit toho, aby se děti na vyučování těšily. Je třeba, aby se děti naučily milovat geometrii.

2. Vyučování je nutné vést tak, aby co nejvíce dávalo příležitost k aktivní činnosti žáků. Žáci v tomto věku nedozrálí ještě k tomu, aby poslouchali přednášku. Touha po aktivní činnosti u žáků je něco nezadržitelného a v 6. postupném ročníku není tato touha ještě ztracena.

3. Nelze tomuto učení nedat konkrétní náplň. Ty věcné poznatky je nutno uspořádat tak, aby se při pozdějším vyučování znovu a znovu vyskytovaly.

4. Je nutné, aby se žáci ve formě ukázek seznámili s něčím, v čem ještě není systém, ale co poskytuje obrázek o tom, jak to bude vypadat později.

Myslím, že pojetí naší geometrie, především na prvním stupni základní školy, je s těmito myšlenkami v příkrém rozporu. Kdyby se podařilo uskutečnit citované Čechovy zásady o vyučování geometrii v praxi, zlepšila by se podstatně úroveň vyučování.

V roce 1981 publikovalo několik významných českých matematiků na půdě Jednoty čs. matematiků a fyziků kritické stanovisko k vyučování matematice u nás. V tomto materiálu se mimo jiné uvádí:

Matematické pojmy a jejich definice nepadají z nebe, vytvářejí je lidé na základě motivací, které vznikají z konkrétních situací a úloh. Abstraktní formy těchto pojmů a definic se objevují až v pozdějších stadiích. Chceme-li dobře porozumět ně-

kterému úseku matematiky, musíme především dobře porozumět motivacím a teprve potom se objeví pravý smysl abstrakcí... Bylo by užitečné podat jednoduché a přesvědčivé příklady o uplatnění geometrických pojmů ve světě kolem nás.

Podle mého názoru tvoří základní rámec naší koncepce vyučování matematice určitá část matematiky, kterou mají žáci zvládnout. Realizovat v praxi myšlenku, aby školní matematika vycházela z motivací a směřovala k aplikacím, je patrně jednou z podmínek, které mohou vést k zlepšení výsledků vyučování.

Otázkami zlepšení vyučování matematice se u nás zabývá, jak známo, i Kabinet pro didaktiku matematiky Matematického ústavu ČSAV v Praze. Po roce 1981 vznikla právě z podnětu JČSMF užší spolupráce řešitelů státního plánu základního výzkumu sdružených v Kabinetu s pracovníky resortního úkolu organizovanými ve Výzkumném ústavu pedagogickém v Praze. Výsledkem této spolupráce bylo vypracování nové koncepce vyučování geometrii na základní škole. Po čtyřech letech experimentálního ověřování, vypracování pracovních listů pro žáky a metodických pokynů pro učitele, byla v roce 1986 uzavřena etapa týkající se prvního stupně základní školy. Výsledky této práce jsou k dispozici školské správě. Od příštího školního roku pokračuje experimentální ověřování nové koncepce vyučování geometrii na druhém stupni.

Pojednejme nyní stručně o tomto experimentu.

Vyučování geometrii se opírá o tyto základní přístupy ke geometrickým poznatkům:

1. Dělení prostoru. Jde o jednotný, názorný a dobře didakticky zpracovatelný princip, pomocí něhož lze zavádět řadu důležitých geometrických pojmů mate-

matically správně a pojetím blízko k technické praxi.

2. Vyplňování prostoru. Společná idea měření velikostí geometrických útvarů v prostorech dimenze 1, 2 a 3 vede k získání základních představ o délce, obsahu a objemu a k prohloubení aplikovatelnosti tohoto úseku geometrie.

3. Kinematické přístupy. Podle našeho názoru nelze geometrii systematicky založit na pojmu geometrické zobrazení, z druhé strany by však měla hrát zobrazení v geometrii výraznější roli než v současném pojetí. Přístup k využití zobrazení by měl být pro žáky přirozený, měl by být v souladu s technickými aplikacemi a měl by vhodně doplňovat statické partie geometrie.

4. Aplikace geometrie. Aplikace by měly být motivačním i cílovým aspektem celé koncepce, přičemž nejde jen o aplikace technické a fyzikální, ale i o aplikace v jiných oblastech matematiky a o rozvíjení estetických stránek vyučování. Geometrie je velmi úzce spjata s každodenní zkušeností žáků, s ostatními úseky matematiky, s realitou žákova prostředí a s praxí.

Vzhledem k současné koncepci vyučování matematice považujeme za důležité výrazně posílit tyto výchovně vzdělávací cíle:

1. *Rozvíjení geometrické představivosti.*
2. *Rozvíjení tvořivého přístupu k řešení úloh.*
3. *Řešení úloh rýsováním a modelováním.*
4. *Postupné seznamování žáků s geometrií jako jazykem techniky.*

Závěry

Vyučování geometrii u nás se pohybuje

v začarovaném kruhu. Ne zcela vyhovující koncepce geometrie na základní a střední škole vede k tomu, že se dostatečně nerozvíjí zájem žáků o tuto disciplínu, málo se pěstuje geometrická představivost a schopnost aplikovat geometrické poznatky. Negativní vztah ke geometrii je brzdou i úspěšného studia geometrie u části budoucích učitelů, zvláště když je geometrie v učitelském studiu koncipována jako disciplína dosti vzdálená školské praxi. Na rozvíjení geometrické představivosti studentů je již dosti pozdě a není na to ani čas. Učitelé, kteří nemají geometrii rádi, jí opět věnují při vyučování menší pozornost, než by si zasloužila, ba i menší počet hodin, než je předepsán osnovami. A tak vycházejí ze škol žáci, kteří nemají dobré geometrické vzdělání a v rámci dalšího školení to bývají někdy právě geometrické disciplíny, které jim způsobují potíže např. na technických školách.

Chceme-li se dostat z tohoto začarovaného kruhu, musíme začít zlepšovat vyučování geometrii již od prvních ročníků základní školy a v učitelském studiu. Je to úkol dlouhodobý a je obtížný.

Podle mého názoru bychom měli věnovat pozornost především těmto otázkám:

1. Využívat dosti bohatých geometrických zkušeností z minulosti našeho vyučování matematice a z dostupných zahraničních výzkumů.

2. Připravovat uváženě změny ve vyučování matematice, a to jak po stránce obsahu, tak i po stránce metod a organizace vyučování. Přihlížet přitom k realitě naší školy a k perspektivním potřebám společenské praxe.

3. Věnovat náležitou pozornost technické stránce vyučování a zvláště problémům účelného využití výpočetní techniky v rozvoji geometrického vzdělávání.