Zbyněk Nádeník
Geometrie a geodézie

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 16 (1971), No. 4, 169--180

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/139776`

POKROKY MATEMATIKY, FYZIKY A ASTRONOMIE
ROČNÍK XVI — ČÍSLO 4

GEOMETRIE A GEODÉZIE*)

ZBYNĚK NÁDENÍK, Praha

OD PYTHAGORA K SOUČASNOSTI

PYTHAGORAS (asi 580—500 př. n. l.) prohlásil Zemi za kouli.

ARISTOTELES (384—322 př. n. l.) diskutoval důvody pro a proti kulovému tvaru Země a přiklonil se k Pythagorovu názoru.

ERATOSTHENES Z KYRENY (asi 276—194 př. n. l.) byl první, o němž je historicky známo, že se pokusil určit rozměry zeměkoule. Užil tří poznatků: V době letního slunovratu svítí slunce až na dno hlubokých studní u města Asuánu v horním Egyptu; jeho paprsky tedy dopadají kolmo (Asuán je v blízkosti obratníku Raka). V stejnou dobu v Alexandrii se sluneční paprsky podstatně odklánějí od svislice; pomocí vrženého stínu svislé tyče změřil tento odklon na $1/50$ plného úhlu. Z Asuánu do Alexandrie směřovaly karavany údolím Nilu přibližně na sever a vzdálenost obou měst odhadl na základě délky pochodů na 5000 stadií. (Výraz stadion znamenal původně délku závodní dráhy na olympijském závodišti a stal se základní řeckou měrou; je to asi 185 m.) Vzdálenost Asuán — Alexandrie vychází tak přes 900 km, ačkoliv skutečná je necelých 800 km. Eratosthenes uvažoval takto: (obr. 1). Odchylka slunečních paprsků od svislice v Alexandrii je rovna úhlu mezi zemskými poloměry Asuánu a Alexandrie. Odhadne-li se délka kružnice o poloměru R na $6{,}3R$, pak z rovnice $6{,}3R : 50 = 9000$ vychází, že poloměr R je zhruba 7150 km. To je asi o 800 km víc proti skutečnosti, ale přesto je Eratosthenův výpočet skvělý a jeho myšlenka zůstala základní ideou geometrických metod pro určování rozměrů Země.

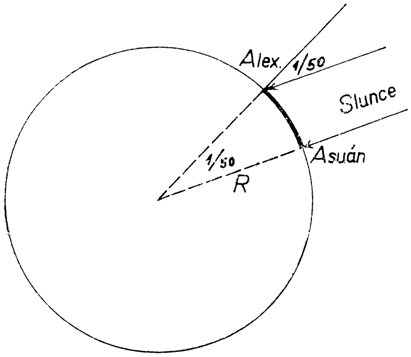
POSIDONIUS (135—51 př. n. l.) postupoval podobně. Po Síriu je nejjasnější hvězdou Canopus, viditelná jen na jižní polokouli. Z ostrova Rhodu se jeví právě na horizontu,

*) Článek vznikl z přednášky proslovené v prosinci 1970 v rámci „Besed matematiků", pořádaných Klubem školství a kultury ROH v Praze spolu s matematickou sekcí pražské pobočky JČMF.

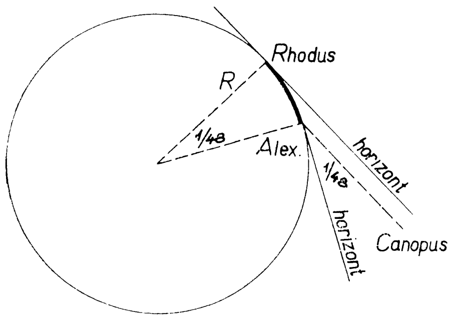
Všechny údaje i obr. 1—3 autor ovšem převzal z literatury, ale vzhledem k charakteru článku úplně upustil od citací.

Geodézie je pojata ve francouzském smyslu: Určit tvar a rozměry Země a pořídit geometrický základ pro mapování velkých oblastí. Francouzský termín je *géodésie*, český zpravidla *vyšší geodézie* (nikoliv jen geodézie). Český název *geodézie* — dříve *nižší geodézie* — zahrnuje práce menšího územního rozsahu, které Francouzi označují jako *topographie*.

ale v jižnější Alexandrii při kulminaci již asi o 1/48 plného úhlu nad horizontem. Tím je určen i úhel zemských poloměrů Rhodu a Alexandrie (viz obr. 2). Z délky a rychlosti plavby odhadl vzálenost mezi Rhodem a Alexandrií opět na 5000 stadií, takže dostal přibližně stejný výsledek jako Eratosthenes.



Obr. 1.



Obr. 2.

KALIF ALMANUN nařídil v roce 827 měření v okolí Bagdádu. Arabský výpočet se příliš neliší od Eratosthenova nebo Posidoniova závěru.

J. FERNEL (1497—1558), francouzský matematik a lékař, provedl v roce 1525 první měření v Evropě. Zjistil vzdálenost mezi Paříží a severně ležícím městem Amiens z počtu otočení kola cestovního vozu, šířkový rozdíl obou míst — tedy úhel jejich zemských poloměrů — z pozorování slunce a pro zemský kvadrant dostal výborný výsledek málo se lišící od 10 000 km. Jako třicátník zanechal matematiky, stal se velmi slavným profesorem medicíny na Sorbonně a osobním lékařem krále Jindřicha II.

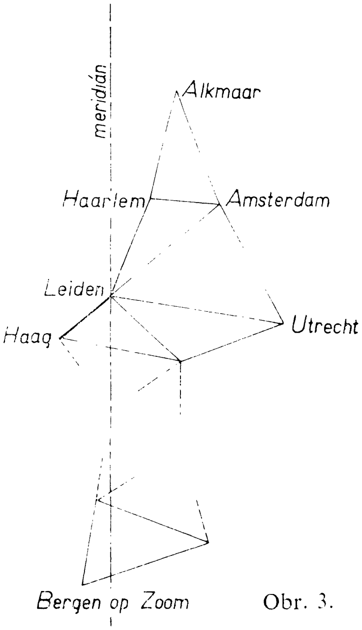
W. SNELLIUS (1581—1626), velmi známý holandský matematik a fyzik, byl první, kdo propracoval triangulaci.*) V letech 1615—17 měřil vzdálenost mezi městy Alkmaar a Bergen op Zoom (obr. 3) tak, že vytvořil síť 33 trojúhelníků, z nichž první měl vrchol v Alkmaaru, poslední v Bergenu a každé dva sousední společnou stranu. V těchto trojúhelnících změřil úhly, ale jen dvě strany (též Haag—Leiden, teoreticky by bylo stačilo změřit jen jednu). Pak už propočítal ostatní strany a z nich i hledanou vzdálenost. Snelliův postup omezuje měření na krátké vzdálenosti a odstraňuje největší zdroj chyb. Podle Snelliových výpočtů je zemský kvadrant o málo menší než 10 000 km.

Snellius byl nástupcem svého otce v profesuře matematiky na universitě v Leidenu. Spis *Eratosthenes Batavus* z roku 1617 věnoval své triangulaci; referuje v něm též o arabském měření podle záznamů z roku 1322 arabského spisovatele Abelfedease; toto měření se dochovalo právě díky této citaci. V díle *Tiphys Batavus* z roku 1624 zavedl Snellius termín „loxodroma"

*) Je domněnka, že triangulace použil už TADEÁŠ HÁJEK Z HÁJKU (1525—1600) v letech 1556—63 při mapování okolí Prahy.

pro čáru protínající poledníky ve stejném úhlu, a proto důležitou v mořeplavbě. Názvy obou knih jsou zajímavé: Batavové byl starý germánský kmen v ústí Rýnu a Tiphys byl kormidelník lodi, na níž se řečtí rekové plavili do Kolchidy na černomořské pobřeží Kavkazu; jeho jméno v antice zdomácnělo a byli jím označováni obratní kormidelníci.

Snelliovy triangulace se využívalo i v mnoha dalších měřeních, z nichž v 17. a 18. století jsou nejdůležitější měření francouzská. Geodetická věda se zrodila ve Francii a až do 19. století byla pěstována téměř výhradně jen Francouzi. V roce 1635 založil kardinál Richelieu po vzoru italských společností francouzskou akademii věd a ze státních důchodů jí opatřil bohaté nadace, ze kterých byla francouzská měření vesměs financována. Nejvýznamnějšími z nich jsou dvě:



Obr. 3.

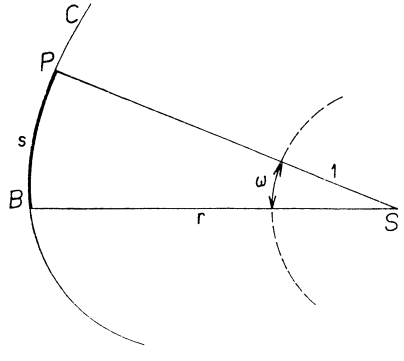
Předně expedice do tehdejšího místokrálovství Peru, na území dnešního Ecuadoru, a do Laponska v roce 1735. Tyto výpravy do zemí velmi různých zeměpisných šířek zjistily po několikaletém úsilí, že směrem k rovníku se poledník silněji zakřivuje a potvrdily tak zploštění Země na pólech; to vycházelo z Newtonovy gravitační teorie, ale měření, která v letech 1683—1718 od Dunkerque na jih prováděla francouzsko-italská skupina — nejznámější v ní byli otec a syn CASSINIOVÉ (1625—1712, 1677—1756), došla v důsledku nepřesností právě k opačnému výsledku. Ten vědce rozdělil na „citrónovité" a „zploštělé" a teprve zmíněná expedice přinesla rozhodnutí.

Za druhé velmi důležitým se stalo měření pařížského meridiánového oblouku mezi Dunkerque a Barcelonou v letech 1791—98, které vedlo k určení „metru jako desetimilionté části kvadrantu zemského". Práci řídila zvláštní komise, v níž ze známých matematiků byli P. S. LAPLACE (1749—1827), J. L. LAGRANGE (1736—1813) i G. MONGE, o kterém bude dále řeč.

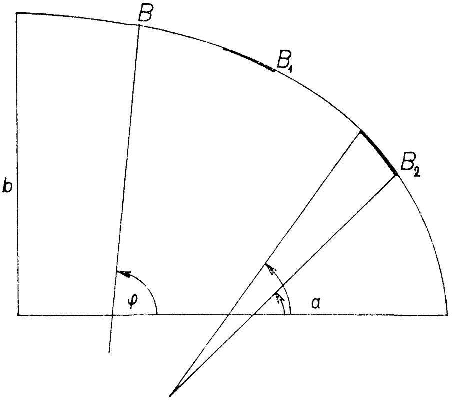
Objevila se tak otázka, jak velké je zploštění Země. Zase nejdřív pomohla geometrie. Na křivce C (obr. 4) vezměme ve velmi malé vzdálenosti s body B a P. V obou si myslíme tečny a k nim kolmice. Tyto dvě normály se protnou v bodě S v jistém úhlu ω vyťatém na jednotkové kružnici o středu S. Kružnice, která má také střed S a prochází bodem B, se ke křivce v okolí bodu B velmi přimyká. Její poloměr r je pak přibližně poloměr křivosti čáry C v bodě B. Můžeme jej vypočítat ze vztahu

$$(*) \qquad r : 1 = s : \omega\,.$$

Představme si nyní meridián jako elipsu (obr. 5). Ta je určena dvěma poloosami a a b. Bod B na elipse je určen zeměpisnou šířkou φ — tou se rozumí úhel, který s hlavní osou svírá normála v bodě B. Exaktní vzorec pro poloměr křivosti meridiánu



Obr. 4.



Obr. 5.

v bodě s danou zeměpisnou šířkou obsahuje tedy jen tu šířku a poloosy a, b. Změří-li se v okolí dvou bodů B_1, B_2 malé oblouky a určí-li se astronomicky zeměpisné šířky — a z nich pak i úhly normál — v koncových bodech těchto oblouků, lze určit poloměry křivostí r_1, r_2 v bodech B_1, B_2 jednak z těchto měření podle (*), jednak z exaktního vzorce. Tím dostaneme dvě rovnice pro dvě neznámé a, b, které spolu se zploštěním $\alpha = (a - b) : a$ už lze snadno vypočítat.

Výpočet zploštění α z různých měření dával velmi různé výsledky. Objevil se tak další problém: provést vyrovnání, aby chyby co nejméně ovlivnily výsledek. První publikované sdělení o vyrovnání uveřejnil r. 1806 A. M. Legendre v pojednání o drahách komet. Vyrovnávací počet je ovšem zcela mimo geometrii, a proto upustíme od poznámek o jeho vývoji. Vyrovnání, které dosáhlo všeobecného uznání a velkého rozšíření, provedl v letech 1837—1841 známý německý matematik a astronom F. W. Bessel (1784—1846). Využil deseti různých měření a došel k výsledku $\alpha = 1 : 299{,}153$. Elipsoid s tímto zploštěním meridiánu byl zaveden ve státech střední Evropy pro geodetickou a kartografickou praxi, a to i v bývalém Rakousku-Uhersku a po r. 1918 též v Československu.*)

Jistě nepřekvapí, že geometrické metody nemohly trvale vystačit pro určování tvaru a rozměrů Země. Jejich nedokonalost je v obtížích při lineárním měření a v tom, že těleso, na němž se měření konala, není rotační elipsoid — tím se Země jen ideálně nahrazuje. Od počátku 20. století se stále významněji uplatňují tíhová měření a v posledních letech astronomická pozorování umělých družic a fyzikální metody měření vzdáleností. To všechno je ovšem mimo geometrii, a tak jen poznamenejme, že první určil zploštění α z dráhy umělé družice český astronom E. BUCHAR (*1901; profesor stavební fakulty ČVUT) v roce 1958.

Zdá se, že význam geometrických metod opět oživuje. Ještě v minulém století bylo zahájeno měření zhruba podél 30° východní délky v Africe od mysu Dobré naděje podél Nilu až ke Káhiře. Dnes je toto měření dokončeno a dokonce i spojeno s velkým rusko-skandinávským měřením od Černého moře kolem Kyjeva a Leningradu až k Severnímu mysu v Norsku. Šířkový rozdíl mezi mysem Dobré naděje a Severním mysem je 109° a tato ohromná amplituda umožní jistě velmi přesné propočítání zemských rozměrů. Fyzikální způsoby pro určování velkých vzdáleností sice rozbily monopolní postavení triangulace, ale současně asi odkrývají nové možnosti pro geometrické studium tvaru Země.

LEGENDROVA A GAUSSOVA VĚTA**)

Při výpočtech triangulací se ukázalo, že trojúhelníky, jejichž strany se pohybovaly v desítkách kilometrů, nelze už propočítávat jako rovinné, ale musí se uvažovat jako sférické. Hlavní kružnicí na kouli se rozumí ta, jejíž rovina jde středem koule. Na glóbu jsou to všecky meridiány a rovník. Trojúhelník na kouli, jehož strany jsou oblouky hlavních kružnic, se pak nazývá sférický. Všimněme si ještě, že jeho strany jsou nejkratšími spojnicemi jeho vrcholů, po povrchu koule ovšem. Součet úhlů rovinného trojúhelníka je 180°, ale součet úhlů sférického trojúhelníka je vždy větší než 180°; oč je větší, je tzv. exces. Sférický trojúhelník tvořený na glóbu oblouky rovníku a nultého a devadesátého poledníku má všechny tři úhly pravé, a tedy exces 90°. Na zeměkouli je v rovnostranném trojúhelníku se stranami asi 20 km exces zhruba 1″, ale v trojúhelníku se stranami asi 100 km už přes 20″. V polovině 18. století byla sférická trigonometrie již dostatečně propracována. Systém do ní vnesl L. EULER (1707—1783), který už v r. 1735 zapsal sférickou kosinovou větu

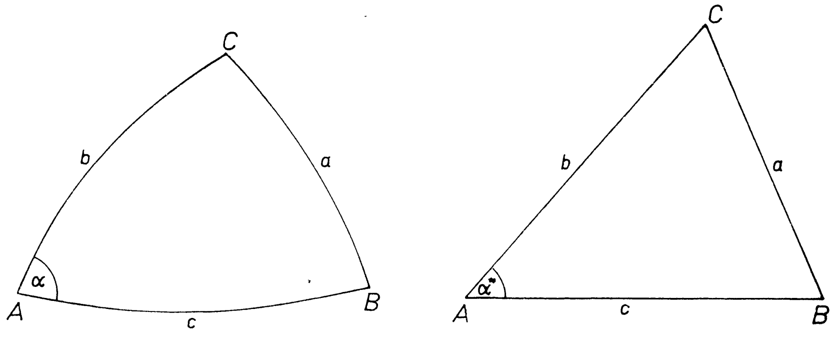
*) V padesátých letech byl u nás geodetický a kartografický materiál převeden na elipsoid F. N. KRASOVSKÉHO (1878—1948) se zploštěním $\alpha = 1 : 298{,}3$. Tento elipsoid byl už v roce 1944 zaveden za referenční plochu všech geodetických a kartografických prací v SSSR.

**) Poslední dva semestry byly předmětem autorovy doporučené přednášky, kterou od roku 1964 koná pro asistenty, absolventy a studenty zeměměřického směru fakulty stavební ČVUT.

v tom tvaru, jak ji užíváme dnes. Ale ve vzorcích sférické trigonometrie se objevují i úhly, pod nimiž se jeví strany ze středu koule, na níž trojúhelník leží. Tyto středové úhly jsou pro trojúhelníky na zeměkouli, které přicházely v geodetické praxi, velmi malé, a proto je počítání s nimi velmi nepřesné. Věc se obcházela tak, že sférické trojúhelníky se obtížně redukovaly na tětivové a naopak. Nesnáz odstranil Legendre objevem slavné věty: „*Malý sférický trojúhelník má každý úhel přibližně o třetinu excesu větší než rovinný trojúhelník se stejně dlouhými stranami*". Jinými slovy, lze jej přibližně propočítat úplně stejně jako rovinný, jestliže se předem zmenší každý jeho úhel o třetinu excesu. Teorém publikoval A. M. LEGENDRE v r. 1787, ale první důkaz podal až v r. 1798 v předmluvě ke zprávě J. B. J. DELAMBRA (1749—1822) o výsledcích meridiánového měření mezi Dunkerque a Barcelonou.

ADRIEN MARIE LEGENDRE (1752—1833; do francouzské revoluce se psal Le Gendre), nazývaný „Euklidem nového věku" pro slavnou učebnici *Eléments de géométrie*, byl jedním z nejvšestrannějších francouzských matematiků. V roce 1808 se stal čestným doživotním představeným pařížské university. Brzy zanechal učitelských povinností, odešel na odpočinek a věnoval se výhradně vědě. Jako dvaasedmdesátiletý ztratil své velké výslužné, protože při volbě do Akademie, jejímž členem byl od roku 1783, hlasoval proti vládnímu kandidátu Karla X.

Na Legendrově větě je nejnápadnější, že se všecky úhly zmenšují o třetinu excesu bez ohledu na jejich velikosti. To bylo dlouho předmětem sporů. Existuje několik desítek důkazů této věty — tak třeba v roce 1969 originální důkaz podal ruský geodet B. N. GAN'ŠIN. Svědčí to o mimořádném významu věty. Ale až na jednu výjimku



Obr. 6.

mají všechny důkazy nepříjemnou věc společnou. Užívají nekonečných řad a jejich výsledkem je vztah (obr. 6)

$$\alpha - \alpha^* = \tfrac{1}{3}\varepsilon + \dots, \qquad (**)$$

kde α je úhel sférického trojúhelníka, α^* odpovídající úhel rovinného trojúhelníka se stejně dlouhými stranami, ε je exces a tečky znamenají řadu, jejíž první členy lze sice propočítat, ale obecný výtvarný zákon je neznám. Ze záplavy takových důkazů úžasně vyniká Gaussův z roku 1841. Obsahuje výhradně konečné výrazy a jeho výsledek realizuje vztah mezi sinovými větami pro sférický a rovinný trojúhelník.

Carl Friedrich Gauss (1777—1855) se obracel ke geodetickým problémům od roku 1816. Studiem nejkratších spojnic na elipsoidu se teoreticky připravil na úkoly, před kterými stál v letech 1821—1841, kdy byl pověřen vyměřováním Hannoverska. Prvních pět let pracoval dokonce přímo v poli. Z geodetické činnosti vytěžil dva teoretické spisy, první z roku 1822 o konformním zobrazení ploch a druhý z roku 1828, mnohem důležitější, neboť obsahuje dva významné objevy.

Tak předně v něm Gauss našel jistý výraz — dnes mu říkáme Gaussova křivost — který se nemění, deformuje-li se plocha tak, že na ní zůstávají zachovány délky. Gauss si byl jistě vědom významu svého objevu, protože jej nazval „theorema egregium — znamenitý teorém". Bez jakékoliv nadsázky to byl objev epochální. Dnes na něm stojí rozsáhlá odvětví geometrie. Umožnil rozdělit vlastnosti plochy jednak na takové, které jsou svázány s tvarem plochy v prostoru, jednak na ty, které se nemění při deformaci, jež na ploše nemění délky. Gauss vybudoval systematický základ k studiu ploch — k diferenciální geometrii. Nebyl však první, kdo se touto disciplínou zabýval. Nejvýznamnějším Gaussovým předchůdcem byl zmíněný už G. Monge, jehož životní dráha i přístup k vědecké tvorbě jsou tak odlišné, že stojí za to oba zakladatele diferenciální geometrie srovnat.

Gaspard Monge (1746—1818) byl znamenitý učitel, skvělý organizátor a stále ve středu politických událostí. Působil nejdříve na vojenské škole v Mézières, kde z přednášek o stavbě pevností rozvinul deskriptivní geometrii. Za vlády Ludvíka XVI. nemohl z této své nové nauky nic publikovat; byla totiž považována za vojenské tajemství. V roce 1794 setník a současně výborný matematik L. M. Carnot (1753—1823) jako člen „Výboru obecného blaha" založil v Paříži pro vzdělávání důstojníků „Ecole Polytechnique"*) a v její čelo povolal Monge. Ten vbrzku učinil z geometrie hlavní předmět a shromáždil kolem sebe řadu vynikajících žáků a svých

*) Podle slov německého matematika *C. G. Jacobiho* (1804—1851) „eine Schule ohne Vorbild und ohne Nachbild in Europa" — škola bez vzoru a bez napodobení v Evropě. Kromě příspěvků k trigonometrii a účasti při měření zmíněného už pařížského meridiánu učinil Carnot významné náběhy k projektivní geometrii v pracích z let 1801, 1803 a 1806. S nimi byl obeznámen Mongeův žák, vojenský inženýr *V. Poncelet* (1788—1867), který v roce 1812 táhl s Napoleonem na Moskvu a který v zajetí měl na štěstí dosti času na promyšlení svého základního spisu z roku 1822 o projektivní geometrii. Současně byl Carnot nedostižný vojenský organizátor. Jemu vděčila republikánská Francie, že nepodlehla. Stal se roku 1793 zakladatelem všeobecné branné povinnosti, která Francii rázem poskytla statisícové armády, s nimiž se početně nemohla změřit kabinetní vojska ostatních mocností. Usiloval o vojenské využití objevů; před vítěznou bitvou u Fleurus roku 1794 nedaleko Charleroi pozorovali Francouzové postavení anglo-rakouských vojsk z balónu, tedy z vynálezu předešlého roku. Když Napoleon v roce 1795 z pověření konventu potlačil v Paříži monarchistické spiknutí a Carnot se stal jedním z pětičlenného direktoria, velmi se oba sblížili. Z italského tažení psal Napoleon Carnotovi o své manželce Josefině Beauharnaisové: „Jsem zoufalý, že nepřijíždí. Má nějakého milence, ten ji drží v Paříži". (Už dříve jím byl Barras, další člen direktoria, který ještě jako člen konventu doporučoval Napoleona k zásahu v roce 1795.) Když si Napoleon z egyptského dobrodružství vytvořil velkou popularitu — Monge též měl asi tolik vtipu, že debakl vydával za úspěch — a svržením direktoria provedl státní převrat, vzájemné styky ochladly. Později byl ve stočlenném tribunálu Carnot jediný, kdo hlasoval proti Napoleonovu dědičnému císařství. Návrat Bourbonů přivedl Carnota na mizinu, ale Napoleon byl dosti velkomyslný a po přistání z Elby jej finančně zachránil.

pozdějších následovníků. Byl přesvědčený republikán a za francouzské revoluce v letech 1792—93 i ministrem námořnictva. V Napoleonovi viděl uskutečnitele revolučních ideálů, a protože Napoleon od svých studií na vojenských akademiích v Brienne a Paříži měl nelíčený zájem o matematiku, nepřekvapí, že Monge stál brzy v nejtěsnější blízkosti budoucího císaře. Podnikl s ním nejen italské tažení v roce 1796, ale i egyptské dobrodružství o dva roky později. Když admirál Nelson zničil u Abukiru francouzské loďstvo a Napoleon se za čas jen se dvěma slabě vyzbrojenými fregatami vracel do Francie, vzal z velkého štábu civilních vědců, kteří měli objevovat a studovat Egypt, jen Monge a chemika C. L. Bertholleta — ostatní poslal do horního Egypta. E. Ludwig*) v Napoleonově životopisu líčí historku z této sedmitýdenní plavby: V nejužším kruhu Napoleon nahlas přemítá: »„Co byste dělali, kdyby nás napadli Angličané? Bojovali? Nemožné. Vzdali se? K tomu nebudete mít víc chuti než já. Zbývá jedině si v takovém případě vyskočit do vzduchu". Všichni mlčí, Monge bledne vedle generála. „Příkaz k tomu bych vám dal já", připojuje se zlomyslným smíchem. Když za několik dnů spatřili loď a omylem ji považovali za anglickou, učenec zmizel. Později ho našli u dveří skladiště prachu. Tak velká byla Bonapartova autorita.« Mongeovy pařížské přednášky o diferenciální geometrii jsou v nejtěsnější souvislosti s jeho dřívějším objevem deskriptivní geometrie. Netvoří ucelený systém, ale jsou věnovány jednotlivým problémům a geometrickým aplikacím diferenciálních rovnic.

Gauss se stal v roce 1807 ředitelem astronomické observatoře a profesorem university v Göttingen. Žil velmi klidně, vyučování považoval za obtíž — však také neměl přímých žáků, o politiku se nestaral a od státu požadoval jedině možnost nerušené vědecké tvorby. Ale na aplikace matematiky měl názor, který u vědce z čtyř stěn není nezajímavý. V předmluvě k prvnímu *Pojednání o předmětech vyšší geodézie* z roku 1843 — další je z roku 1846 — píše: „Při trigonometrických měřeních rozprostírajících se po celém království Hannoverska, která zčásti jsem prováděl sám, zčásti řídil, ..., byly raženy cesty odlišné od jinak obvyklých ..., a proto volím uveřejnění toho, co v teoretické části je mé vlastní, v řadě pojednání o to raději, že si tak ponechávám volnost rozvinout podrobně mnohá vyšetřování, která poskytují samostatný zájem a s ostatními jsou v úzké příbuznosti, i když se jich při nových měřeních bezprostředně nepoužilo". V tomto pojednání o konformním zobrazení aplikuje Gauss teoretické výsledky na velký trojúhelník Brocken-Hohehagen-Inselsberg z hannoverského měření.

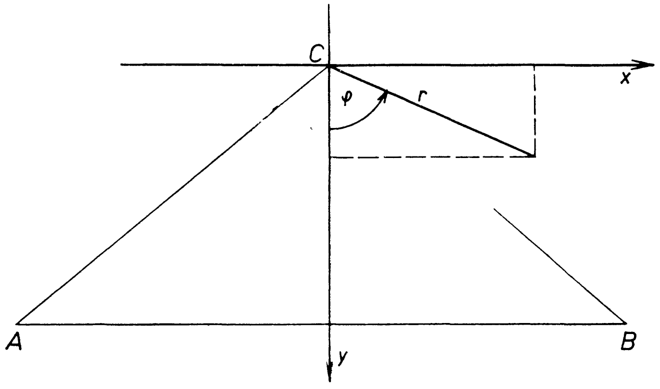
Druhý velmi významný objev z výše citovaného Gaussova spisu z roku 1828 je zobecnění Legendrovy věty z koule na obecnou plochu. Vezme-li se za ni rotační elipsoid, dostane se důležitý případ pro geodézii. Představme si na ploše trojúhelník, jehož strany realizují nejkratší spojení vrcholů A, B, C — samozřejmě po té ploše; říká se mu geodetický. Označme Δ obsah tohoto trojúhelníka a K_A, K_B, K_C Gaussovy křivosti v jeho vrcholech, α úhel při vrcholu A a α^* odpovídající úhel v rovinném trojúhelníku se stejně dlouhými stranami. Pak (obr. 6)

$$(***) \qquad \alpha - \alpha^* = \tfrac{1}{12}\Delta(2K_A + K_B + K_C) + \dots$$

Uvážíme-li, že na kouli o poloměru R je $K_A = K_B = K_C = 1 : R^2$ a $\Delta = R^2\varepsilon$, vychází nám ihned dřívější Legendrův výsledek (**). Idea Gaussova důkazu je velmi jednoduchá. Představme si v rovině trojúhelník (obr. 7), který výškou z vrcholu C rozdělíme na dva pravoúhlé. Tato výška spolu s přímkou jdoucí bodem C rovnoběžně se stranou AB tvoří osový kříž pro pravoúhlé souřadnice x, y. Kromě nich zvolíme

*) Známý německý autor biografií.

ještě polární souřadnice r, φ se středem v bodě C a osou ve zvolené výšce. Transformační vztahy mezi těmito souřadnicemi jsou velmi jednoduché, ale jejich zobecnění na plochu — a to je základ Gaussova postupu — je pravým opakem. Vůbec je v Gaussově důkazu nepříjemně velká komplikovanost výpočtů.



Obr. 7.

GASTON DARBOUX (1842—1917) byl pokračovatelem francouzské geometrické tradice založené Mongem.*) Byl profesorem na Collège de France; toto učiliště nepřipravuje ke zkouškám a neudílí hodnosti, ale profesoři se zabývají výhradně vědou a konají jen vědecké přednášky. Darbouxovým největším dílem jsou čtyři svazky z let 1887—1897 o diferenciální geometrii ploch, v nichž shrnul poznatky nashromážděné v této disciplíně za uplynulé století. V třetím svazku takto podstatně zjednodušil Gaussův postup:

Vezměme opět rovinný trojúhelník a jeho vrcholy A, B zvolme za středy dvou různých soustav polárních souřadnic se společnou osou AB. V rovině je velmi snadné nalézt vztahy mezi těmito souřadnicovými soustavami a ani na ploše to není tak obtížné jako při pravoúhlé a polární soustavě. Tato zdánlivě malá modifikace umožnila Darbouxovi podstatné zjednodušení. Darbouxův postup převzal italský geodet P. PIZZETTI (1860—1918) do svého díla o teoretické geodézii z roku 1905, a tím v geodetické literatuře zdomácněl.**)

Gaussovu metodu dále rozvíjeli v šedesátých letech v řadě prací Němci astronom P. A. HANSEN (1795—1874), matematici E. B. CHRISTOFFEL (1829—1900), J. WEINGARTEN (1836—1910) a později velmi významný geodet F. R. HELMERT (1843—1917) v rozsáhlém dvousvazkovém díle z let 1880—84 *Matematické a fyzikální teorie vyšší geodézie*, které v posledních deseti letech bylo znovu vydáno (první svazek

*) Dvojice Monge-Gauss ze začátku 19. století má protějšek ve dvojici Darboux-L. BIANCHI (1856—1928). V přednáškách z konce 19. století o diferenciální geometrii provedl Bianchi výběr látky, který se v podstatě udržel v učebnicích této disciplíny až do dneška.

**) Uvádějí jej francouzští geodeti P. TARDI a G. LACLAVÈRE v několikasvazkovém díle o geodézii z roku 1954, ale s odvoláním pouze na Pizzettiho.

i v ruském překladu). Bohužel jsou v něm základní principy často zastíněny technikou numerických výpočtů s omezením výhradně na rotační elipsoid.

Geometrií i obecnějších než geodetických trojúhelníků se v letech 1935—36 zabývali velmi známí matematikové Ital T. LEVI-CIVITA (1873—1941) a Němec S. COHN-VOSSEN (1902—1936), který v roce 1934 emigroval do Sovětského svazu. Působil v Leningradu a obracel pozornost ke geometrii ve velkém. Nejvýznamnějším zástupcem této disciplíny je v Sovětském svazu A. D. ALEKSANDROV (*1912), který v roce 1948 vydal knihu *Vnitřní geometrie konvexních ploch*, jíž beze sporu založil nové odvětví diferenciální geometrie, v němž základní ideou je nahrazení zakřivené plochy mnohostěnem. V této knize studoval — ze zcela jiných hledisek než jeho předchůdci — i vztahy mezi úhlem α geodetického trojúhelníka na ploše a odpovídajícím úhlem α^* rovinného trojúhelníka se stejně dlouhými stranami (viz obr. 6). Vyslovil problém, jak pomocí zakřivení plochy účelně odhadnout shora i zdola rozdíl $\alpha - \alpha^*$. Něco podobného žádný z dosavadních důkazů Gaussova zobecnění Legendrovy věty neumožňuje, relace (***) má naprosto jiný charakter. Z příbuzného oboru odvodil Aleksandrov — vycházeje z jedné Gaussovy rovnice — i tzv. srovnávací větu, v níž hořejší rovinný trojúhelník je nahrazen sférickým.

Legendrova věta se tak proplétá geometrií a geodézií skoro 200 let a stále poskytuje novou problematiku.

ZÁVĚR

Vynikajících matematiků-geodetů, kteří se svými objevy nebo výkony trvale zapsali do obou disciplín, bylo kromě Legendra na přelomu 18. a 19. století ve Francii více. Připomeňme znovu alespoň Laplace, autora rozsáhlého díla o nebeské mechanice. Stál — podobně jako Monge — velmi blízko Napoleonovi; byl dokonce jeho ministrem vnitra, ale brzy se od studia státní mechaniky vrátil zase k mechanice nebeské. Pozdějším protějškem této skupiny francouzských učenců byl v Německu Gauss. Ale už hluboko v 19. století přestává tato „personální unie", tvořená mezi geodézií a matematikou špičkovými vědci obou oborů, a nastává odklon.*) Neznamená to však, že není uvědomělých pokusů o užší sblížení z obou stran.

V rozsáhlé německé *Encyklopedii matematických věd* vyšla v roce 1925 první část šestého dílu s názvem *Geodézie a geofyzika*. Autory vybíral F. KLEIN (1849—1925), který patřil k nejvýznamnějším německým matematikům vůbec. To samo říká už dosti. Oddíl o vyšší geodézii napsal již v roce 1906 zmíněný už Pizzetti. V seznamu literatury uvádí 43 autorů monografií teoretického charakteru, z toho 14 velmi známých matematiků: Bessel, Bonnet, Christoffel, Clairaut, Gauss, Jacobi, Laplace, Legendre, Liouville, Maclaurin, Minding, Stirling, Stokes, Weingarten. V novější

*) Zmiňuje se o něm i A. A. IZOTOV v předmluvě k ruskému překladu knihy Königa a Weise, o níž je dále řeč.

době se němečtí matematici R. KÖNIG a K. WEISE — první je profesorem na universitě v Mnichově, druhý na universitě v Kielu — pokusili o rozsáhlé dílo se společným názvem *Matematické základy vyšší geodézie a kartografie*. První část *Zemský sféroid a jeho konformní zobrazení* vyšla roku 1957 a patří cele matematické kartografii. Další části měly být věnovány aplikacím diferenciální geometrie, zcela stranou měla zůstat fyzikální geodézie, založená na teorii potenciálu. První část není šťastná. Je tak přeplněna vzorci, že může zaujmout jen velmi úzkého specialistu, ale odradí jak matematika, který by se chtěl rychleji informovat o matematické kartografii, tak nepochybně i geodeta, který by si chtěl učinit představu o matematikově přístupu. Další části zatím nevyšly.

Velmi sympatický pokus podnikl rakouský geodet F. HOPFNER (1881—1949). Nemusí být bez zajímavosti, že se narodil v Trutnově, navštěvoval německé gymnasium v Praze - Smíchově, studoval na německé universitě a německé technice v Praze a v Praze promoval na doktora filosofie; působil ve Vídni, kde přednášel vyšší geodézii a v posledním roce života byl rektorem techniky. Těsně před smrtí vydal útlou knihu *Základy vyšší geodézie*, aby matematikům, kteří nestojí geodézii nejblíž, poskytl přehled o jejích problémech. To se mu, myslím, podařilo, i když matematika sama je v jeho knize dosti stará. Obecně nejpozoruhodnější je pasáž z úvodu: „Mezi geodety nebude asi chybět kritických hlasů, které nebudou dávat za pravdu, že rovněž i geodézie je jen malá částečná oblast aplikované matematiky a fyziky a též z takového hlediska lze o ní pojednat. Jim odpovídám jako kdysi Petr Abélard: Si omnes patres sic, at ego non sic.*) Ale na štěstí se mohu odvolati na učebnici *Úvod do teorie křivek a ploch na vektorovém základě*, jejíhož napsání by pan C. F. BAESCHLIN**) jistě byl zanechal, kdyby nebyl proniknut přesvědčením, že němečtí geodeti mají ve své disciplíně spatřovati více než dosud aplikační oblast geometrie.“***)

Z matematického stanoviska je velmi originální kniha anglického geodeta M. HOTINE (1898—1968) *Matematická geodézie* z roku 1969. Jako vůbec v první knize o geodézii je v ní důsledně uplatněn tenzorový počet, o němž říká autor v předmluvě: „Kartézské souřadnice v trojrozměrném prostoru nejsou vhodné pro všechny geode-

---

*) Pierre Abélard (1079—1143), teolog, jeden z největších scholastických filosofů; v Paříži měl až 5000 žáků. Utrpěl trapné fyzické příkoří pro tajný poměr k Héloïse, který inspiroval k milostné poezii všech dob, např. J. J. Rousseaua k *Julii čili Nové Héloïse*. Volný překlad latinského textu: I když všichni otcové smýšlejí tak, já přesto postupuji jinak.

**) (1881—1961), profesor vyšší geodézie na technice v Curychu, bývalý vicepresident mezinárodní asociace pro geodézii geodetické a geofyzikální unie, autor rozsáhlé *Učebnice geodézie* z roku 1948.

***) K tomu maličký příklad. M. S. MOLODENSKIJ, V. F. JEREMEJEV a M. I. JURKINA — první z autorů je zakladatelem nové velmi významné teorie pro studium tvaru Země — vydali v roce 1960 v Moskvě knihu *Metody studia vnějšího gravitačního pole a tvaru Země* (anglický překlad z roku 1962), v níž po několikastránkových výpočtech dospěli k přibližnému vzorci, jenž je formálně úplně shodný s relací, kterou už v roce 1884 objevil citovaný již Weingarten; tato relace má dodnes velký význam v teorii konvexních útvarů a lze z ní zmíněný přibližný vzorec krátce odvodit. Podrobněji o tom píše autor spolu s P. HOLOTOU v Studia geophysica et geodaetica *15* (1971).

tické procesy. Jsme nevyhnutelně nuceni uvažovat obecnější křivočaré systémy a bylo by dokonce archaismem vydávat bez použití tenzorového počtu knihu vyžadující diferenciální geometrii takových systémů. Bohužel velmi málo geodetů studovalo tento důležitý obor matematiky a u starší generace je nepravděpodobné, že tak učiní."

Hopfnerova a Hotineho slova jsou stanovisky dvou vynikajících geodetů a nepřímým nátlakem na mladší geodetickou generaci. Naopak matematikové zdaleka ještě nerozřešili zcela uspokojivě problémy, které jim předložila geodézie.

H. FREUDENTHAL:

Všeobecně se připouští, že existuje propast mezi filosofií vzdělání v USA, evropských socialistických zemích a kontinentálních západoevropských zemích. Na jedné straně se sleduje ideál jistého druhu výchovy vší mládeže, na druhé straně se příliš zdůrazňovala ta část výchovného systému, která zajišťuje rozvoj schopností pro malou skupinu studentů vybraných spíše na sociálních než intelektuálních základech.

Musím připustit, a činím tak s hanbou a lítostí, že v západoevropských zemích, když mluvíme o matematickém vzdělání, myslíme nejčastěji na gymnasia a lycea a mlčky zapomínáme na více než 90% těch, kteří nenavštěvují tyto školy. Souhlasím, že vyváženější výchovný systém může být špatný, jestliže jeho nejvyšší úroveň je příliš nízká k tomu, aby dala uspokojení nejnadanějším studentům. Ale místo diskusí o otázce, který druh neuspokojení je menším zlem, bych se raději pokusil dát více uspokojení všem lidem a společnosti, k níž náležejí.

Nová matematika se setkala s kritickým přijetím. Lidé, kteří aplikují matematiku, pozorují, že matematika, kterou potřebují, je zaměňována čímsi, co považují za méně vhodné pro aplikace. Je faktem, že *biologové, ekonomové, sociologové jsou lépe připraveni aplikovat moderní matematiku než fyzici*, kteří nesou balvan dlouhé tradice. Na vysokých školách se rozdíl mezi matematikou matematiků a matematikou fyziků stal nebetyčným.

Je škoda, že většina kritiky proti moderní matematice se dělá bez znalostí, co je ve skutečnosti matematika. Je to škoda, protože existuje vhodný důvod pro takovou kritiku, pokud matematici dbají tak málo o to, jak lidé mohou matematiku použít. Nejsme oprávněni kárat fyziky za ztotožnění moderní matematiky s hloupou filosofií výchovy, dokud sami tyto věci ztotožňujeme. Jsem přesvědčen, že *když neuspějeme ve vyučování matematice tak, aby byla užitečná, rozhodnou se uživatelé matematiky, že matematika je příliš důležitý vyučovací předmět než, aby mohla být vyučována učiteli matematiky*. To by ovšem byl konec matematického vyučování!