Jozef Kvasnica

Jednotková struktura fyzikálních vzorců

*Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, Vol. 36 (1991), No. 2, 106--115

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139669

[41] Trojanová, Z., Lukáč, P., Chmelík, F., in: Proc. 5th Int. Congress on Heat Treatment of Materials, Budapest, Sci. Soc. Mech. Engn. 1986, Vol. *III*, s. 1885.
[42] Varin, R. A., Kurzydlowski, K. J., Tangri, K.: Mat. Sci. Eng. *85* (1987), 115.
[43] Ball, A., Hutchinson, M. M.: Met. Sci. J. *3* (1969), 1.
[44] Langdon, T. G.: Phil. Mag. *22* (1970), 689.
[45] Mukherjee, A. K.: Mat. Sci. Eng. *8* (1971), 83.
[46] Kaibyshev, O. A., Valiev, R. Z., Emaletdinov, A. K.: Phys. stat. sol. (a) *9* (1985), 197.
[47] Wakai, F., Sakaguchi, S., Matsuno, Y.: Adv. Ceram. Mat. *1* (1986), 259.
[48] Wakai, F., Kato, H.: Adv. Ceram. Mat. *2* (1987), 71.
[49] Nieh, T. G., McNally, C. M., Wadsworth, J.: Scripta Metall. *22* (1988), 1297.
[50] Nieh, T. G., McNally, C. M., Wadsworth, J.: Scripta Metall. *23* (1989), 457.

# Jednotková struktura fyzikálních vzorců

*Jozef Kvasnica, Praha*

## 1. Úvod

Fyzikální vzorce představují závislost nějakého jevu na veličinách, které jsou pro vznik a průběh tohoto jevu rozhodující. Tyto závislosti se zpravidla odvozují ze základních přírodních zákonů, např. z pohybových rovnic mechaniky, hydrodynamiky, teorie pružnosti, elektrodynamiky a kvantové teorie. Takový postup je však matematicky náročný (vyžaduje řešení diferenciálních rovnic), a tedy pro středoškolskou výuku fyziky nepoužitelný. Na druhé straně se řada těchto vztahů ve středoškolské fyzice vyskytuje ve formě „zjevených pravd", tedy způsobem, jakým bychom fyziku vyučovat neměli.

V tomto příspěvku chceme upozornit na alternativní metodu, která umožňuje vyjasnit řadu závislostí jednoduchou jednotkovou analýzou veličin ovlivňujících zkoumaný jev. Hlavním problémem při tom zůstává „uhodnutí" těch rozhodujících veličin. Výběr těchto rozhodujících veličin je – jak chceme ukázat – výbornou školou kritického fyzikálního myšlení. Nezvolíme-li správně ty rozhodující veličiny, pak dostaneme závislost, která musí vzbudit podezření i u podprůměrného žáka.

Dříve než přejdeme k obecné formulaci této metody, vyložíme „karty na stůl" tím, že vysvětlíme její podstatu na jednoduchém známém příkladě. Chceme stanovit závislost doby kmitu $T$ matematického kyvadla na parametrech, které mohou tuto dobu ovlivňovat. Snadno uhodneme, že to může být tíhové zrychlení $g$ v daném místě a délka $l$

Prof. RNDr. Jozef Kvasnica, DrSc. (1930) pracuje na katedře matematické fyziky MFF UK, V Holešovičkách 2, 180 00 Praha 8.

závěsu kyvadla. Zachováme opatrnost a budeme předpokládat, že doba kmitu $T$ závisí také na hmotnosti kyvadla. Hmotnost budeme označovat symbolem $\mu$, aby nedocházelo k záměně se značkou jednotky délky (metr – m), jež se bude v našich úvahách rovněž vyskytovat. Z těchto tří veličin $g, l, \mu$ chceme vytvořit veličinu $T$, jejíž jednotkou je sekunda. Toho můžeme dosáhnout mocninnou závislostí

$$T = kg^{\alpha}l^{\beta}\mu^{\gamma},$$

kde $k$ je bezrozměrový číselný faktor; mocnitele $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ je nutno volit tak, aby jednotka pravé strany rovnice byla shodná s jednotkou levé strany (s). Jednotku veličiny $X$ budeme značit $[X]$. Jde tedy o řešení úlohy (jednotkovou rovnici)

$$[T] = [g]^{\alpha}[l]^{\beta}[\mu]^{\gamma}. \tag{1}$$

Dosadíme-li na pravé straně jednotky $[g] = \mathrm{m} \,.\, \mathrm{s}^{-2}$, $[l] = \mathrm{m}$, $[\mu] = \mathrm{kg}$, dospějeme k podmínce

$$\mathrm{s} \equiv \mathrm{m}^0 \,.\, \mathrm{kg}^0 \,.\, \mathrm{s}^1 = (\mathrm{m} \,.\, \mathrm{s}^{-2})^{\alpha}\,\mathrm{m}^{\beta}\,\mathrm{kg}^{\gamma} = \mathrm{m}^{\alpha+\beta} \,.\, \mathrm{kg}^{\gamma} \,.\, \mathrm{s}^{-2\alpha}.$$

Porovnáním mocnitelů stejných jednotek (m, kg, s) dostaneme podmínky pro mocnitele

$$\alpha + \beta = 0\,, \quad \gamma = 0\,, \quad -2\alpha = 1\,,$$

což dá řešení $\alpha = -\beta = -1/2$, $\gamma = 0$. Ve shodě s (1) pak máme vztah

$$T = k(l/g)^{1/2}. \tag{2}$$

Perioda $T$ nezávisí na hmotnosti kyvadla. Poslední rovnice určuje závislost doby kmitu na $g$, $l$. Přesná hodnota numerického koeficientu závisí na počáteční výchylce $\varphi_0$. Pro malé hodnoty $|\varphi_0| \ll 1$ vyjde známý výsledek $k = 2\pi$.

Podstata metody je tedy jednoduchá. Nechť zkoumaná veličina $X$ závisí na veličinách $A, B, C, \ldots$ Z veličin $A, B, C, \ldots$, jejichž jednotky jsou $[A]$, $[B]$, $[C]$, ... je třeba vytvořit veličinu $X$ s jednotkou $[X]$. Toho lze dosáhnout závislostí ($k$ je číselná konstanta)

$$X = kA^{\alpha}B^{\beta}C^{\gamma}\ldots, \tag{3}$$

přičemž mocnitele $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ... volíme tak, aby platila jednotková rovnice

$$[X] = [A]^{\alpha}[B]^{\beta}[C]^{\gamma}\ldots \tag{4}$$

V některých případech lze z $A, B, C, \ldots$ vytvořit bezrozměrnou veličinu (budeme ji značit $\Theta$) takovou, že

$$\Theta = [A]^{\alpha_0}[B]^{\beta_0}[C]^{\gamma_0}\ldots \tag{5}$$

V tom případě je nutno jednoduchou mocninou závislost (3) zobecnit zahrnutím funkce $f(\Theta)$ bezrozměrné veličiny $\Theta$, tj.

$$X = A^{\alpha}B^{\beta}C^{\gamma}\ldots f(\Theta)\,. \tag{6}$$

Bezrozměrný číselný faktor lze zahrnout do $f(\Theta)$.

Tuto jednoduchou metodu budeme aplikovat na řadě příkladů. Dříve než tak učiníme, připravíme si pro účely pozdějších referencí některé potřebné vztahy.

Základní jednotky pro hmotnost, délku a čas nepotřebují vysvětlení. Znovu připomeneme, že hmotnost budeme značit symbolem $\mu$.
Gravitační konstantu

(7) $$\varkappa \doteq 6{,}67 \,.\, 10^{-11}\ \mathrm{N} \,.\, \mathrm{m}^2 \,.\, \mathrm{kg}^{-2}$$

vyjádříme pomocí základních jednotek m, kg, s

(8) $$[\varkappa] = \mathrm{kg}^{-1} \,.\, \mathrm{m}^3 \,.\, \mathrm{s}^{-2} \,.$$

Tlak nebo napětí představuje sílu působící na jednotkovou plochu. Jednotku tlaku $[p] = \mathrm{N} \,.\, \mathrm{m}^{-2}$ vyjádříme pomocí základních jednotek ve tvaru

(9) $$[p] = \mathrm{kg} \,.\, \mathrm{m}^{-1} \,.\, \mathrm{s}^{-2} \,.$$

V elementárním učivu se modul pružnosti v tahu $E$ zavádí pomocí Hookova zákona jako koeficient úměrnosti mezi relativním prodloužením $\Delta l/l$ a působícím tlakem (normálovým napětím)

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{p}{E} \,.$$

Odtud plyne

(10) $$[E] = \mathrm{kg} \,.\, \mathrm{m}^{-1} \,.\, \mathrm{s}^{-2} \,.$$

Ve viskozní kapalině dochází k vnitřnímu tření mezi jednotlivými vrstvami proudící kapaliny. Toto vnitřní tření kapaliny můžeme chápat jako tečné napětí mezi jednotlivými vrstvami proudící kapaliny. Nechť $\Delta v$ značí změnu velikosti rychlosti kapaliny a nechť $\Delta H$ je vzdálenost (kolmá ke směru proudění) mezi dvěma vrstvami kapaliny. Z měření plyne, že tečné napětí je přímo úměrné $\Delta v/\Delta H$, tj.

$$\sigma_s = \eta(\Delta v/\Delta H) \,.$$

Jednotku koeficientu úměrnosti (dynamické viskozity $\eta$) odvodíme z toho, že jednotka $\sigma_s$ je shodná s jednotkou tlaku, $[\sigma_s] = [p]$. Odtud plyne

(11) $$[\eta] = \mathrm{kg} \,.\, \mathrm{m}^{-1} \,.\, \mathrm{s}^{-1} \,.$$

Podíl dynamické viskozity $\eta$ k hustotě $\varrho$ se nazývá kinematickou viskozitou a označuje se symbolem $\nu$

(11′) $$\nu = \eta/\varrho \,, \quad [\nu] = \mathrm{m}^2 \,.\, \mathrm{s}^{-1} \,.$$

V elektrodynamice se setkáváme s rychlostí světla ve vakuu

(12) $$c \doteq 3 \,.\, 10^8\ \mathrm{m} \,.\, \mathrm{s}^{-1}$$

a s permitivitou vakua

$$\varepsilon_0 \doteq 8{,}854 \,.\, 10^{-12}\ \mathrm{C}^2 \,.\, \mathrm{N}^{-1} \,.\, \mathrm{m}^{-2} \,.$$

Poněvadž náboje $Q_1$, $Q_2$ vystupují v kombinaci $Q_1Q_2/(4\pi\varepsilon_0)$, z Coulombova zákona $F = Q_1Q_2/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$ získáme

(13) $$\left[\frac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\right] = \mathrm{kg} \,.\, \mathrm{m}^3 \,.\, \mathrm{s}^{-2} \,.$$

V moderní kvantové teorii se místo původní Planckovy konstanty $h$ užívá tzv. redukovaná konstanta

$$\hbar \equiv \frac{h}{2\pi} \doteq 1{,}05 \,.\, 10^{-34}\,\mathrm{J}\,.\,\mathrm{s}\,, \tag{14}$$

$$[\hbar] = \mathrm{kg}\,.\,\mathrm{m}^2\,.\,\mathrm{s}^{-1}\,. \tag{15}$$

Po těchto přípravných úvahách přejdeme ke konkrétním aplikacím.

## 2. Mechanika

Úvodní příklad s dobou kmitu matematického kyvadla doplníme důkazem, že kromě závislosti (2) se žádná jiná závislost doby kmitu na $l$ a $g$ nemůže vyskytnout. K tomu potřebujeme dokázat, že z veličin $l$, $g$, $\mu$ nelze vytvořit bezrozměrnou veličinu. Položíme-li

$$\Theta = g^{\alpha_0} l^{\beta_0} \mu^{\gamma_0}\,,$$

$$[\Theta] \equiv \mathrm{kg}^0\,.\,\mathrm{m}^0\,.\,\mathrm{s}^0 = [\mathrm{m}\,.\,\mathrm{s}^{-2}]^{\alpha_0}\,[\mathrm{m}]^{\beta_0}\,[\mathrm{kg}]^{\gamma_0}\,,$$

pak rovnice pro exponenty $\alpha_0 + \beta_0 = 0$, $-2\alpha_0 = 0$, $\gamma_0 = 0$ mají jediné řešení $\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = 0$, čímž je důkaz proveden.

Jako další příklad budeme uvažovat dobu oběhu $T$ planety s hmotností $\mu$ v gravitačním poli Slunce (hmotnosti $\mu_s$) ve vzdálenosti $R$ od Slunce. Dráhy planet se jen málo odlišují od kružnic, proto budeme pro jednoduchost považovat dráhu za kružnici. Poněvadž jde o pohyb v gravitačním poli, je přirozené očekávat, že vzorec by měl obsahovat gravitační konstantu $\varkappa$. Dá se rovněž očekávat, že doba oběhu závisí na celkové hmotnosti $\mu + \mu_s$ soustavy. U všech planet je $\mu \ll \mu_s$, takže jde fakticky o závislost na převládající hmotnosti centrálního tělesa. Po těchto úvahách položíme

$$T = kR^{\alpha}\varkappa^{\beta}(\mu + \mu_s)^{\gamma}\,. \tag{16}$$

Po dosazení jednotek „zúčastněných" veličin dostaneme

$$\mathrm{s}^1 = \mathrm{m}^{\alpha}\,(\mathrm{kg}^{-1}\,.\,\mathrm{m}^3\,.\,\mathrm{s}^{-2})^{\beta}\,\mathrm{kg}^{\gamma} = \mathrm{kg}^{\gamma-\beta}\,.\,\mathrm{m}^{\alpha+3\beta}\,.\,\mathrm{s}^{-2\beta}\,.$$

Rovnice $\gamma - \beta = 0$, $\alpha + 3\beta = 0$, $-2\beta = 1$ mají řešení $\alpha = 3/2$, $\beta = \gamma = -1/2$, což vede k hledané závislosti

$$T = kR^{3/2}\,\{\varkappa(\mu + \mu_s)\}^{-1/2}\,. \tag{17}$$

Přesný výpočet (řešení pohybové diferenciální rovnice) dá pro číselný koeficient $k = 2\pi$. Avšak i bez určení této číselné konstanty poznáváme v (17) třetí Keplerův zákon

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{k^2}{\varkappa(\mu + \mu_s)} \doteq \frac{k^2}{\varkappa\mu_s} = \text{konst.}$$

Zde jsme pro konkrétnost mluvili o pohybu planet sluneční soustavy. Stejné výsledky však platí i pro pohyb měsíců planet a umělých kosmických družic. Ještě poznamenáme, že z $R$, $\varkappa$, $\mu + \mu_s$ nelze vytvořit bezrozměrnou veličinu.

## 3. Kapaliny a pružná tělesa

Začneme odhadem závislosti rychlosti zvuku $v$ v (klidové) ideální kapalině na parametrech kapaliny. Při konstantní teplotě „máme k dispozici" tlak $p$ a hustotu $\varrho$ kapaliny (stavová rovnice). Položíme proto

$$v = kp^\alpha \varrho^\gamma .$$

Pomocí vztahů $[v] = \mathrm{m} \,.\, \mathrm{s}^{-1}$, $[p] = \mathrm{kg} \,.\, \mathrm{m}^{-1} \,.\, \mathrm{s}^{-2}$, $[\varrho] = \mathrm{kg} \,.\, \mathrm{m}^{-3}$ dostaneme koeficienty $\alpha = -\gamma = 1/2$, takže je

$$v = k(p/\varrho)^{1/2} . \tag{18}$$

Přesná hodnota číselného koeficientu závisí na termodynamických vlastnostech kapaliny; ve většině případů je $k \doteq 1$.

Budeme hledat odporovou sílu $F$ (sílu tření) působící na tuhou kuličku (poloměru $R$) pohybující se rychlostí $v$ ve viskozní kapalině (s dynamickou viskozitou $\eta$).

Ve shodě s jednotkovou analýzou položíme

$$F = kR^\alpha \eta^\beta v^\gamma . \tag{19}$$

Po dosazení

$$\mathrm{kg}^1 \,.\, \mathrm{m}^1 \,.\, \mathrm{s}^{-2} = \mathrm{m}^\alpha (\mathrm{kg} \,.\, \mathrm{m}^{-1} \,.\, \mathrm{s}^{-1})^\beta (\mathrm{m} \,.\, \mathrm{s}^{-1})^\gamma$$

získáme pro $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ rovnice $\beta = 1$, $\alpha - \beta + \gamma = 1$, $\beta + \gamma = 2$, takže je $\alpha = \beta = \gamma = 1$, tj.

$$F = k\eta R v . \tag{20}$$

Tento vztah (s koeficientem $k = 6\pi$) je známý Stokesův vzorec, jehož odvození z rovnic hydrodynamiky (Navierovy-Stokesovy rovnice) je značně složitým úkolem. Jednoduchá jednotková analýza poskytuje základní vlastnosti jevu: lineární závislost na dynamické viskozitě kapaliny, rozměru a rychlosti kuličky.

Použijeme tento příklad k tomu, abychom ukázali, k jakým důsledkům to vede, kdybychom místo $R$, $\eta$, $v$ zvolili jiné rozhodující veličiny. Předpokládejme, že třecí síla $F$ závisí (kromě $\eta$, $v$) na hustotě $\varrho$ kuličky. Z předpokladu $F = k\varrho^\alpha \eta^\beta v^\gamma$ nám jednotková rovnice poskytne vztahy

$$1 = \alpha + \beta , \quad 1 = -3\alpha - \beta + \gamma , \quad -2 = -\beta - \gamma .$$

Mělo by tedy být $\alpha = -1$, $\beta = 2$, $\gamma = 0$, resp. $F = k\varrho^{-1}\eta^2$. Za takového předpokladu by tedy třecí síla nezávisela na rychlosti. Každý žák však z vlastní zkušenosti ví, že při pohybu tělesa v kapalině roste odporová síla s rychlostí tělesa. Z toho pak plyne nesprávnost výchozího předpokladu $F = k\varrho^\alpha \eta^\beta v^\gamma$.

Na závěr této kapitoly odvodíme vzorec pro rychlost $v$ zvuku v tenké pružné tyči. „K dispozici" máme hustotu $\varrho$ tyče a modul $E$ pružnosti v tahu. Ve vztahu $v = kE^{\alpha}\varrho^{\beta}$ užijeme pro $[E]$ vztahu (10). Stejným postupem jako v předešlých případech dostaneme $\alpha = -\beta = 1/2$, tj.

$$v = k(E/\varrho)^{1/2} . \tag{21}$$

Přesná dynamická teorie poskytuje pro numerický koeficient $k = 1$.

## 4. Elektrodynamika a kvantová teorie

Metodou jednotkové analýzy lze překvapivě jednoduše odvodit řadu vzorců z elektrodynamiky a kvantové teorie. Uvedeme to na příkladě dvou vzorců, které se sice ve středoškolském učivu nevyskytují, i když se skrytě či mlčky na nich výklad zakládá.

Prvním je Rutherfordův vzorec pro rozptyl $\alpha$-částic na atomovém jádře. Nejdříve si připomeneme některé pojmy a veličiny, které se budou ve výkladu vyskytovat. Budeme zkoumat pružný rozptyl nabité částice s nábojem $Q_1$ a hmotností $\mu$ na silovém poli vytvořeném nábojem $Q_2$. Při experimentálním studiu se sleduje rozptyl svazku stejných částic dopadajících na silové centrum (terčík) se stejnou rychlostí $v$. V Rutherfordových pokusech to byl kolimovaný (usměrněný) svazek $\alpha$-částic emitovaný radioaktivním zdrojem; terčíkem byla jádra atomů zlaté fólie postavené kolmo do cesty svazku $\alpha$-částic. Při rozptylu (vychýlení svazku) se sleduje počet částic $\mathrm{d}N = n\,\mathrm{d}\Omega$ rozptýlených za 1 s (jedním) silovým centrem do prostorového úhlu $\mathrm{d}\Omega$ mezi $\vartheta$, $\vartheta + \mathrm{d}\vartheta$. (V elementárním výkladu lze užít konečných diferencí $\Delta N$, $\Delta\Omega$.) Vydatnost (intenzitu) svazku ($j$) charakterizujeme počtem částic dopadajících za 1 s na jednotkovou plochu (1 m$^2$) postavenou kolmo k dopadajícímu svazku. Z definice plynou vztahy

$$[\mathrm{d}N] = \mathrm{s}^{-1} , \quad [j] = \mathrm{m}^{-2} . \mathrm{s}^{-1} .$$

Intenzitu rozptylového procesu charakterizuje podíl $\mathrm{d}N/j$ zvaný diferenciální účinný průřez

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{\mathrm{d}N}{j} = \frac{n}{j}\,\mathrm{d}\Omega . \tag{22}$$

Z této definice plyne, že $[\mathrm{d}\sigma] = \mathrm{m}^2$, odtud název průřez.

Potřebujeme určit veličiny, na nichž může záviset $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega = n/j$. Na prvním místě to budou náboje obou částic vystupující v interakčním zákoně v kombinaci $Q_1 Q_2/(4\pi\varepsilon_0)$. Velikost vychýlení bude záviset na hmotnosti $\mu$ nalétající částice (resp. redukované hmotnosti kolidujících částic) a na rozdílu rychlostí částice před srážkou ($\mathbf{v}$) a po srážce ($\mathbf{v}'$), tj. na veličině $\mathbf{V} = \mathbf{v} - \mathbf{v}'$. Ve shodě s ideou jednotkové analýzy položíme

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = k\left(\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^{\alpha} V^{\beta}\mu^{\gamma} . \tag{23}$$

Dosadíme jednotky (viz (13)), čímž dostaneme

$$\mathrm{m}^2 = (\mathrm{kg} . \mathrm{m}^3 . \mathrm{s}^{-2})^{\alpha} (\mathrm{m} . \mathrm{s}^{-1})^{\beta}\, \mathrm{kg}^{\gamma} .$$

Řešení $\alpha = -\gamma = 2$, $\beta = -4$ dosadíme do (23), čímž dostaneme

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = k\left(\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 V^2 \mu}\right)^2 .$$

Upravíme $V^2$. Z trojúhelníku $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}'$, $\boldsymbol{V}$ nám poskytne kosinová věta vztah $V^2 = v^2 + v'^2 - 2v\,v' \cos \vartheta$, kde $\vartheta$ je úhel mezi $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{v}'$ (úhel rozptylu). Poněvadž jde o pružný rozptyl, zachovává se energie nalétávající částice $\frac{1}{2}\mu v^2 = \frac{1}{2}\mu v'^2$, tj. $v = v'$ (rovnoramenný trojúhelník). Je tedy

$$V^2 = 2v^2(1 - \cos \vartheta) = 4v^2 \sin^2 (\vartheta/2) .$$

Ve vzniklém vzorci (při $k = 4$)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4}\left(\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 \mu v^2}\right)^2 \frac{1}{\sin^4 (\vartheta/2)} \tag{24}$$

poznáváme slavný Rutherfordův vzorec s charakteristickou úhlovou závislostí $1/\sin^4 (\vartheta/2)$, preferující rozptyl na malé úhly. Souhlas pozorovaných údajů s teoretickým vzorcem (24) utvrdil Rutherforda v tom, že kladný náboj (a převážná část hmotnosti) atomu je soustředěna v malé centrální části atomu – atomovém jádře. Popis provedení těchto pokusů a jejich interpretace nejsou však předmětem našeho příspěvku, proto odkazujeme čtenáře na příslušnou odbornou literaturu.

Doposud jsme vždy uhodli správné veličiny pro příslušné závislosti. Uvedeme také příklady toho, jak poznáme, že jsme ze závislosti „podezírali" nesprávnou veličinu. Vysvětlíme to na příkladě vzorce pro intenzitu záření náboje $Q$ pohybujícího se libovolně proměnnou rychlostí $v$.

Budeme předpokládat, že intenzita záření $I$ závisí kromě náboje $Q$ také na rychlosti $v$, což zapíšeme vzorcem

$$I = k\left(\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^\alpha v^\beta . \tag{25}$$

Jednotkou intenzity záření $I$ je $\mathrm{W} = \mathrm{J} \,.\, \mathrm{s}^{-1} = \mathrm{kg} \,.\, \mathrm{m}^2 \,.\, \mathrm{s}^{-3}$. Z (25) pak plyne jednotková rovnice

$$\mathrm{kg} \,.\, \mathrm{m}^2 \,.\, \mathrm{s}^{-3} = (\mathrm{kg} \,.\, \mathrm{m}^3 \,.\, \mathrm{s}^{-2})^\alpha (\mathrm{m} \,.\, \mathrm{s}^{-1})^\beta = \mathrm{kg}^\alpha \,.\, \mathrm{m}^{3\alpha+\beta} \,.\, \mathrm{s}^{-2\alpha-\beta} .$$

Z porovnání mocnitele u kg plyne $\alpha = 1$, porovnání ostatních mocnitelů dá další dvě rovnice

$$3\alpha + \beta = 2 , \quad -2\alpha - \beta = -3 .$$

Sečtením těchto rovnic dostaneme $\alpha = -1$, což je spor s první rovnicí. Z toho plyne poučení, že intenzitu záření pohybujícího se náboje nelze vyjádřit závislostí (25). Zkusíme zachránit situaci zahrnutím elektrodynamické konstanty – rychlosti světla $c$, tj. závislostí

$$I = k\left(\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^\alpha v^\beta c^\gamma . \tag{26}$$

Stejným postupem jako v předešlém případě dostaneme pro $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ podmínky

$$\alpha = 1, 3\alpha + \beta + \gamma = 2, \quad -2\alpha - \beta - \gamma = -3 .$$

Sečtením druhé a třetí rovnice dostaneme opět $\alpha = -1$, což je spor s první rovnicí.

Zkusíme závislost intenzity záření nejen na rychlosti ($v$), ale také na zrychlení ($a$) náboje

$$I = k\left(\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^\alpha v^\beta a^\gamma . \tag{27}$$

Z jednotkové rovnice

$$\mathrm{kg} \,.\, \mathrm{m}^2 \,.\, \mathrm{s}^{-3} = (\mathrm{kg} \,.\, \mathrm{m}^3 \,.\, \mathrm{s}^{-2})^\alpha (\mathrm{m} \,.\, \mathrm{s}^{-1})^\beta (\mathrm{m} \,.\, \mathrm{s}^{-2})^\gamma$$

dostaneme $\alpha = 1$, $\beta = -3$, $\gamma = 2$, a tedy

$$I = k\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a^2}{v^3} . \tag{28}$$

Rovnice pro mocnitele nejsou rozporné, avšak výsledek (28) je fyzikálně neudržitelný, poněvadž s klesající rychlostí náboje ($v \to 0$) by intenzita záření neohraničeně rostla. Příroda bohužel „neobjevila“ takový levný a nevyčerpatelný zdroj energie, proto musíme dále hledat vzorec pro intenzitu záření.

Z předchozích nezdarů snadno uhodneme, že záchranu nutno hledat v kompromisu mezi závislostmi (26) a (27), tj.

$$I = k\left(\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^\alpha c^\beta a^\gamma . \tag{29}$$

Z jednotkové rovnice dostaneme $\alpha = 1$, $\beta = -3$, $\gamma = 2$, a tedy

$$I = k\frac{Q^2 a^2}{4\pi\varepsilon_0 c^3} . \tag{30}$$

Tento vzorec již netrpí žádnými viditelnými neduhy. Ke stejné závislosti (s koeficientem $k = 2/3$) se dospěje po složitých výpočtech v teorii elektromagnetického pole.

Pro kmitající náboj s úhlovou frekvencí $\omega$ je zrychlení $a = -\omega^2 x$, takže intenzita záření je přímo úměrná $\omega^4$.

Z kvantové teorie uvedeme některé jednoduché příklady. Za rozcvičku zvolíme určení střední kvadratické výchylky $\overline{x^2}$ lineárního harmonického oscilátoru. V kvantové teorii vždy vystupuje redukovaná Planckova konstanta $\hbar$. Kromě toho „máme k dispozici“ hmotnost $\mu$ a úhlovou frekvenci $\omega$ oscilátoru. Z těchto tří veličin máme sestrojit charakteristickou veličinu s jednotkou kvadrátu délky, tj.

$$\overline{x^2} = k\hbar^\alpha \mu^\beta \omega^\gamma .$$

Z jednotkové rovnice dostaneme $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = -1$. Je tedy

$$\overline{x^2} = k(\hbar/\mu\omega) . \tag{31}$$

Pozoruhodná je nepřímá úměrnost na hmotnosti i frekvenci. Přesná hodnota číselného koeficientu závisí na kvantovém stavu oscilátoru; pro základní stav je $k = 1/2$. Obdobně najdeme střední kvadratickou rychlost $\overline{v^2}$ lineárního harmonického oscilátoru

$$\overline{v^2} = k\hbar^\alpha \mu^\beta \omega^\gamma .$$

Standardním postupem dostaneme mocnitele $\alpha = 1$, $\gamma = -\beta = 1$, takže je

$$\overline{v^2} = k(\hbar\omega/\mu) . \tag{32}$$

V kvantové teorii (vodíkového) atomu vystupují tři charakteristické konstanty: elementární náboj $e \doteq 1{,}6 \, . \, 10^{-19}$ C, hmotnost elektronu $\mu \doteq 9{,}1 \, . \, 10^{-31}$ kg a redukovaná Planckova konstanta $\hbar$. Z těchto tří veličin sestrojíme charakteristický rozměr atomu, tj. veličinu $a_0$

$$a_0 = \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^\alpha \hbar^\beta \mu^\gamma .$$

Po dosazení jednotek dostaneme $\alpha = -1$, $\beta = 2$, $\gamma = -1$. Ve veličině

$$a_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}{\mu e^2} \doteq 0{,}5 \, . \, 10^{-10} \text{ m} \tag{33}$$

poznáme Bohrův poloměr. Veličinu

$$\bar{r} = k a_0 \tag{34}$$

lze interpretovat jako střední poloměr atomu.

Stejným způsobem lze určit střední kvadratickou rychlost $v^2$ elektronu ve vodíkovém atomu. Položíme-li

$$\overline{v^2} = k' \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^\alpha \hbar^\beta \mu^\gamma ,$$

pak pro mocnitele dostaneme $\alpha = -\beta = 2$, $\gamma = 0$, takže je

$$\overline{v^2} = k' \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar}\right)^2 = k' \frac{\hbar^2}{\mu^2 a_0^2} . \tag{35}$$

Při poslední úpravě jsme užili (33). Z vyjádření (35) určíme střední kinetickou energii elektronu ve vodíkovém atomu

$$\bar{E}_k \equiv \tfrac{1}{2}\mu\overline{v^2} = k' \frac{\hbar^2}{2\mu a_0^2} = \frac{k'}{2} \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a_0} .$$

Střední potenciální energii $\bar{E}_p$ odhadneme ve vztahu

$$\bar{E}_p = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \bar{r}} = -\frac{1}{k} \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a_0} .$$

Snadno se dokáže, že při Coulombově interakci je $2\bar{E}_k = -\bar{E}_p$, což vede ke vztahu $kk' = 1$. Pro střední celkovou energii elektronu ve vodíkovém atomu pak platí

$$\bar{E} \equiv \bar{E}_k + \bar{E}_p = \tfrac{1}{2}\bar{E}_p = -\frac{1}{2k}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a_0}\,.$$

Koeficient $k = n^2$, $(n = 1, 2, \ldots)$ odpovídá známým (Bohrovým) hladinám vodíkového atomu.

*Děkuji kolegovi dr. K. Bartuškovi a prof. dr. E. Svobodovi, CSc., za podnětné připomínky k rukopisu.*

Literatura

[1] *Fyzika.* Učebnice pro I.—IV. ročník gymnázií. SPN Praha.
[2] Kvasnica, J. a kol.: *Mechanika.* Academia, Praha 1988.
[3] Kvasnica, J.: *Teorie elektromagnetického pole.* Academia, Praha 1986.

---

# vyučování

## VÍTĚZOVÉ MEZINÁRODNÍCH MATEMATICKÝCH OLYMPIÁD JSOU BUDOUCÍ MATEMATICI

*Matti Lehtinen*

Mezinárodní matematické olympiády (MMO) začaly v roce 1959 v Rumunsku. S jedinou výjimkou jsou tyto soutěže od té doby organizovány každý rok. V průběhu třiceti let se forma soutěže téměř nemění, zvyšuje se však počet zúčastněných zemí.

Jedním z hlavních a proklamovaných cílů MMO a matematických soutěží vůbec je vyhledávat mimořádné matematické talenty. K úspěchu v MMO je potřeba mít jediný druh talentu, totiž schopnost řešit dosti umělé úlohy za podmínek odpovídajících zkoušce. Často lze zaslechnout pochopitelné výhrady, že žádná skutečná situace při tvořivé matematické práci a při aplikacích matematiky se nepodobá situacím běžným při MMO a že talent vhodný pro MMO je možná stejně specializovaný jako směs matematiky zastoupené v jednotlivých úlohách. Existuje přesvědčivý způsob, jak zdůvodnit užitečnost MMO?

Nemáme žádnou všeobecně uznávanou míru pro matematický talent. Přímočará cesta při posuzování úspěchu MMO vede však přes zkoumání, zda se ve skutečnosti soutěžící později stávají matematiky.

Něco se dozvíme při pohledu na asi 200 vítězů prvních devíti olympiád konaných v letech 1959—1967. Jejich účastníci by dnes již měli mít pevné životní postavení. Uvažovat právě tyto olympiády má jednoduchý důvod: jména většiny vítězů z tohoto období jsou uvedena v knížce Morozovové a Petrakova [1].

Ze zeměpisného hlediska představuje tento materiál dosti úzký vzorek. V uvedené době byla MMO soutěží především mezi evropskými socialistickými zeměmi. Několikrát se ještě zúčastnilo Mongolsko a jedenkrát Finsko, Švédsko, Velká Británie, Itálie a Francie.