Jiří Fiala

Je elementární logika totéž co predikátová logika prvního řádu?

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 42 (1997), No. 3, 127--133

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/139769`

4. Příklady technických aplikací rentgenové počítačové tomografie

- Kontrola *kompozitních materiálů* a vrstevnatých konstrukcí; metodou *CT* se dá stanovit rozdělení hustoty, vyšetřovat relativní obsah složek v různých oblastech řezu, provádět geometrická kontrola struktury vícerozměrného armování, zviditelnit technologické defekty v různých stadiích výroby, racionalizovat technologický proces. V sendvičových systémech je možná nezávislá analýza prostorové struktury jednotlivých vrstev, lze ověřovat rovnoměrnost nanesení pojidla, tloušťky krycího povlaku aj.
- Tomografie *odlitků*; kontrola vnitřku lopatek plynových turbín, motorových dílů se složitou vnitřní prostorovou strukturou aj.
- Tomografie vysoce namáhaných *keramických dílů;* rozdělení hustoty materiálu v objemu součástek členitého tvaru (lokalizace vnitřních trhlin a dutin), identifikace malých odchylek geometrického tvaru.

První rentgenový počítačový tomograf pro technické účely byl u nás uveden do provozu na ČVUT v Praze. Školicí a vzdělávací centrum rentgenové počítačové tomografie, organizované Fakultou jadernou a fyzikálně inženýrskou, nabízí své zkušenosti s aplikacemi této nejnovější metody nedestruktivního výzkumu a kontroly makroskopické struktury materiálů i finálních výrobků širokému okruhu zájemců z výzkumných ústavů i průmyslových podniků.

Je elementární logika totéž co predikátová logika prvního řádu?

Jiří Fiala, Praha

Před nějakými dvěma lety se konala v Praze jednodenní konference s názvem *Co je logika?* Dopadlo to tak, jak jsem čekal: všichni hovořili o tom, co je to logika a nikdo nemluvil o tom, co je logika. Rozumějte: stejně jako když na otázku, co je to jazyk, se odpoví výkladem, co je to jazykověda. Nakonec jsem dospěl k názoru, že logika by mohla být jedinou vědou, která má za předmět samu sebe.

Quine v úvodu ke své *Filosofii logiky* uvádí dvě definice logiky. První je *ostensivní*: ukazuje, jak to v logice chodí, a Quine si vypůjčuje definici Tydlidkovu z Carrollovy *Alenky*:

Doc. RNDr. JIŘÍ FIALA, CSc. (1939), katedra matematické logiky a filosofie matematiky, MFF UK Praha.

„Naopak,“ doplnil ho Tydlidek, „jestli to bylo, třeba to i bylo, ale být to tak, pak to být mohlo, ale aby to bylo, to zas nebylo. To je logika.“

Druhá definice je *diskursivní*: vymezuje logiku zevnitř:

Řekl bych, že logika je systematické studium logických pravd. Kdyby to nestačilo, řekl bych, že nějaká věta je logicky pravdivá, jsou-li pravdivé všechny věty, mající touž gramatickou strukturu. A kdyby ani to nestačilo, řekl bych, aby si přečetli tuto knihu.

Tak to dopadne vždy: chcete-li vědět, co je to logika, přečtěte si nějakou pořádnou knihu o logice. Rozumí se o matematické logice, jiná přece ani není. Jenže to jsme zase na začátku: dozvíte se, co je to matematická logika, ale stěží, co je to logika. Jinak řečeno otázka zní: je matematická logika opravdu logika?

Teď patrně čekáte (a vlastně rozumně), že bude následovat nějaká apologie neklasických logik. Ne, půjde mi opravdu o to, čemu se říká *elementární logika*, čili „predikátový kalkulus prvního řádu“.

Náš příběh začal v roce 1879, kdy Gottlob Frege vydává svůj *Begriffsschrift*, čili „pojmopis“. Devatenácté století přes všechny spektakulární úspěchy přírodních věd tone v nejistotě, co se základů týče. Osvícenství se vzdalo víry v Garanta lidského poznání, geometrie už také není — po objevu jiných geometrií — to, co bývala a jestliže se nenajde neotřesitelný základ — *fundamentum inconcussum* — pro přirozená čísla, jak už by vůbec mohlo být nějaké naše poznání jisté a spolehlivé? A tímto neotřesitelným základem má být pro Fregeho jeho pojmopis. Aritmetiku nelze totiž založit na nějakých představách, to by byl psychologismus a tedy něco, co je nevyhnutelně omylné. Je třeba nalézt *kalkulus lidského myšlení*, jak po něm toužil Leibniz a mnozí jiní, ne nutně celý, ale aspoň tu jeho část, která by mohla posloužit pro bezpečné a objektivní vybudování aritmetiky. Vlastně to má být kalkulus *nelidského* myšlení, protože lidské myšlení je vždy omylné. Právě proto to má být *kalkulus*, tj. hra s oblázky, jejich přeskupování podle nějakých mechanických pravidel.

Begriffsschrift je útlá knížka a dvě třetiny v ní zaujímá příklad, ilustrující použití pojmopisu. Na několika prvních stránkách dojde k něčemu nečekanému, co je později pokládáno za revoluci v logice, neboť všeobecným přesvědčením dosud bylo, že se na aristotelovské logice nedá už nic vylepšit, že je dokonalá a definitivní. V *Begriffsschriftu* je založeno (a dokonce už axiomaticky) to, co později dostalo název predikátová logika prvního řádu (přesnější by bylo: co bylo později přeměněno na predikátovou logiku prvního řádu; ale to by vyžadovalo další argumentaci, kterou bych se tady nechtěl zabývat). Frege se pak pouští do vybudování aritmetiky na tomto základě, tedy do uskutečňování programu *logicismu*, tj. založení aritmetiky na logice. Přátelé ho varují, že to nebude nikdo číst, aby napřed napsal něco čitelnějšího a ne hned v pojmopisu; tak vznikly *Základy aritmetiky*. Jenže ani ty nikdo nečte. Když v roce 1893 vydává první díl svých *Základních zákonů aritmetiky*, knihy napsané téměř výhradně v pojmopise, kde se německý jazyk vyskytuje jen sporadicky a jaksi z nouze, knihy, která vypadá, jako kdyby byla psána v nějakém neznámém orientálním jazyce, stěžuje si v předmluvě, že jeho knihy nikdo nečte: když je vezmou do ruky matematici, odhodí je: *metaphysica* *sunt, non leguntur!*, a když je vezmou do ruky filosofové, zvolají: *mathematica sunt, non leguntur!* Přece se však našli někteří, kteří to četli: Dedekind, Peano, Russell, Wittgenstein. O deset let později vydává Frege druhý díl a chystá třetí. A hned po vydání druhého dílu dostává kratičký dopis od mladého Bertranda Russella, který ukazuje na trhlinu v těchto neotřesitelných základech: slavný Russellův paradox. Ironií osudu se týká právě Fregeho pátého postulátu, jako u Eukleida. Neotřesitelný základ se otřásl, kupodivu to byl ale Frege, který první pochopil, že program logicismu je omylem. Peano, Russell a další se naopak pokusili zachránit vše — stejně jako v historii vždy — nějakými epicykly nebo *ad hoc* dodatky, i jim však nakonec došlo, že to takto nepůjde.

Na tomto příběhu je nejpodivnější, že tito vědci nezahodili sám pojmopis, nebo že se nepokusili zjistit, zda v něm není něco vadného, neúplného. Naopak právě v jejich rukou se proměnil na matematickou logiku a nastoupil vítězné tažení. Co se ukázalo být nepoužitelné pro založení aritmetiky, stalo se základním jazykem matematiky (aspoň matematiky „post mortem", už hotové), z kalkulu nelidského myšlení se stal školní předmět o správném lidském myšlení. A při pokusech o řešení neřešitelných problémů byly jako vedlejší produkt vynalezeny počítače. Je to historie neuvěřitelná — ale každá skutečná historie je neuvěřitelná. A jejím výsledkem, stejně podivným, je naprosté a všeobecné přesvědčení, že tato „elementární logika" nebo „matematická logika" je tou pravou, nezpochybnitelnou, jistou logikou, dokonce tou pravou logikou i pro jiné vědy, než je matematika. A že budeme ochotni změnit cokoli jiného, nikoli však tuto logiku.

Tak ovšem nesmýšleli všichni logici, ba právě ti, kteří jsou pokládáni za největší, byli ochotni připustit, že i logika může podléhat změnám. Tak např. Alfred Tarski v dopise Whiteovi (z roku 1944, publikovaném však až v roce 1987) píše: „Jsem ochoten odmítnout jisté logické premisy (axiomy) naší vědy za přesně stejných okolností, za nichž jsem ochoten odmítnout premisy empirické (např. fyzikální hypotézy); a nemyslím si, že bych v tomto ohledu byl výjimkou". „Axiomy logiky," píše dále, „jsou tak obecné povahy, že zřídka jsou dotčeny takovými zkušenostmi ve speciálních oblastech. Nevidím zde však »v principu« žádný rozdíl; mohu si představit, že nás nějaké nové zkušenosti velmi základní povahy přimějí k tomu, abychom změnili právě některé axiomy logiky. [...] Že váháme tak učinit, je mimo jakoukoli pochybnost; koneckonců »logické pravdy« jsou nejen nejobecnější, nýbrž také mnohem starší než fyzikální teorie, ba dokonce i než geometrické axiomy."

Neuvěřitelným výkonem Fregeho bylo, že zredukoval svůj pojmopis na pár logických spojek a dva kvantifikátory a dokonce ukázal, že stačí např. jen negace ($\neg$), konjunkce ($\&$) a universální kvantifikátor ($\forall$): jak víme ze základních kursů logiky, můžeme například disjunkci výroků p a q, $p \vee q$, vyjádřit jako $\neg(\neg p \,\&\, \neg q)$ (de Morganův zákon) a implikaci $p \rightarrow q$ jako $\neg p \vee q$. Existenční kvantifikátor, např. „existuje x tak, že platí $\varphi(x)$" (kde φ je nějaká vlastnost, predikát), formálně zapsáno $\exists x\, \varphi(x)$, se dá vyjádřit pomocí kvantifikátoru universálního „pro všechna x platí $\psi(x)$" (kde ψ je opět nějaký predikát), formálně psáno $\forall x\, \psi(x)$, takto:

$$\exists x\, \varphi(x) \quad \text{je ekvivalentní} \quad \neg \forall x\, \neg \varphi(x).$$

V *logice prvního řádu* se kvantifikátory vždy vztahují k nějaké dané množině (universu); v logice druhého řádu pak je možno kvantifikátory použít i na podmnožiny universa (a na funkce), v logice třetího řádu i na množiny funkcí atd. Mnozí logici soudí, že není logiky kromě logiky prvního řádu. Toto přesvědčení se opírá o dosti dlouhou tradici, jejímž vyjádřením je tzv. „Hilbertova teze“ (tak to nazval Martin Davis): všechny matematické výroky lze vyjádřit v logice prvního řádu a neformální pojem dokazatelnosti lze nahradit formálním pojmem dokazatelnosti v logice prvního řádu. První část této teze je založena na empirické zřejmosti: bylo by divné, kdyby někdo přišel na nějaký nový pojem, který by byl očividnou součástí logiky (právě toto hodlám za chvíli zpochybnit). Druhá část teze je pak důsledkem části první a faktu, že logika prvního řádu je *úplná*, tj. zhruba řečeno vše, co v logice prvního řádu platí obecně při každém jejím použití, je v této logice formálně dokazatelné. Hilbertova teze je všeobecně přijímaná, dokonce i těmi, kteří mají daleko k tomu, aby ji přijali v praxi.

Vyjadřovací schopnosti logiky prvního řádu jsou skutečně velké, ale ne neomezené. Snadno třeba vyjádříme komutativitu (např. pro sečítání v abelovské grupě):

$$\forall x \forall y\, (x + y = y + x).$$

S vyjádřením periodičnosti abelovské grupy však už budeme mít problémy: periodičnost zde znamená, že ke každému prvku x grupy existuje přirozené číslo $\geqq 1$ tak, že součet n prvků x, tj. nx, je nula. Když to totiž zapíšeme způsobem, který se sám nabízí, totiž ve tvaru

$$\forall x\, \exists n\, (n \geqq 1 \,\&\, nx = 0),$$

dostali jsme se mimo logiku prvního řádu (každý z obou kvantifikátorů se týká jiné množiny, první množiny prvků grupy, druhý množiny přirozených čísel). To ale ještě neznamená, že by tím byla narušena Hilbertova teze: „stačilo“ by axiomatizovat nejen teorii grup, ale současně i teorii přirozených čísel (aspoň ty vlastnosti, které potřebujeme pro teorii periodických grup), jenže komu z matematiků by se do toho chtělo pouštět? Podobně by tomu bylo třeba s teorií vektorových prostorů, tam bychom zase potřebovali axiomatizovat reálná čísla. Jiný příklad (viz J. Barwise (ed.), *Handbook of Mathematical Logic*) představuje *úplná* abelovská grupa; požadavek úplnosti zní:

$$\forall n\, \big(n \geqq 1 \rightarrow \forall x\, \exists y\, (ny = x)\big),$$

což opět není formule vyjádřená v logice prvního řádu. Mohli bychom se pokusit to obejít a napsat tento požadavek zvlášť pro každé přirozené číslo $n = 2, 3, \ldots$ ($\forall x\, \exists y\, (2y = x), \ldots$), jenže to bychom dostali nekonečně mnoho axiomů. Napravit se to nedá: lze dokázat, že pojem úplné abelovské grupy není *konečně* axiomatizovatelný v logice prvního řádu.

Takže by se mohlo zdát, že by bylo lépe za základ vzít logiku druhého řádu; jenže ta je neobyčejně komplikovaná a bezpochyby by si nezasloužila označení *elementární*. Tak co zkusit něco mezi? Třeba připustit dva druhy (sorty) objektů, na něž se vztahují kvantifikátory: jedny by se například týkaly přirozených čísel, druhé prvků grupy. Tak se dostane např. „slabá logika druhého řádu“. Slabá logika druhého řádu je pokusem o vytvoření logiky, v níž by bylo možno vyjádřit „konečnost". Stěží bychom ji ale označili jako „elementární" (nezapomeňme, že „elementární" logika si činí nárok být nejen logikou matematiky). Podívejme se teď, proč vlastně je pojem konečna v logice prvního řádu nevyjádřitelný.

V logice prvního řádu můžeme například vyjádřit kvantifikátor, říkající, že „existuje přesně jedno x mající vlastnost φ":

$$\exists x\,\big(\varphi(x)\ \&\ \forall y\,(\varphi(y) \rightarrow y = x)\big)$$

(tato formule říká, že existuje nějaké x, které má vlastnost φ, a že každé y, které má tuto vlastnost, je totožné s x).

Můžeme v ní vyjádřit i kvantifikátor „pro aspoň dvě x platí $\varphi(x)$":

$$\exists x\,\exists y\,(x \neq y\ \&\ \varphi(x)\ \&\ \varphi(y))$$

a podobně i kvantifikátor, který označíme $\exists_{\geqq n}$: $\exists_{\geqq n}\varphi(x)$, říká, že pro aspoň n prvků x platí $\varphi(x)$. Kombinací těchto kvantifikátorů můžeme vyjádřit i výrok „existuje přesně n prvků x majících vlastnost φ":

$$\exists_{\geqq n} x\,\varphi(x)\ \&\ \neg\exists_{\geqq n+1} x\,\varphi(x),$$

což bychom mohli označit například formulí $\exists_n x\,\varphi(x)$. Konečnost bychom pak mohli zapsat jako $\exists n\,\exists_n x\,\varphi(x)$, jenže to není zápis přípustný v logice prvního řádu. To samo o sobě ještě neznamená, že by nemohlo existovat vyjádření přípustné; tuto neexistenci musíme dokázat.

Nastíníme nyní důkaz toho, že v logice prvního řádu nemůžeme vyjádřit kvantifikátor $\mathbf{Q}_0 x\,\varphi(x)$: „nekonečně mnoho x má vlastnost φ" a tudíž ani jeho negaci $\neg\mathbf{Q}_0 x\,\varphi(x)$: „pouze konečně mnoho prvků x má vlastnost φ". Vezměme množinu formulí

$$\{\neg\mathbf{Q}_0 x\,\varphi(x)\} \cup \{\exists_{\geqq n} x\,\varphi(x) : n = 1, 2, 3, \ldots\}.$$

První formule říká, že prvků s vlastností φ je konečně mnoho, zbytek říká, že pro každé n existuje aspoň n prvků s vlastností φ, tedy nekonečně mnoho. To je ale v rozporu, takže tato množina formulí není *splnitelná* (nemá „model"). Každá její konečná podmnožina ale splnitelná je: vezmeme to největší n, které se v ní vyskytuje, přirozeným číslům $1, 2, \ldots, n$ naordinujeme vlastnost φ a máme model a tudíž i splnitelnost.

Jenže logika prvního řádu má vlastnost, které se říká *kompaktnost*: máme-li nějakou množinu vět, jejíž každá konečná podmnožina je splnitelná (má model), pak je splnitelná (má model) i celá tato množina. A to právě náš příklad porušil, takže konečnost (a ani nekonečnost) není v logice prvního řádu vyjádřitelná. Věta o kompaktnosti je důsledkem *věty Löwenheimovy-Skolemovy*, tvrdící, že každá konsistentní (bezesporná) teorie prvního řádu má model. Löwenheimova–Skolemova věta je sama o sobě dosti podivná, protože model, jehož existenci dokazuje, „vyrábí" z této teorie samé a nějaké dané spočetné množiny (třeba přirozených čísel nebo správně utvořených formulí této teorie).

Podobně podivná je tzv. *Löwenheimova vlastnost* logiky prvního řádu: má-li nějaká teorie nekonečný model, pak má spočetný model. A tyto dvě vlastnosti, totiž Löwenheimova vlastnost a kompaktnost plně charakterizují logiku prvního řádu, jak dokázal Lindström. Myslím, že něco takového lze stěží pokládat za uspokojivé zdůvodnění, že elementární logika je totéž co logika prvního řádu. Co je na tom opravdu podivné, je to, že to téměř nikomu, kdo se v takové logice zabydlel, podivné nepřipadá.

Podívejme se teď, co vlastně brání tomu, abychom v logice prvního řádu vyjádřili kvantifikátor „pro nekonečně mnoho". Zkusme to takto:

$$\mathbf{Q}_0 x\,\varphi(x) \;\leftrightarrow\; \exists y\,\big(\varphi(y)\;\&\;\mathbf{I}x\,(\varphi(x), \varphi(x)\,\&\,x \neq y)\big),$$

kde jsme použili další kvantifikátor $\mathbf{I}x\,\big(\varphi(x), \psi(x)\big)$, vyjadřující, že „prvků x splňujících φ je stejně jako prvků x splňujících ψ", čili označíme-li si $\Phi = \{x : \varphi(x)\}$ a $\Psi = \{x : \psi(x)\}$, pak existuje vzájemně jednoznačné zobrazení Φ na Ψ. Jinými slovy, Φ a Ψ mají stejnou mohutnost. V uvedené formuli je kvantifikátor **I** použit k vyjádření toho, že existuje vzájemně jednoznačné zobrazení Φ na $\Phi - \{y\}$, což vyjadřuje nekonečnost Φ.

Tento kvantifikátor **I** ovšem také nelze vyjádřit v logice prvního řádu, to už víme. Ale my se ptáme: proč? Vezměme napřed jen tuto větu: „existuje prosté zobrazení z Φ do Ψ". Část tohoto tvrzení, která hovoří o existenci zobrazení, lze vyjádřit docela dobře:

$$\forall x\, \exists y\, \big(\varphi(x) \to \psi(y)\big).$$

Potíž jsme už lokalizovali: musí být ve slově „prosté". Co to znamená? Že ke každému x existuje y, a to tak, že když si vezmu nějaké další u a (to) v, které k němu existuje, tak musí platit

$$x \neq u \;\leftrightarrow\; y \neq v,$$

čili jednodušeji

$$x = u \;\leftrightarrow\; y = v.$$

Proč to ale nelze zapsat v logice prvního řádu? Teď přijde klíčový moment: říkáme zde totiž:

$$\forall x\, \exists y \text{ **a nezávisle na tom** } \forall u\, \exists v, \text{ že} \ldots$$

což můžeme zapsat třeba také takto:

$$\left.\begin{matrix} \forall x\, \exists y \\ \forall u\, \exists v \end{matrix}\right\} \;\pi(x, y, u, v).$$

To je nový kvantifikátor, kterého si poprvé všiml už (nebo až?) v roce 1961 Henkin. (A hned dodám, že výše uvedený trik s „prostým zobrazením", který ještě rozvedu, pochází od Ehrenfeuchta.) Označme si tento „Henkinův kvantifikátor" **H**; budeme tedy psát $\mathbf{H}xyuv\;\pi(x, y, u, v)$. Pak výrok „existuje prosté zobrazení z Φ do Ψ" (čili že mohutnost Φ je menší nebo rovna mohutnosti Ψ) vyjádříme takto:

$$\mathbf{H}xyuv\,\big(x = u \;\leftrightarrow\; y = v \;\&\; \varphi(x) \to \psi(y)\big).$$

To, co jsem právě napsal, vyjadřuje „méně nebo stejně než“ a pomocí toho už vyjádříme „stejně jako“, čili kvantifikátor **I** a nakonec i kvantifikátor $\mathbf{Q}_0$ — „pro nekonečně mnoho“.

To není nějaká zajímavost, podivnost, hlavolam. Myslím si, že je to moc vážná věc. Možnost říci něco tak jednoduchého, jako: ke každému x existuje y a *nezávisle* ke každému u existuje v, je tak jednoduchá a přirozená, že si nedovedu představit důvody (rozumějte: jsem přesvědčen, že žádné rozumné důvody ani neexistují), proč by se měla vyloučit z *elementární logiky*. A viděli jsme dále, že přidáme-li tuto možnost (tj. Henkinův kvantifikátor a nezávislost vůbec) k tomu, co si dosud nárokovalo označení „elementární“ logika, dostaneme logiku, které nebudeme moci upřít označení „elementární“ (nepoužívá žádné jiné pojmy ani prostředky než dosavadní predikátový kalkulus prvního řádu — s výjimkou „nezávislosti“) a která je přinejmenším tak silná, že umí vyjádřit „pro nekonečně mnoho“, „pro více“, „pro stejně“ (a která je ještě podstatně silnější). A co je podstatné: zmizí z ní všechny podivnosti logiky prvního řádu: nespočetné modely přirozených čísel, věta o kompaktnosti, Löwenheimova vlastnost a zřejmě mnoho dalších.

Vezmu to ještě jednou tvrději: před nějakými devadesáti lety někdo ve svatém nadšení pro matematickou logiku seřadil kvantifikátory tak nešťastně, že si vynutil jejich závislost (myslím si, že to nebyl Frege, spíše bych tipoval Russella, ale špatně se to dokazuje a ostatně je to už promlčené). A tento historický omyl *vynutil* jako artefakty všelijaké podivnosti, kterými se logika zabývala, těšila a pyšnila v následujících desetiletích. A ještě se z toho vyvozovaly všelijaké filosofické a protifilosofické závěry.

Položím otázku ještě jednou: jaké rozumné důvody by bylo možno uvést proti nezávislosti kvantifikátorů? Nebo obráceně: lze uvést nějaké vážné důvody pro jejich „lineární“ zápis a vynucenou závislost? Je matematická logika výsledkem „přehlédnutí“? A co vůbec je elementární logika? Co když se ukáže, že je logika s nezávislými kvantifikátory jednodušší a adekvátnější (jak tvrdí Hintikka, který už oznámil překvapivý výsledek: možnost definovatelnosti pravdivosti *v* jazyku takové logiky. Viz: Jaakko Hintikka: *Defining truth, the whole truth and nothing but truth*, in: Jaakko Hintikka: *Lingua Universalis vs. Calculus Ratiocinator*, Kluwer Academic Publishers, 1997)?

Po Popperovi, Lakatosovi, Kuhnovi, Feyerabendovi jsme si už na revoluce (změny paradigmat) zvykli. Ale revoluce v logice? Bude další vývoj sledovat strukturu všech vědeckých revolucí, tj. budou zastánci „staré logiky“ vymýšlet všelijaké triky, epicykly, ad hoc dodatky na její záchranu?