

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Ivan Dvořák; Jaromír Šiška

Teorie deterministického chaosu a některé její aplikace (1. část)

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 36 (1991), No. 2, 73--91

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/139666>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1991

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Teorie deterministického chaosu a některé její aplikace

1. část

Ivan Dvořák, Jaromír Šiška, Praha

Publikovaný článek vznikl zkrácením a přepracováním sborníku zimní školy „Teorie deterministického chaosu a její aplikace v biologických a lékařských vědách“, pořádané ZP ČSVTS při VÚPs, FgÚ ČSAV a ÚMG ČSAV v dubnu 1987 v Alšovicích [1].

Teorie deterministického chaosu vzbudila v poslední době značný zájem jak mezi matematiky a fyziky, tak i mezi „učeními laiky“. Zčásti to má jistě na svědomí její atraktivní název; pod tímto „prodejním obalem“ se však skrývá mnoho podnětných a zajímavých myšlenek. Ne všechny tyto myšlenky jsou nové, některé z nich lze vystopovat již k Poincarému. Co je však nové, je jejich ucelená syntéza v teorii, která umožňuje principiálně nový přístup ke studiu dějů označovaných do nedávna jako náhodné.

Cílem tohoto příspěvku je podat čtenáři přehled základních myšlenek teorie deterministického chaosu. Literatura v této oblasti narůstá exponenciálně. Chaosem se zabývají nejen odborné stati a monografie [2] – [5] a články v prestižních přehledových časopisech [6] – [10], ale i příspěvky v časopisech populárních, ba dokonce i v denním tisku [11]. Čtenáři nám proto snad odpustí, že se do vymezeného rozsahu nepodařilo zahrnout všechny zajímavé aspekty této stále se rozvíjející teorie. Se zřetelem na vykládané aplikace jsme např. zcela vypustili otázky chaosu v konzervativních systémech.

Matematicky vychází teorie deterministického chaosu z ergodické teorie dynamických systémů. Této teorii jsme již v PMFA věnovali několik příspěvků [12], [13]. V nich lze nalézt podrobnější vysvětlení řady pojmů užívaných v našem příspěvku pouze okrajově.

Použitelnost vyložené teorie budeme ilustrovat na několika příkladech. V důsledku naší specializace jde o příklady z biologicko-lékařské oblasti. Zde se totiž jeví použití deterministického chaosu jako velmi zajímavé a perspektivní. Z dostupné literatury je nicméně patrné, že solidnímu propojení mezi teorií a experimentálními doklady zůstáváme i v této oblasti ještě hodně dlužni. Řada prací se zde dokonce pohybuje po nejisté půdě spekulací. Ponecháme proto na čtenáři, jak dalece po přečtení tohoto článku bude chtít sdílet naše přesvědčení, že teorie deterministického chaosu nalezne při matematickém popisu biologických jevů své pevné místo.

RNDr. IVAN DVOŘÁK, CSc. (1950) je vedoucím Laboratoře aplikované matematiky a bioinženýrství Psychiatrického centra Praha, Ústavní 91, 181 03 Praha 8.

RNDr. JAROMÍR ŠIŠKA, CSc., (1953) je vědeckým pracovníkem MFF UK, Sokolovská 83, 186 00 Praha 8.

1. Úvod

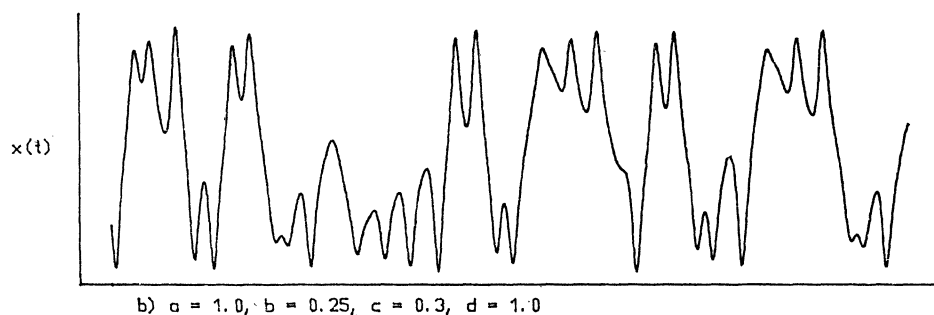
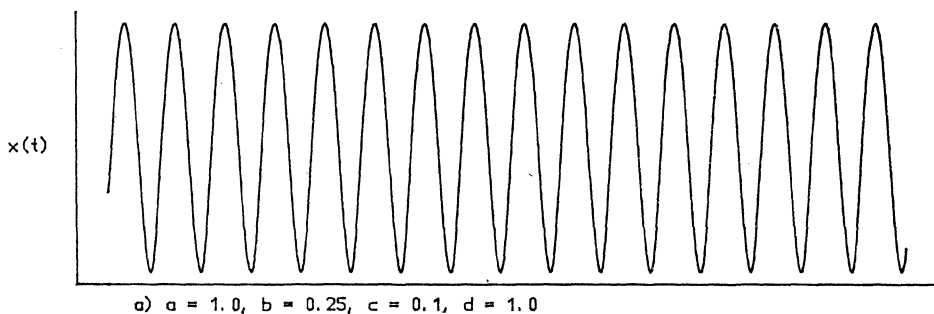
Podívejme se na křivky zobrazené na obrázku 1. Jsou to příklady jednorozměrných signálů. Na první pohled je patrné, že se tyto signály od sebe značně liší. První z nich bychom nejspíše popsali jako „sinusovku” a patrně bychom očekávali, že tato křivka vznikla měřením nějakého „deterministického” jevu. Stejně tak bychom asi neváhali, kdybychom měli předpovědět chování této křivky, definovat fyzikální mechanismus nebo napsat předpis, který by takovou křivku generoval.

Zcela jiná je situace v případě druhé křivky. Rozhodně bychom neuměli určit „deterministický” předpis, který tuto křivku generuje a asi bychom i váhali, zda takový předpis vůbec existuje. Jinými slovy byli bychom nakloněni závěru, že daná křivka vznikla při měření nějakého jevu, který bychom nazvali „náhodným”.

Obě křivky přitom představují řešení Duffingovy rovnice

$$(1) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} - ax + x^3 = c \cos(dt)$$

pro různé hodnoty parametru c . (V prvním případě $c = 0,1$, v druhém $c = 0,3$. Hodnoty ostatních parametrů jsou v obou případech stejné $a = 1,0$, $b = 0,25$, $d = 1,0$).



Obr. 1. Řešení Duffingovy rovnice pro různé hodnoty parametrů (viz text)

Termíny „náhodný“ a „deterministický“ jsme zde použili v obecném smyslu. Tyto pojmy však mají své přesné definice v teorii náhodných procesů. Možnost generování zdánlivě „náhodné“ časové řady prostřednictvím diferenciální (popř. diferenční) rovnice vedla samozřejmě k přehodnocení a značné změně obsahu pojmů „deterministický“ a „náhodný“ (viz např. Takens [14]). Pro procesy řízené „deterministickým“ mechanismem nebo předpisem a vykazující jakoby „náhodné“ chování se začal razit termín „chaotické“. V současné době je situace bohužel taková, že uvedené termíny bývají v různých disciplínách a publikacích interpretovány různě, někdy přímo protichůdně. Cílem tohoto příspěvku není řešit terminologické problémy. Přidržíme se proto obecně intuitivního chápání pojmů „deterministický“ a „náhodný“ i velmi vágně vymezeného pojmu „chaotický“ a teprve v průběhu výkladu vymezíme, jak tyto pojmy přesně chápeme.

Z tvaru druhé křivky na obr. 1 vidíme, že řešení rovnice (1) může být velmi komplikované. Nezbytnou podmínkou této komplikovanosti je nelinearita rovnice (1). Studium takových složitých řešení se v poslední době věnuje značná pozornost; matematická teorie, do které toto studium spadá, se obvykle nazývá nelineární dynamika. V užším smyslu studia chaotických řešení se často setkáme i s pojmem „teorie deterministického chaosu“.

Ze složitého tvaru druhé křivky na obr. 1 je patrné, že tento tvar sám o sobě nebude dobrým startovním bodem pro detailní úvahy. Spíše se zdá výhodné nalézt metody, kterými by se dané řešení dalo „globálně“ nebo „kvalitativně“ charakterizovat. Tato charakterizace může být jen stěží založena na geometrických úvahách — komplikovanost řešení to téměř vylučuje. Výhodnější se proto zdá charakterizace založená na metodách využívajících statistické vlastnosti studovaného řešení. Tyto metody nabízí ergodická teorie.

2. Dynamické systémy

Při chaotické interpretaci měřeného signálu předpokládáme existenci deterministického mechanismu určujícího beze zbytku jeho průběh. V abstraktní rovině popisujeme tento mechanismus pomocí matematického modelu, nazývaného obecně *diferencovatelný dynamický systém*. Dynamické systémy mohou být buď spojité, nebo diskrétní. Příkladem spojitého dynamického systému je soustava obyčejných diferenciálních rovnic

$$(2) \quad \frac{dx}{dt}(t) = F(x(t), \lambda),$$

kde $x(t)$ je K -rozměrná vektorová funkce $x(t) \in \mathbb{R}^K$ času a $\lambda \in \mathbb{R}^L$ je vektor parametrů. O funkci F (K -rozměrná vektorová funkce $K + L$ argumentů) předpokládáme, že je dostatečně hladká.

Příkladem diskrétního deterministického systému je soustava diferenčních rovnic

$$(3) \quad x_{n+1} = F(x_n, \lambda),$$

kde x je vektorová funkce popisující stav systému v diskrétních časových okamžicích označených indexem n ; F a λ mají stejné vlastnosti jako v předchozím případě.

Předpoklad hladkosti funkce F je ve většině případů přijatelný, neboť je pouze matematickým vyjádřením faktu, že fyzikální veličiny bývají spojité.

Vyřešením rovnic (2) nebo (3) získáme nelineární evoluční operátory f^t , kde t je reálné nebo celé. Tyto operátory zobrazují fázový prostor M do sebe. Připomeňme, že fázový prostor je prostor všech možných stavů modelovaného systému. Bývá to většinou n -rozměrný vektorový prostor, nejčastěji euklidovský prostor R^n . Někdy je výhodnější pracovat s obecnějším prostorem (varietou), jako je například povrch koule, tj. sféra nebo povrch válce. Nelineární operátor f^t potom proměnné x z fázového prostoru M , jež reprezentuje počáteční stav systému, přiřadí hodnotu $f^t x$, což je veličina popisující stav systému v čase t . Pro tyto (obecně nelineární) operátory platí

$$f^0 = \text{identita}, f^s \circ f^t = f^{s+t}.$$

Z praktických důvodů je při studiu signálů důležitá jejich *reprodukovatelnost*, tj. zjištění nakolik se daný signál liší při opakované registraci vycházející ze stejného počátečního stavu. Reálné signály (kromě těch nejjednodušších) mají i při stejném výchozím stavu většinou různý průběh. Při pravděpodobnostním popisu náhodného procesu vyplývá neopakovatelnost celkem průhledně z faktu, že jednotlivé hodnoty měřeného signálu se chápou jako náhodné veličiny. Jak je tomu však u deterministických dynamických systémů? Z teorie diferenciálních (případně diferenčních) rovnic víme, že pro jejich řešení je nutno zadat počáteční podmínku. U autonomních diferenciálních rovnic určuje tato podmínka většinou hodnotu řešení v čase $t = 0$

$$(4) \quad x(0) = x.$$

U diferenčních rovnic určuje tato podmínka hodnotu nulté iterace

$$(5) \quad x_0 = x.$$

Pro danou počáteční podmínku x je potom řešení soustavy rovnic vždy stejné.

Zdálo by se tedy, že u deterministických dynamických systémů nemůže nastat „ne-reprodukovatelnost“, kterou tak často pozorujeme u reálných signálů. Toto zdání je však klamné. Podstata problému spočívá v tom, že všechna naše měřicí zařízení pracují s nějakou chybou ε . Počáteční podmínky nemůžeme proto určit nikdy „nekonečně“ přesně. Při všech opakovaných měřeních, která se nám při dané úrovni přesnosti naší měřicí aparatury jeví jako totožná, provádíme vlastně poněkud odlišná měření, jejichž počáteční podmínky se mezi sebou liší o méně než ε . Otázkou potom je, nakolik tato (obvykle velmi malá) nepřesnost ovlivní naše měření?

Vezměme jako příklad spojitý dynamický systém

$$(6) \quad \frac{dx}{dt}(t) = A(\lambda)x(t).$$

Víme, že řešení tohoto systému pro počáteční podmínku (4) je

$$(7) \quad x(t) = e^{A(\lambda)t}x.$$

Nadále uvažujeme pouze řešení pro $t \geq 0$. Toto řešení má různý průběh pro $A(\lambda) > 0$ a pro $A(\lambda) < 0$. Ve druhém případě pro $t \rightarrow \infty$, konverguje $x(t)$ k nule.

V případě, že počáteční podmínka by byla nikoli x , ale $x + \varepsilon$, bude řešení (7)

$$(8) \quad x'(t) = e^{A(\lambda)t}(x + \varepsilon), \quad (A(\lambda) < 0).$$

Podíváme-li se pak, jak vypadá rozdíl $\Delta(t)$ mezi oběma řešeními v časovém okamžiku t , dostaneme

$$(9) \quad \Delta(t) = x(t) - x'(t) = \varepsilon e^{A(\lambda)t}.$$

Velikost tohoto rozdílu s rostoucím časem exponenciálně klesá a obě řešení se k sobě přibližují. Řečeno jinými slovy, vliv nepřesnosti počátečních podmínek s rostoucím časem mizí. Navíc, jak je ze vztahu (9) patrné, rozdíl mezi oběma řešeními je vždy menší než nepřesnost našeho měření ε , tj. obě řešení se nám jeví jako totožná.

Situace by však byla zcela jiná v případě $A(\lambda) > 0$. Počáteční chyba by se v rostoucím časem zvětšovala exponenciálně a brzy by dosáhla makroskopických rozměrů. Takový systém nemá ovšem dobrý fyzikální smysl.

Na základě uvedených úvah můžeme již říci, jak by musel vypadat deterministický dynamický systém, který by vykazoval nereprodukovatelnost svých měření. Musel by to být systém „globálně“ omezený (tj. jeho řešení by zůstávala uvnitř jistých mezí), ale takový, aby „lokálně“ počáteční chyba jeho měření s rostoucím časem narůstala. Jednoduchou úvahou se však přesvědčíme, že tyto požadavky současně splnit nemůže žádný lineární dynamický systém.

Skutečnost, že nelineární dynamické systémy generovat chaotické (tj. nedeterministické) signály mohou, dlouho unikala obecné pozornosti (i když ji patrně znal již Poincaré koncem minulého století). V důsledku toho se experimentálně měřené signály typu signálu z obr. 1.b interpretovaly jako signály náhodné a studovaly se pomocí pravděpodobnostních modelů. Výlučnost tohoto přístupu byla však otřesena počátkem šedesátých let.

3. Lorenzovy rovnice

Roku 1963 publikoval E. Lorenz v *Journal of Atmospheric Sciences* [15] model konvekce a přenosu tepla v zemské atmosféře. Jeho původním cílem bylo přispět k počítačové predikci počasí. Dnes se tento článek považuje za startovní bod teorie deterministického chaosu; jeho teoretický dopad nakonec zcela zastínil jeho význam pro meteorologii.

Při svém odvození Lorenz předpokládal, že atmosféra je vrstva tekutiny zahřívána velmi vzdáleným zdrojem, který způsobuje teplotní gradient mezi horní a spodní hranicí vrstvy. Použitím základních fyzikálních vztahů a zákonů, jako jsou Navierovy-Stokesovy rovnice, rovnice vedení tepla a rovnice kontinuity toku, odvodil (poměrně složitou) soustavu parciálních diferenciálních rovnic pro dvě závislé proměnné – odchylku teploty v daném místě od teploty dané lineárním teplotním profilem a rychlostní potenciál. Nezávislými proměnnými byly prostorové souřadnice a čas. Již při jejich

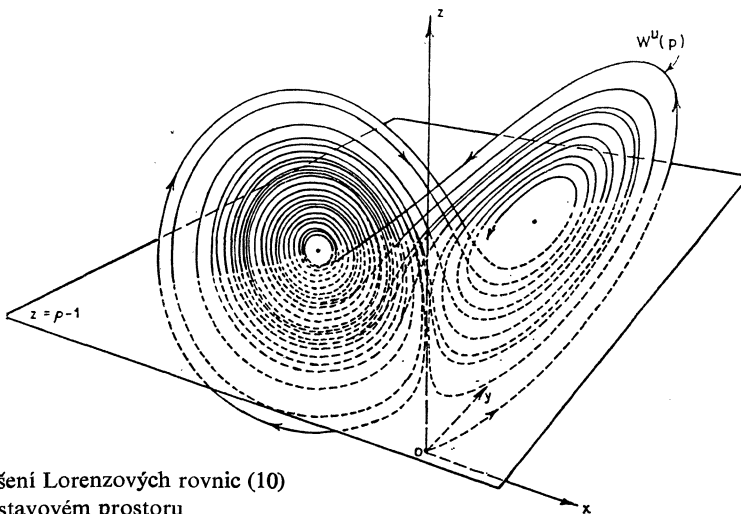
odvozování byla použita řada fyzikálně smysluplných aproximací; Lorenz však pokračoval dále. Rozvinul zmíněné závislé proměnné do sinové a kosinové řady v prostorových proměnných a zanedbal všechny vyšší členy tak, že v rozvoji pro obě proměnné zůstaly pouze tři nezávislé koeficienty (funkce času) X , Y a Z . Dosazením vytvořených rozvojų do původní soustavy parciálních diferenciálních rovnic získal nakonec pro tyto koeficienty soustavu těchto tří obyčejných diferenciálních rovnic:

$$(10) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= -\sigma X + \sigma Y, \\ \frac{dy}{d\tau} &= -XZ + rX - Y, \\ \frac{dz}{d\tau} &= XY - bZ, \end{aligned}$$

kde τ je normalizovaný čas, σ je Prandtlovo číslo a r a b jsou řídicí parametry. Tato soustava se dnes běžně nazývá Lorenzovy rovnice.

Sama o sobě soustava (10) není ničím pozoruhodná; k překvapením došlo až při jejím řešení. Přesto, že jde o poměrně slabě nelineární soustavu, nepodařilo se ji vyřešit analyticky. Numerická řešení ukázala, že soustava (10) – navzdory své zdánlivé jednoduchosti – má neobyčejně pestrou paletu složitých řešení. Její kvalitativní analýza ukazuje, že pro některé hodnoty parametrů σ , r , b konverguje řešení pro $t \rightarrow \infty$ k časově nezávislému stacionárnímu stavu, pro jiné hodnoty parametrů toto řešení osciluje. Pro další hodnoty parametrů ($\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r > 24,7368$) má řešení zcela nepredikovatelný průběh.

Řešení rovnic ve stanoveném prostoru (x, y, z) zobrazuje obr. 2. Z něho je patrné, že toto řešení neodpovídá tomu, co bychom od „slušné“ soustavy diferenciálních rovnic očekávali.



Obr. 2. Řešení Lorenzových rovnic (10) ve stavovém prostoru ($\beta = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$)

Změníme-li jen velmi málo počáteční podmínky řešení rovnice (10), změní se zcela nalezené řešení. Setkáváme se tak s jevem, který se nazývá *citlivá závislost na počátečních podmínkách*. Díky těmto vlastnostem se Lorenzovy rovnice staly prvním teoretickým příkladem procesů, které jsme v předchozím odstavci nazvali chaotickými.

4. Disipace, atrahující množiny a atraktory

Pojem disipativního systému jako systému, který něco rozptyluje a tedy také ztrácí, je intuitivně jasný. Většinou jde o rozptyl energie; důsledkem toho je, že systém kontrahuje objem stavového prostoru. (Opakem disipativních systémů jsou systémy konzervativní, v nichž k rozptylu energie nedochází; příklady takových systémů najdeme v učebnicích klasické mechaniky – jsou to například planetární soustavy. Konzervativní systémy objem ve stavovém prostoru zachovávají.) Opomineme-li klasickou mechaniku, převážně se v přírodě setkáváme se systémy disipativními; proto zaměříme pozornost především na ně.

V důsledku kontrakce objemu se disipativní systémy chovají tak, že po uplynutí dostatečně dlouhé doby se chování systému soustředí v okolí relativně malé podmnožiny fázového prostoru anebo přímo na této podmnožině. Nazvěme ji zatím ne zcela přesně atraktor. Přestože systém kontrahuje objem, neznamená to, že kontrahuje délky ve všech směrech. Jak dále uvidíme, v některých směrech mohou být vzdálenosti roztahovány; samozřejmě jen za předpokladu, že ostatní směry jsou kontrahovány tak silně, že celkový objem se v čase zmenšuje. Tento zdánlivě nepodstatný fakt má hluboké důsledky. Díky jemu i v disipativních systémech může být nestabilní chování, a to i na atraktoru. Tato nestabilita se většinou projevuje exponenciálním vzdalováním orbit (s rostoucím časem), které vychází ze dvou libovolně blízkých bodů. Toto exponenciální vzdalování probíhá ve směru roztahování a je podstatou chování, které jsme zaznamenali u Lorenzových rovnic jako citlivou závislost na počátečních podmínkách. Samozřejmě, že exponenciální roztahování může probíhat jen, pokud jsou vzdálenosti malé, protože celkově je atraktor ohraničený.

Formulujme nyní poněkud přesněji pojem atrahující množiny. Předpokládejme, že U je otevřená podmnožina fázového prostoru M . Řekneme, že $A \subset U$ je atrahující množina s fundamentálním okolím U , jestliže

i) pro každou otevřenou $V \supset A$ je $f^t U \subset V$ pro dosti velká t ;

ii) $f^t A = A$ pro všechna t .

Množinu všech stavů, které pro dosti velké t přijdou do fundamentálního okolí U , tj. množinu $\bigcup_{t < 0} f^t(U)$, nazveme oblastí vlivu atrahující množiny A . Jestliže oblast vlivu A je celé M , řekneme, že A je univerzální atrahující množina.

Příklady:

a) Jestliže U je otevřená podmnožina M a uzávěry množin $f^t U$ jsou kompaktní a pro

dosti velká t obsažené v U , pak množina $A = \bigcap_{t \geq 0} f^t U$ je kompaktní atrahující množina s fundamentálním okolím U .

b) Jestliže pro Lorenzovy rovnice je U dostatečně velká koule okolo počátku, např. $U = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 < R^2\}$, pro R dosti velké, pak U je dynamickým systémem zobrazováno do U , a proto obsahuje atrahující množinu A .

Sledujeme-li fyzický nebo počítačový experiment s dynamickými systémy, pozorujeme většinou nejprve přechodové chování, které je po nějaké době vystřídáno chováním, které se již v čase dále nevyvíjí a nemění a které nazveme „asymptotických režimem“. Řečeno trochu přesněji, bod $f^t x$ reprezentující stav systému se nakonec pohybuje v nějaké části atrahující množiny (anebo blízko ní). Nicméně při podrobnějším studiu bychom zjistili, že existují podmnožiny atrahující množiny, které zůstávají „nevyužity“, tj. tyto části atrahující množiny samy neatrahují. To znamená, že v praxi, kdy se atrahující množiny pokusíme zkonstruovat z „asymptotických režimů“ získáme menší množiny, které nazveme atraktory.

Z důvodů, které budou jasné později, navíc chceme, aby atraktor byl nerozložitelný (ireducibilní), tj. sjednocení dvou disjunktních atraktorů za atraktor považovat nebudeme. Tento požadavek má bohužel za následek, že nemusí vždy existovat otevřené okolí U množiny A tak, že $f^t U \rightarrow A$ pro $t \rightarrow \infty$. Místo přesné definice se proto spokojme prozatím s operační definicí atraktoru jako množiny bodů, ke které se experimentální body $f^t x$ akumulují pro velká t .

Příklady:

a) Atrahující pevný bod. Nechť P je pevný bod našeho dynamického systému, tj. $f^t P = P$ pro všechna t . Derivace $D_P f^1$ operátoru f^1 v pevném bodě je matice $m \times m$. Pokud všechna vlastní čísla této matice leží uvnitř jednotkové kružnice $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ je P atrahující pevný bod, a tedy též atrahující množina a atraktor. Jestliže časová evoluce našeho systému je definována rovnicí (2), pak P je pevný bod, právě když $F(P) = 0$. Abychom určili, zda je tento bod atrahující, nemusíme rovnici (2) řešit a pak počítat derivaci operátoru f^1 , jak by se mohlo na první pohled zdát. K tomu, aby P byl atrahující bod, stačí totiž, když všechna vlastní čísla matice $D_P F$ mají negativní reálnou část.

b) Atrahující periodická orbita pro diskrétní čas. Množinu $\{P_1, \dots, P_n\}$ navzájem různých bodů nazveme atrahující periodickou orbitou s periodou n , jestliže $f P_1 = P_2, \dots, f P_n = P_1$ a P_i je atrahující pevný bod pro f^n .

c) Atrahující periodická orbita pro spojitý čas. Pro dynamický systém se spojitým časem předpokládejme, že existuje bod a a $T > 0$ tak, že $f^0 a = a$, ale $f^t a \neq a$ pro $0 < t < T$. Pak a je periodický bod s periodou T a $O = \{f^t a : 0 \leq t < T\}$ je odpovídající periodická orbita. Derivace $D_a f^T$ má vlastní číslo odpovídající tečnému směru k O v a rovné jedné. Jestliže všechna zbývající vlastní čísla leží uvnitř jednotkové kružnice $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, je O atrahující periodická orbita a opět též atrahující množina a atraktor.

d) Kvaziperiodický atraktor. Vhodným výběrem souřadnic lze periodickou orbitu pro systém se spojitým časem považovat za skutečnou kružnici a pohyb na ní popsat jako

$$(11) \quad q(t) = q(0) + \omega t \pmod{2\pi},$$

kde $\omega = 2\pi/T$. Periodická orbita modeluje chování jednoduchého oscilátoru. Uvažujme nyní, že máme k nezávislých oscilátorů s frekvencemi $\omega_1, \dots, \omega_k$. (Nezávislost oscilátorů znamená, že žádná celočíselná kombinace jejich frekvencí nemůže být rovna nule.) Chování těchto oscilátorů je popsáno vztahy

$$(12) \quad q_i(t) = q_i(0) + \omega_i t \pmod{2\pi}, \quad i = 1, \dots, k,$$

a toto chování probíhá na součinu k kružnic, což je k -rozměrný torus T^k . Předpokládejme dále, že torus T^k je vložen do \mathbb{R}^m , $m \geq k$ a že tento torus je atrahující množina. T^k v tomto případě nazveme kvaziperiodickým atraktorem. Asymptotické chování takového dynamického systému je popsáno vztahem

$$(13) \quad x(t) = f^t x = Q[q_1(t), \dots, q_k(t)] = \Phi(\omega_1 t, \dots, \omega_k t),$$

kde Φ je periodické zobrazení, s periodou 2π ve všech proměnných. Funkce tvaru $t \rightarrow \Phi(\omega_1 t, \dots, \omega_k t)$ se nazývá kvaziperiodickou funkcí s k periodami.

5. Podivné (strange) atraktory

Příklady na konci posledního odstavce byly vesměs velmi jednoduché. Připomeneme-li si řešení Lorentzových rovnic, počneme tušit, že jejich atraktor může být množina podivná a komplikovaná. Pro takto složité atraktory se skutečně ujal název „podivné atraktory“. Dříve, než si uvedeme některé další příklady podivných atraktorů, podívejme se ještě jednou na problematiku malé změny počátečních podmínek. Uvažujme evoluční rovnici

$$(14) \quad x(n+1) = f(x(n)), \quad x(i) \in \mathbb{R},$$

kde n je diskrétní čas. Uvažujme dvoje různé počáteční podmínky $x(0)$ a $y(0) = x(0) + px(0)$, $0 < px(0) \leq 1$, tj. $y(0)$ jsme získali malou změnou $x(0)$. V čase n bude $x(n) = f^n(x(0))$ a s užitím Taylorovy věty

$$y(n) = f^n(y(0)) = f^n(x(0) + px(0)) \approx f^n(x(0)) + ((df^n/dx) x(0)) px(0).$$

kde $f^n(x) = f(f(\dots f(x) \dots))$, n -krát. Je tedy rozdíl mezi $x(n)$ a $y(n)$ přibližně rovný $((df^n/dx) x(0)) px(0)$, tj. počáteční odchylka $px(0)$ je vynásobena derivací funkce f^n v bodě $x(0)$. S užitím věty o derivaci složené funkce můžeme tuto derivaci přepsat

$$(df^n/dx) x(0) = (df/dx)(x(n-1)) (df/dx)(x(n-2)) \dots (df/dx)(x(0)).$$

Výraz na pravé straně je součinem derivací funkce f v bodech $x(0)$, $x(1)$, ..., $x(n-2)$, $x(n-1)$. Jestliže většina činitelů ve výrazu na pravé straně je srovnatelné

velikosti, lze předpokládat, že df^n/dx bude většinou růst (anebo klesat) exponenciálně s n ; totéž samozřejmě platí pro rozdíl $x(n) - y(n)$.

Úvahy učiněné v předchozím odstavci lze samozřejmě zobecnit i na dynamický systém s n -rozměrným stavovým prostorem. Jediný podstatný rozdíl bude v tom, že zda odchylka při rostoucím n exponenciálně roste, klesá či nezávisí exponenciálně na n , bude nyní záviset též na směru odchylky.

Vraťme se k našim atraktorům z příkladů a) – d). Jsou to pěkné variety (bod, konečná množina bodů, kružnice, torus), tedy objekty, se kterými se dobře pracuje. Jestliže $px(0)$ je malá perturbace počáteční podmínky $x(0)$, pak pro rostoucí t zůstává perturbace $px(t) = (D_x f^t) px(0)$ malá; tyto systémy tedy nejsou citlivě závislé na počátečních podmínkách. Následující příklad ukazuje, že tomu tak vždy být nemusí.

Příklad: Hénonův atraktor [16].

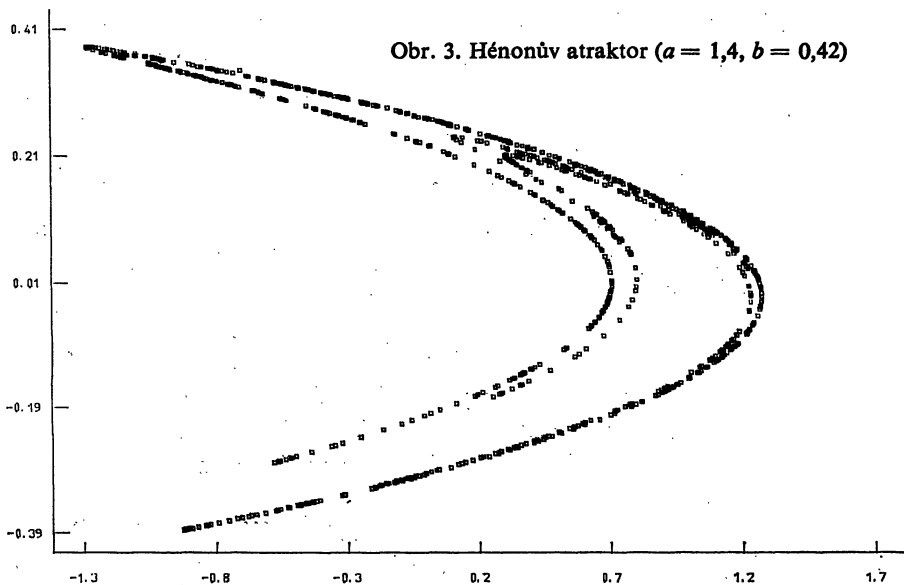
Vezměme diskrétní dynamický systém, tj. systém s diskrétním časem, definovaný vztahem

$$(15) \quad f(x, y) = (1 + y - ax^2, bx).$$

Jeho atraktor pro $a = 1,4$, $b = 0,3$ ukazuje obr. 3. Numericky lze spočítat, že

$$px(t) \approx px(0) e^{At}, \quad A = 0,42,$$

tj. že chyba roste exponenciálně, což znamená, že tento systém je citlivě závislý na počátečních podmínkách. Pro odhad rychlosti růstu chyby si představme, že funkční závislost (15) počítáme na počítači v dvojité přesnosti, tj. s přesností na čtrnáct číslic. Pak po šedesáti iteracích bude chyba výsledku mít řád jedna [15].



Henonův atraktor, kromě toho že je chaotický (tj. vykazuje citlivou závislost na počátečních podmínkách) je též fraktální, což je stručné vyjádření faktu, že jeho topologická dimenze se nerovná Hausdorffově dimenzi (viz dále). Právě atraktory, které jsou fraktální i chaotické najednou, se nazývají podivné atraktory.

6. Invariantní pravděpodobnostní míry

V předchozích kapitolách jsme poznali, že některé dynamické systémy mohou mít velmi složité chování; toto chování jsme označili termínem „chaotické“. Soustředme se nadále pouze na studium systémů majících podivný atraktor. Jejich geometrie je bohužel natolik složitá, že pokusy o jejich čistě geometrickou klasifikaci zatím nejsou příliš uspokojivé. Vhodnější pro klasifikaci se však ukazují jejich pravděpodobnostní vlastnosti.

V průběhu několika posledních let se studovala řada statistických deskriptorů. Většina z nich vychází z chování dynamických systémů na atraktoru a je invariantní vůči hladké transformaci souřadnic. Takovým deskriptorům budeme nadále říkat *charakteristické invarianty atraktorů*.

Před jejich výkladem se však musíme zmínit o invariantních pravděpodobnostních mírách generovaných dynamickým systémem na jeho atraktoru.

Atraktor A poskytuje globální obraz dlouhodobého chování dynamického systému. K podrobnějšímu studiu dynamiky systému na atraktoru je potřeba definovat pravděpodobnosti vyjadřující, jak často jsou jednotlivé části atraktoru navštěvovány typickou orbitou. Pro diskrétní čas a borelovskou množinu $B \subset M$ lze tuto pravděpodobnost definovat jako

$$(16) \quad m(B, x) = \lim_{N \rightarrow \infty} 1/N \text{ card } \{0 \leq i \leq N - 1 : f^i x \in B\};$$

kde $\text{card } \{\dots\}$ znamená počet prvků množiny.

Tato míra je invariantní vzhledem k našemu dynamickému systému f^n . Invariantnost míry m znamená, že pro každou měřitelnou množinu B je

$$(17) \quad m(B) = m(f^{-1}(B)).$$

Předpokládejme dále, že m nelze zapsat jako $m_1/2 + m_2/2$, kde m_1, m_2 jsou opět invariantní pravděpodobnostní míry a $m_1 \neq m_2$. Takovouto míru nazveme nerozložitelnou nebo ekvivalentně *ergodickou*.

Věta: Jestliže kompaktní množina A je invariantní vzhledem k systému (f^t) , tak existuje invariantní ergodická pravděpodobnostní míra vzhledem k (f^t) , jejíž nosič je obsažen v A .

Věta: Jestliže $m(-, x)$ je ergodická, tak $m(-, x) = m(-, y)$ pro skoro všechna y , a můžeme tedy psát $m(-, x) = m(-)$.

Výše uvedené věty ukazují, že existují invariantní ergodické míry definované časovými průměry. Problémem je, kterou z nich vybrat. Na podivném atraktoru většinou existuje takových měř nekonečně mnoho.

Příklad:

Body na kružnici T^1 můžeme parametrizovat čísly z intervalu $[0,1)$ a každé číslo z tohoto intervalu lze zapsat pomocí jeho binárního rozvoje jako $0, a_1a_2a_3 \dots$, kde každé a_i je 0 nebo 1. (Při tomto přiřazení vzniká malá nejednoznačnost, jež však není nijak podstatná pro následující výklad.) Definujme zobrazení $f: T^1 \rightarrow T^1$ předpisem

$$(19) \quad f(x) = 2x \pmod{1},$$

tj. f nahrazuje $0, a_1a_2a_3 \dots$ číslem $0, a_2a_3 \dots$ (tzv. Bernoulliho shift). Vyberme p mezi 0 a 1. Pravděpodobnostní rozložení m_p na binárních rozvojech $0, a_1a_2a_3$ je pak definováno požadavkem, aby a_i bylo 0 s pravděpodobností p a 1 s pravděpodobností $1 - p$ (nezávisle na i). Tím je každé podmnožině v T^1 přiřazena nějaká pravděpodobnost („součet“ pravděpodobností jejich prvků) neboli na T^1 je definována pravděpodobnostní míra m_p , jež, jak lze snadno ověřit, je invariantní a ergodická vzhledem k f . Poněvadž takovou míru lze definovat pro libovolné p z $(0, 1)$, máme pro f nespočetnou množinu invariantních ergodických měr.

Termínem „fyzický“ budeme v tomto odstavci a v dalších označovat vše, co pochází z nějakého reálného fyzického experimentu, tj. experimentu fyzikálního, chemického, biologického atd.; nikoli však z počítačového experimentu.

Jak ukazuje předchozí příklad, pro dynamický systém může existovat velký počet ergodických invariantních měr. Zdaleka ne všechny však poskytují dobrou informaci o chování systému anebo jsou vhodné pro počítání reprezentativních průměrů u fyzických dynamických systémech. (Vezměme si například míru soustředěnou v nestabilním pevném bodě. Ta je samozřejmě invariantní a ergodická, ale o chování systému nedává informaci vůbec žádnou.) Nicméně existují alespoň dvě metody, jak vybrat invariantní míru, jež poskytuje relevantní informace o průměrném chování dynamického systému.

První z těchto metod byla navržena Kolmogorovem. Je založena na pozorování, že každý realistický model nějakého fyzického nebo počítačového experimentu by v sobě měl obsahovat nedeterministickou složku odpovídající náhodnému šumu v systému. Rovnice popisující takový systém má tvar

$$(20) \quad dx/dt = F(x(t)) + \varepsilon w(t),$$

kde w je nějaký šum a $\varepsilon > 0$ je parametr. Pro vhodný šum má stochastický proces definovaný touto rovnicí jedinou stacionární míru m . Pak pro systém (2), tj. pro systém (20) bez šumu, je vhodná míra

$$m = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} m_\varepsilon.$$

Takto definovanou míru m budeme dále nazývat Kolmogorovovou mírou. Je opravdu velmi „rozumná a přirozená“. Bohužel není jasné, zda Kolmogorovova míra existuje i třeba jen pro „rozumné“ fyzické systémy; i v případě, že existuje, může být ovšem velmi obtížné zjistit, jak vypadá.

Druhý způsob je následující: ze všech invariantních měr vybereme pouze takové m , pro něž existuje nějaká podmnožina fázového prostoru S s kladnou Lebesgueovou mírou tak, že pro libovolné $x \in S$ je m dána vztahem (16). Množina takovýchto měr

je pro řadu „rozumných“ systémů jednovprvková. Takovéto míry nazýváme Sinai-Ruelle-Bowenovými (SRB) mírami. Obecně bývá jednodušší, i když ne jednoduché, najít pro daný systém SRB míru. Pro některé rozumné systémy (např. axióm A systémy) lze ukázat, že obě míry jsou stejné.

Kolmogorovy a SRB míry jsou zřejmými kandidáty pro popis fyzikálních časových průměrů. Společně je budeme nazývat fyzikálními mírami. Jejich nevýhodou je, že je lze těžko definovat a počítat. Naštěstí mnoho důležitých výsledků platí pro všechny invariantní míry.

Nadále budeme předpokládat znalost invariantní ergodické míry na atraktoru vyšetřovaného dynamického systému. Následující kapitola podává přehled několika invariantů nejčastěji používaných pro charakterizaci dynamických systémů; některé z nich vycházejí z čistě geometrického přístupu k popisu atraktoru, jiné využívají jeho pravděpodobnostních vlastností.

7: Charakteristické invarianty atraktorů

7.1 Kapacita, Hausdorffova a topologická dimenze

Nechť M je kompaktní metrický prostor a $N(r, M)$ minimální počet otevřených koulí o poloměru r potřebných k jeho pokrytí. Kapacitu M definujeme jako

$$(21) \quad \dim_K M = \limsup_{r \rightarrow 0^+} (\log N(r, M) / -\log r).$$

Pro kladné r nechť \mathcal{A} je nejvýše spočetné pokrytí M takové, že $\text{diam } S \leq r$. Pro $a \geq 0$ definujeme

$$m^a(r, M) = \inf_{\mathcal{A}} \sum_{S \in \mathcal{A}} (\text{diam } S)^a.$$

Pak pro $r \rightarrow 0_+$ konverguje $m^a(r, M)$ k limitě $m^a(M)$, jež může být i nekonečná a nazývá se Hausdorffovou mírou množiny M v dimenzi a . Hausdorffovu dimenzi množiny M definujeme

$$\dim_H M = \sup \{a : m^a(M) > 0\}.$$

Pojem Hausdorffovy dimenze \dim_H je o něco složitější než pojem kapacity, má však oproti ní řadu výhod, např. Hausdorffova dimenze obecné množiny je ostře menší než Hausdorffova dimenze jejího uzávěru, což pro kapacitu neplatí.

Topologická dimenze (pokryvací) $\dim_T M$ je definovaná jako nejmenší přirozené číslo n , pro něž platí: Pro každé konečné pokrytí M otevřenými množinami U_1, \dots, U_m lze najít jiné pokrytí otevřenými množinami V_1, \dots, V_m tak, že $V_i \subset U_i$, $i = 1, \dots, m$, a libovolných $n + 2$ množin z (V_i) má prázdný průnik.

7.2 Charakteristické exponenty

Uvažujme napřed diskrétní systém

$$(22) \quad x(n + 1) = f(x(n)),$$

kde $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ je diferencovatelné zobrazení. Jestliže počáteční podmínky systému jsou trochu změněny, pak exponenciální rychlost, se kterou perturbace $px(t)$ roste nebo klesá s časem, se nazývá charakteristický exponent.

Označme $T(x)$ matici $(\partial f_i / \partial x_j)$ parciálních derivací složek f_i v bodě x . Dále zavedeme označení

$$(24) \quad T^n(x) = T(f^{n-1}(x)) \dots T(x).$$

Věta. Necht m je pravděpodobnostní invariantní míra na \mathbb{R}^k s kompaktním nosičem S . Pak

i) *existuje měřitelná funkce $s: S \rightarrow \mathbb{Z}^+$ taková, že $s(f(x)) = s(x)$;*

ii) *pro skoro všechna $x \in S$ vzhledem k m existují reálná čísla $\lambda^1(x) < \lambda^2(x) < \dots < \lambda^{s(x)}(x)$, a lineární podprostory $\{0\} = V^0(x) \subset V^1(x) \subset \dots \subset V^{s(x)}(x) = \mathbb{R}^k$ takové, že*

$$(25) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) \log \|T^n(x)v\| = \lambda^i(x)$$

pro $v \in V^i(x) \setminus V^{i-1}(x)$ a $1 \leq i \leq s(x)$.

iii) $\lambda^i(x)$ jsou měřitelné funkce a $\lambda^i(f(x)) = \lambda^i(x)$. Jestliže m je ergodická míra, tak s i všechny λ^i jsou konstantní. (Čísla λ^i se pak nazývají ljanunovské exponenty).

Jestliže $px(0)$ je malá změna počátečních podmínek (uvažovaná jako nekonečně malá), pak změna v čase n je dána jako

$$(26) \quad px(n) = T^n(x) px(0).$$

Pro většinu $px(0)$, tj. pro $px(0) \notin V^2(x(0))$, je $px(n) \approx px(0) \exp(n\lambda^1)$, přičemž citlivá závislost na počátečních podmínkách odpovídá $\lambda^1 > 0$.

V případě, že máme dynamický systém se spojitým časem (f^t) aplikujeme předchozí větu na zobrazení za jednotku času, tj. na $f = f^1$.

Příklady:

Stacionární stav. Stacionární stav fyzikálního systému souvisí s pevným bodem P odpovídajícího dynamického systému. Stacionární stav je tedy popsán pravděpodobnostní mírou $m = \delta_P(P)$. Diracova delta funkce v P je míra definovaná takto:

$$(27) \quad \delta_P(A) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } P \in A, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Míra $\delta_P(A)$ je samozřejmě ergodická a invariantní. Označme a_1, \dots, a_n vlastní čísla matice $D_P f^1$ ($D\sigma f^1$ je matice parciálních derivací zobrazení f^1 v P), seřazená vzestupně podle velikosti svých absolutních hodnot a opakovaná podle svých násobností, ljanunovské exponenty potom jsou

$$(28) \quad \lambda_i = \log |a_i|, \lambda_2 = \log |a_2|, \dots$$

Speciálně stabilní stacionární stav odpovídá atrahujícímu pevnému bodu se všemi ljanunovskými exponenty zápornými.

Periodické chování. Periodické chování fyzikálního systému odpovídá periodické trajektorii $G = \{f^t a: 0 \leq t \leq T\}$ pro asociovaný dynamický systém se spojitým časem. Tato trajektorie je nosičem ergodické invariantní míry m definované takto:

$$(29) \quad m = 1/T \int_0^T \delta_{f^t a} dt.$$

Označme $a_i(T)$ vlastní čísla matice $D_a f^T$. Jedno z těchto čísel, odpovídající směru tečnému ke G v a , je 1. Odpovídající Ljapunovské exponenty jsou

$$(30) \quad \lambda_i = 1/T \log |a_i(T)|,$$

a jeden z nich je tedy 0. Speciálně stabilní periodické chování asociované s atrahující periodickou orbitou má jeden Ljapunovský exponent 0 a ostatní záporné.

Příklady z předcházejícího odstavce ukazují, jak existence atrahujícího bodu anebo periodické orbity implikují nekladnost Ljapunovských exponentů. V této části ukážeme, jak zápornost Ljapunovských exponentů implikuje, že ergodická invariantní míra m odpovídá stacionárnímu anebo periodickému chování.

Věta. Uvažujme dynamický systém se spojitým časem a předpokládejme, že všechny jeho charakteristické exponenty jsou všude nenulové. Pak existuje bod $P \in S$ takový, že $m = \delta_P$. Speciálně, jestliže všechny charakteristické exponenty jsou negativní, je P atrahující pevný bod.

V dalších dvou větách budeme předpokládat, že dynamický systém je definovaný funkcí, jež má spojitou druhou derivaci.

Věta. Uvažujme diskrétní dynamický systém s ergodickou invariantní mírou m a předpokládejme, že všechny jeho Ljapunovské exponenty jsou negativní, Pak platí

$$m = 1/N \sum_{k=1}^N \delta_{i^k a},$$

kde $(a, f a, \dots, f^{N-1} a)$ je atrahující periodická orbita s periodou N .

Věta. Uvažujme dynamický systém se spojitým časem a ergodickou invariantní mírou m a předpokládejme, že všechny Ljapunovské exponenty až na λ_1 jsou záporné. Pak bude

i) $m = \delta_P$, kde P je pevný bod,
nebo

ii) m je míra na atrahující periodické orbitě.

Jestliže tyto věty použijeme k analýze systému (2) s 2-dimenzionálním stavovým prostorem, zjistíme, že pro Ljapunovské exponenty mohou nastat čtyři případy:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0,$$

$\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$: nosič m je pevný bod nebo repelentní periodická orbita,

$\lambda_1 < 0, \lambda_2 = 0$: nosič m je pevný bod anebo atrahující periodická orbita,
oba exponenty jsou nenulové: nosič m je pevný bod.

V žádném případě tedy nemáme atraktor s kladným Ljapunovským exponentem, a tak pro dynamický systém se spojitým časem musí být dimenze fázového prostoru větší než dvě, abychom mohli očekávat chaotické chování.

7.3 Entropie

Předpokládejme, že uvažovaný diskrétní dynamický systém můžeme pozorovat pouze pomocí přístroje, který má konečnou přesnost, a proto nám dává pouze konečný soubor hodnot $1, \dots, k$. Jinými slovy, fázový prostor $M = \bigcup_{i=1}^k A_i$ a jestliže je $x \in A_i$ přístroj ukáže i . Mohlo by se samozřejmě stát, že by se množiny A_i navzájem protínaly, a proto měření by bylo nejednoznačné. Tuto možnost nebudeme z důvodů jednoduchosti uvažovat. Soubor množin $A = \{A_1, \dots, A_k\}$ s výše uvedenými vlastnostmi, tj. navzájem se neprotínající a jejichž sjednocení je celá množina M , nazveme konečným rozkladem M . Pokud nosič S míry m je různý od stavového prostoru M , děláme pouze rozklad nosiče S ; doplněk k S má nulovou míru, a proto v našem modelu je i pravděpodobnost výběru bodu z tohoto doplníku nulová. Je-li navíc m nějaká „přirozená“ míra, pak tato představa dobře zachycuje i fyzikální skutečnost.

Budeme-li nyní v našem modelu měření n -krát po sobě opakovat, dostaneme posloupnost čísel a_0, a_1, \dots, a_{n-1} , $a_i \in (1, \dots, k)$, délky n . Takové posloupnosti budeme nazývat slovy délky n nad abecedou $(1, \dots, k)$. Jedna z možných měr složitosti systému je počet všech slov délky n , které systém může vytvořit (popř. tento počet uvažovaný též s frekvencí výskytu jednotlivých slov). Tato definice složitosti má dvě vážné nevýhody – závisí totiž jak na výběru n , tak i na jemnosti rozkladu fázového prostoru (neboli na přesnosti měření). První problém překonáme tím, že budeme zkoumat, jak počet slov roste pro $n \rightarrow \infty$. Závislosti na přesnosti měření se vyhneme tím, že budeme vybírat takový rozklad, který dává největší míru složitosti. Tyto pojmy zavedeme v dalších odstavcích přesně.

Definujme shannonovský informační obsah rozkladu jako

$$H(A) = -\sum_{A \in \mathcal{A}} m(A) \log m(A),$$

přičemž předpokládáme, že $0 \log 0 = 0$.

Množina

$$A^{(n)} = A_{i_0} \cap f^{-1}(A_{i_1}) \cap \dots \cap f^{-n+1}(A_{i_{n-1}}); 1 \leq i_j \leq k$$

je též m -měřitelným rozkladem nosiče m .

Míra

$$m(A_{i_0} \cap f^{-1}(A_{i_1}) \cap \dots \cap f^{-n+1}(A_{i_{n-1}}))$$

dává pravděpodobnost toho, že trajektorie začíná v A , první iterace padne do A_{i_1} , j -tá iterace do A_{i_j} , až nakonec $(n-1)$ -iterace padne do $A_{i_{n-1}}$. Jinak řečeno, tato míra dává frekvenci výskytu slova $i_1 i_2 \dots i_n$. Lze ukázat, že následující limity existují

$$(31) \quad h(m, A) = \lim_{n \rightarrow \infty} [H(A^{(n+1)}) - H(A^{(n)})] = \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n H(A^{(n)}),$$

$$(32) \quad h(m) = \sup_A h(m, A) = \lim_{\text{diam} A \rightarrow 0} h(m, A),$$

kde $\text{diam} A = \max_i \{\text{diam} A_i : A_i \in A\}$. Evidentně, $h(m, A)$ je složitost systému vzhle-

dem k rozkladu a $h(m)$ je jeho maximální složitost neboli kolmogorovská entropie. Jestliže rozklad A je generujícím rozkladem, tj. pro $n \rightarrow \infty$ je $\text{diam } A^{(n)} \rightarrow 0$, je $h(m, A) = h(m)$ a limita (32) nemusí být počítána.

Výše uvedená definice entropie je definicí pro dynamický systém s diskretním časem. Entropie pro systém se spojitým časem (f^t) je definována jako entropie pro zobrazení f^1 .

Zajímavý vztah platí mezi entropií a charakteristickými exponenty.

Věta. Necht' f je diferencovatelné zobrazení konečně dimenzionální variety a ergodická míra s kompaktním nosičem. Pak

$$(33) \quad h(m) \leq \sum \text{kladné } \lambda_i.$$

Pokud f je difeomorfismus a m má hladkou hustotu vzhledem k Lebesgueově míře, pak ve vztahu (33) platí rovnost.

Poznamenejme zde, že mezi fyzikálně chemickou etropií definovanou Boltzmannem a Kolmogorovovou entropií není zatím znám žádný vztah.

7.4 Informační dimenze

Dimenze slouží jako další invariant k charakterizaci atraktorů. Jak již bylo dříve řečeno, velmi často nastává situace, kdy dimenze atraktoru je podstatně menší než dimenze fázového prostoru. To kromě jiného znamená, že potom, co systém projde přechodovými stavy, se zmenší jeho počet stupňů volnosti a systém na atraktoru lze – alespoň v principu – popsat menším počtem rovnic než celý původní systém. V odstavci 5.2. jsme definovali tři různé dimenze. Poslední z nich, topologickou dimenzi, jsme uvedli pouze pro srovnání a úplnost, protože pro naše účely je příliš hrubá. Nevýhodou kapacity a Hausdorffovy dimenze je jejich statický charakter. Obě tyto dimenze vypovídají totiž pouze o geometrii atraktoru a nedávají žádnou informaci o dynamice na něm.

Informační dimenzi $\dim_H m$ invariantní pravděpodobnostní míry m definujeme jako minimum z Hausdorffových dimenzí množin S , pro něž je $m(S) = 1$. Ukazuje se, že informační dimenze přirozené fyzikální invariantní míry je zajímavější veličina než Hausdorffova dimenze nebo kapacita atraktoru nebo atrahující množiny. To je jednak proto, že informační dimenze odráží dynamické vlastnosti systému (a má díky tomu jednoduchý matematický vztah s l'apunovskými exponenty) a dále proto, že její výpočet z experimentálních dat je mnohem snáze proveditelný.

Všimněme si, že informační dimenze není obecně Hausdorffova dimenze nosiče míry m . $\text{Supp } m$ je uzavřená množina, avšak S uzavřená být nemusí. Obecně platí, že $\text{supp } m$ je podmnožinou atraktoru A , a proto

$$\dim_H m \leq \dim_H (\text{supp } m) \leq \dim_H A.$$

Zajímavý vztah platí mezi informační dimenzí pro SRB míru a l'apunovskými exponenty λ_i . Připomeňme, že l'apunovské exponenty jsme měli vždy uspořádaný tak, že λ_1 byl nejmenší. Necht' k je takové, že $c(k-1) = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_{(s(x)-i)} \geq 0$ a $\sum_{i=0}^k \lambda_{(s(x)-i)} \leq 0$.

Ljapunovská dimenze míry m je pak definována

$$(34) \quad \dim_L m = k + c(k - 1) / |\lambda_{k+1}|.$$

Hypotéza [18]. *Jestliže m je SRB míra, pak genericky platí*

$$(35) \quad \dim_H m = \dim_L m.$$

Genericky zde znamená v typickém případě. Jaký případ typičnosti je zde vhodný uvažovat, je velmi těžká a nezodpovězená otázka. Nevíme ani (kromě jiných věcí), jak často má dynamický systém SRB míru. Přesto ale umíme dokázat některé částečné výsledky.

Věta [19]. *Nechť f je dvakrát spojitě diferencovatelné zobrazení a m je invariantní ergodická míra s kompaktním nosičem. Pak platí*

$$(36) \quad \dim_H m \leq \dim_L m.$$

Věta [20]. *Nechť f je dvakrát diferencovatelný difeomorfismus dvoudimenzionální variety a m je invariantní míra s kompaktním nosičem. Pak platí*

$$(37) \quad \dim_H m = h(m) [1/|\lambda_1| + 1/|\lambda_2|],$$

kde $\lambda_1 > 0$ a $\lambda_2 < 0$ jsou charakteristické exponenty míry m .

Následující věta dává spodní odhad pro informační dimenzi.

Věta. *Je-li m SRB míra, pak $\dim_H m \geq L_+$, kde L_+ je součet násobností kladných ljapunovských exponentů.*

Pro ty, kterým definice informační dimenze připadá složitá (a též pro úplnost) uvedeme ještě definici Rényiho dimenze. Předpokládejme, že m je přirozená invariantní pravděpodobnostní míra na atraktoru A . Nechť $B = \{B_1, \dots, B_n\}$ je m -měřitelný rozklad atraktoru A . Pak k určení, v které množině rozkladu se nachází libovolný bod $x \in A$, je potřeba informace

$$I(B) = - \sum_{i=1}^n m(B_i) \log m(B_i).$$

Porovnáním, jak se množství informace zvětšuje pro stále se zjemňující konečné rozklady (tj. pro větší a větší přesnost měření), získáme Rényiho dimenzi. Přesně Rényiho dimenze atraktoru A je

$$\dim_R A = \limsup_{\text{diam}(B) \rightarrow 0} \frac{I(B)}{\log \text{diam}(B)}.$$

Poznámka. Rényiho dimenzi lze definovat pro libovolnou pravděpodobnostní invariantní míru na oblasti vlivu atraktoru A . Pak by se samozřejmě mělo, stejně jako v případě informační dimenze, mluvit o Rényiho dimenzi míry spíš než o Rényiho dimenzi atraktoru a též to tak řada autorů dělá. Důvodem k tomu, že my mluvíme o dimenzi atraktoru, je předpoklad, že m je přirozená míra na atraktoru, neboli že je to taková míra, jež dobře reprezentuje dynamické i geometrické vlastnosti atraktoru A .

Druhou část článku otiskneme v příštím čísle.

Literatura

- [1] I. DVOŘÁK, J. ŠIŠKA: *Teorie deterministického chaosu a její aplikace v biologických a lékařských vědách*. Studijní materiály zimní školy ČSVTS, Alšovice, 1987.
- [2] HAO-BAI-LIN: *Chaos*. World Scientific, Singapore, 1984.
- [3] P. CVITANOVIČ: *Universality in Chaos*. Adam Hilger, Bristol, 1984.
- [4] H. G. SCHUSTER: *Deterministic Chaos. An Introduction*. Physik-Verlag, Weinheim, 1984.
- [5] A. V. HOLDEN: *Chaos*. Manchester University Press, Manchester, 1986.
- [6] L. P. KADANOFF: *Roads to chaos*. Phys. Today., 46 (1893).
- [7] R. MAY: *Simple mathematical models with very complicated dynamics*. Nature, 261 (1976), 459.
- [8] I. PROCACCIA: *Universal properties of dynamically complex systems: the organization of chaos*. Nature 333 (1988), 618.
- [9] R. MAY: *Detecting density dependence in imaginary words*. Nature 337 (1989), 16.
- [10] S. GROSSMAN, G. MAYER-KRESS: *Chaos in international arms race*. Nature, 337 (1989), 701.
- [11] K. PACNER: *Zákony chaosu*. Mladá fronta 47, 22. 11. 1986.
- [12] P. BRUNOVSKÝ: *Bifurkácie negradientných dynamických systémov*. PMFA 2 (1982), 74.
- [13] M. MACHÁČEK: *Teorie dynamických systémů*. PMFA 3 (1982), 162.
- [14] F. TAKENS: *Detecting strange attractors in turbulence*. V.: *Dynamical Systems and Turbulence*. Lecture Notes in Mathematics 898, p. 366, Warwick, 1980.
- [15] E. N. LORENZ: *Deterministic Nonperiodic Flows*. J. Atmos. Sci., 20 (1963), 130.
- [16] M. HÉNON: *A two dimensional mapping with a strange attractor*. Commun. Math. Phys. 50 (1976), 69.
- [17] J. H. CURRY: *On the Hénon transformation*. Commun. Math. Phys. 68 (1981), 129.
- [18] J. L. KAPLAN, J. A. YORKE: *Preturbulence: a regime observed in a fluid flow model of Lorenz*. Commun. Math. Phys., 67 (1979), 93.
- [19] F. LEDRAPPIER: *Some relations between dimension and Liapunov exponents*. Commun. Math. Phys., 81 (1981), 229.
- [20] L. S. YOUNG: *Dimension, entropy and Liapunov exponents*. Ergod. Theory Dynam. Syst., 2 (1982), 109.

Superplasticita a její praktické užití

Pavel Lukáč, Praha

1. Úvod

Jednou z charakteristických vlastností kovových materiálů je jejich plastické chování. Za působení vnějších sil se mohou deformovat plasticky, trvale. Velmi často se zákoni-

Prof. RNDr. PAVEL LUKÁČ, DrSc. (1935) je vedoucím katedry fyziky kovů na MFF UK v Praze, Ke Karlovu 5, 121 16 Praha 2.