Vít Hejný; Milan Hejný

Prečo je matematika taká ťažká?

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 23 (1978), No. 2, 85--93

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/139655`

diskuse

Prečo je matematika taká ťažká?

Vít Hejný),*
Milan Hejný, Bratislava

Začiatkom septembra 1976 bola v Žiline usporiadaná XII. celoštátna konferencia o matematike na vysokých školách technických, ekonomických a poľnohospodárskych. Na tejto konferencii sme prispeli referátom „Stimulácia matematického myslenia". Keď sme potom boli požiadaní o časopisecků úpravu referátu, začali sme jednotlivé myšlienky dotvárať a prehlbovať. Nakoniec sme sa rozhodli zúžiť celý článok na jedinú myšlienku a jej dôsledky. Ide v podstate o pokus čiastočne odpovedať na otázku v nadpise. Naša odpoveď znie:

(*) *Pretože výuka matematiky sa uskutočňuje v prostredí nedorozumenia medzi učiteľom, osnovami a učebnicou na strane jednej a žiakom na strane druhej.*

Spomínané nedorozumenie má dve oblasti: racionálnu a emočnú. V tejto práci sa obmedzíme iba na analýzu oblasti racionálnej.

Naším cieľom však nie je iba analýza problému a teoretické odhalenie príčin, ale predovšetkým hľadanie nových východísk – konkrétnych návodov na skvalitnenie výukového procesu matematiky.

*) Spoluautor článku, prof. Vít Hejný, zemřel 26. 5. 1977. Viz PMFA 6/1977, str. 350. Pozn. red.

Všimnime si najprv vysokoškolskej prípravy budúceho učiteľa matematiky. Táto príprava sa skladá z dvoch matematických zložiek (o zložkách nematematických tu hovoriť nebudeme): *zložky odbornej,* v ktorej sa študent oboznamuje s matematickými teóriami, a *zložky komunikačnej,* ktorej cieľom je vyzbrojiť budúceho učiteľa poznatkami o spôsoboch komunikácie poznatkov žiakom. Zatiaľ čo v zložke odbornej je študent zásobovaný (až zavalený) kvantom vedecky fundovaných informácií, ostáva oblasť výuky veľa dĺžna skutočným potrebám praxe. *Budúci učiteľ sa nedozvie žiadnu teoretickú osnovu, pomocou ktorej by mohol evidovať a hodnotiť svoje pedagogické skúsenosti a zkvalitňovať tak svoju každodennú prax.* Naopak. Značná všeobecnosť a akademičnosť teoretickej výzbroje vedie učiteľa ku nedôvere v jej účinné praktické využitie. Na druhej strane množstvo metodických, didaktických a pedagogických rád pôsobí na začínajúceho učiteľa skôr dezorientačne ako usmerňujúco; on sám často pociťuje ich druhoradosť a formálnosť, ktorá ho odvádza od základnej problematiky – *zapáliť deti láskou k matematike.* A tak hlavným vodítkom učiteľovej práce ostávajú jeho osobné životné skúsenosti – vzory učiteľov z jeho školských rokov a postupne sa kryštalizujúce jeho osobné zážitky v triede. Avšak osobná skúsenosť, nepodopretátá objektívnou teoretickou bázou, ostáva neustále v područí subjektivizmu. Absencia pevného rámu teórie, účinne aplikovateľnej v praxi, je Achillovou pätou všetkých našich snáh o skvalitnenie výuky matematiky (a nielen matematiky) na všetkých stupňoch škôl. Ku rovnakým záverom, koncipovaným v širších dimenziách, dochádzajú aj sovietski psychológovia P. J. GAL'PERIN a A. N. LEONTIEV – pozri [1] a [2].

Nerovnomernosť teoretickej výbavy učiteľa orientuje ho na tú časť „výuky matematiky", v ktorej je fundovaný lepšie – na matematiku. Nadhodnotenie „matematiky" a nedocenenie závažnosti „výuky" sa však netýka iba učiteľa. Uvedená disharmónia sa prejavuje aj pri tvorbe osnov učebníc, pri hľadaní koncepcie výuky matematiky v období vedeckotechnickej revolúcie.

Silný modernizačný celosvetový trend, vedený pod nápisom „množinová matematika", dostáva v niektorých zemiach príchuť horkosti. Je to nutná daň za nedocenenie onej „výuky". Ľudia, ktorí sa s nevšedným entuziazmom pribrali vymetať archaické drilové metódy, precenili obsahovú stránku veci. Vychádzajúc z osobných životných skúseností predpokladali, že odbúraním receptov z osnov a učebníc uvedú do škôl spontánny zápal tvorivého myslenia. Prax však ukázala, že táto hypotéza je príliš optimistická. Zmena obsahu sama o sebe nestačí ku zmene celej klimatiky. Ak chceme naučiť žiakov myslieť, ak chceme akcelerovať ich logické a abstraktné myslenie, potom nestačí poznať produkty takejto činnosti – nádherné (pre matematiku ovšem!) axiomatické stavby atraktívnych disciplín súdobej matematiky. Úspešnosť našej práce závisí predovšetkým od toho, či poznáme zákonitosti, ako vzniká a rastie proces „učenia sa myslieť", či poznáme spôsoby, ako takýto proces môžeme u žiakov navodiť.

Lekárovi nestačí vedieť, ako vyzerá zdravý človek a ako sa ten prejavuje. Zdar lekárovej činnosti závisí od toho, či pozná zákonitosti, ktorými sa riadi dynamika somatickej štruktúry a či dokáže tieto znalosti prakticky využiť. Podobne aj učiteľ matematiky nevystačí s predstavou múdreho žiaka; aj on potrebuje poznať zákonitosti, ktorými sa riadi genéza matematického myslenia, potrebuje vedieť ako tento proces v žiakoch navodiť. Ku tejto oblasti obrátime pozornosť v nasledujúcom.

Genéza myslenia

Pod genézou matematického myslenia je možné chápať jednak:

ontogenézu, t.j. proces odohrávajúci sa v psychike jedného človeka, a jednak

fylogenézu, t.j. proces všeľudského rozvoja matematického myslenia. Je pochopiteľné, že existuje veľa faktorov, ktoré obe uvedené genézie odlišujú. Zákonitosť, ktorú v nasledujúcom opíšeme, náleží však ku tým faktorom, ktoré sú pre obe genézy spoločné. Jednotný pohľad na ontogenézu i fylogenézu dáva výborné možnosti praktického využitia. Znalosti fylogenézy niektorého pojmu, myšlienky, metódy či dokonca celej teórie, môžeme úspešne aplikovať na problematiku ontogenézy, t.j. na prípravu vyučovacieho procesu.

Poznávací proces opíšeme pomocou šiestich po sebe nasledujúcich etáp. Najprv tieto etapy stručne uvedieme, potom ich podrobnejšie zilustrujeme.

Prvú etapu nazveme stimuláciou. Stimul je vonkajší podnet, ktorý sa v psychike odráža ako istá tenzia. Táto tenzia zvyšuje citlivosť psychiky na určité podnety, usmerňuje záujem o určitú zážitkovú oblasť.

Stimulácia implikuje zintenzívnenie vyhľadávania, prežívania a registrácie zážitkov z vyčlenenej oblasti. Dochádza ku kvantitatívnemu narastaniu separovaných skúseností. V špecificky matematických podmienkach hovoríme tiež o modeloch (budúceho zovšeobecnenia). Preto druhú etapu menujeme etapou jednotlivých skúseností či etapou modelov.

Kvantitatívny rast vyvoláva potrebu kvalitatívnej zmeny. Táto zmena sa začína triedením a hierarchizáciou získaných skúseností – modelov. Ukazuje sa, že niektoré z modelov sú vhodnejšie a niektoré menej vhodné. Dochádza ku vyčleneniu tých „najvhodnejších", ktoré sa stávajú hlavnými reprezentantami všetkých ostatných. Nazvime ich univerzálne modely či univerzálne skúsenosti. Do nich sa projektuje a v ich sfére sa rieši každý jednotlivý zážitok danej oblasti. Tretiu etapu poznávacieho procesu nazveme etapou univerzálnych skúseností či modelov.

Štvrtú etapu poznávacieho procesu nazveme abstrakčným zdvihom, nakoľko v nej dochádza ku zdvihu – premene kvantity na novú kvalitu, reprezentovanú novým poznatkom či pojmom. Zaujímavosťou tejto etapy je, že trvá veľmi krátko – skoro iba okamžik. Neklamným sprievodným javom je výnimočne intenzívny pocit objaviteľského šťastia, ktorý zavládne v psychike objaviteľa.

V štvrtej etape poznávací proces kulminuje, ale rozhodne nekončí. Novoobjavený poznatok či pojem sa v existujúcej už poznatkovej štruktúre pociťuje ako čerstvo obrúsený zub v ústach, ako cudzie teleso. Po kratučkej štvrtej etape nasleduje dlhá piata etapa, ktorú nazveme domestikáciou či kryštalizáciou poznatku v poznatkovej štruktúre. Poznatok sa v existujúcej štruktúre udomácňuje a zároveň ju prebudováva, reštrukturalizuje. Čím vyšší je stupeň abstrakcie nového poznatku, tým zásadnejšie prebudovanie poznatkovej štruktúry vyvolá. Objavy prvej veľkosti znamenajú úplné prebudovanie – revolúciu v disciplíne.

V priebehu kryštalizácie dochádza ku postupnému vyžívaniu sa pôvodného stimulu, pôvodnej tenzie, ktorá celý poznávací proces evokovala. Vyžíva sa, aby uvoľnila miesto stimulu novému, novému poznávaciemu procesu. Z tohoto hľadiska by bolo možné považovať poznávací proces za zavŕšený. Skutočne, z hľadiska psychologických kritérií motivácie, je piatou etapou poznávací proces ukončený. Existuje tu však ešte iné kritérium „osvojenia si látky", ktoré vyžaduje predĺženie našich analýz o ďalší krok.

Šiesta a posledná etapa poznávacieho procesu je automatizácia. Zmyslom šiestej etapy je: zautomatizovaním poznatku uvoľniť psychickú energiu na inú činnosť. Túto etapu absolvujú iba niektoré poznávacie procesy – sú to tie, ktorých dokonalá znalosť je nutným predpokladom niektorých ďalších činností. Tak napríklad znalosť čítania je automatizovaná, aby sa človek mohol pri čítaní plne sústrediť na obsah textu nie na grafickú stránku „čítania". Podobne automatizované sú pohyby šoféra, ktorého psychika je sústredená na situáciu na ceste; ruky klaviristu, ktorého psychika je sústredená na prežívanie hudby.

Podrobnejšiu analýzu jednotlivých etáp poznávacieho procesu zahájime sériou ilustrácií.

Stimulácia

Slávny matematik Fourier ukázal raz 11ročnému chlapcovi zbierku svojich egyptských papyrusov. Záhada nerozlúštených odkazov dávnoveka vzrušila chlapca natoľko, že tento zápalisto zvolal

„Ja to prečítam!“ Opísaný zážitok bol stimulom, ktorý navodil do duše malého CHAMPOLLIONA tenziu na celý život. Podobných okamžikov „zasvätenia“ pozná história veľmi veľa. Vlastne každý veliký objav bol dôsledkom podobnej tenzie nespokojnosti či túžby. Túžba odstrániť ľudské utrpenie viedla SEMMELWEISA k objavu antisepsie, JANSKÉHO ku objavu krvných skupín, MARXA a ENGELSA ku objavu ich teórie o spoločnosti.

Obráťme sa k matematike. Vynikajúcim dokladom intenzívnej tenzie – nesplnenej túžby rozriešiť problém piateho Euklidovho postulátu – je list maďarského matematika FARKAŠA BOLYAIA synovi Jánošovi, v ktorom otec nalieha na syna, aby problém zanechal ([3] str. 179). Z hľadiska fylogenézy skvelým reprezentantom stimulu sú tri klasické problémy: kvadratúra kruhu, duplicita krychle a trisekcia uhla. Ačkoľvek ostali po celý starovek nerozriešené, boli príčinou mnohých objavov – stimulovali asi väčšinu toho, čo helénska matematika dokázala.

Model — skúsenosť

Ilustrovali sme etapu stimulácie. Ďalšie dve etapy, etapu separovaných modelov-skúseností a etapu univerzálnych modelov-skúseností budeme ilustrovať dovedna. Iba tak totiž vynikne podstata toho, ako sa pomocou paralely formujú separované skúsenosti do skúsenosti univerzálnej.

Prvým príkladom môže byť ktorákoľvek z ľudových rozprávok osnovaných na trojitom zážitku (dva neúspešné, tretí úspešný). Konfrontuje sa dvojica eticky chybných skúseností s jednou eticky správnou. Druhým príkladom sú ľudové porekladlá. Porekladlo je univerzálna skúsenosť získaná hromadením množstva separovaných skúseností. „Nekrič hop, kým si nepreskočil!“ je zovšeobecnenie množstva konkrétnych skúseností predčasnej radosti. Univerzálnym modelom v gramatike je systém vzorov podstatných mien; „dom“ sa skloňuje podľa „dub“ a pod. Vzor je univerzálny model získaný porovnávaním množstva konkrétnych modelov – konkrétnych podstatných mien. Doposiaľ sme hovorili o príkladoch nematematických. Teraz uvedieme dva príklady z matematiky.

Viacznačnosť niektorých výrokov veštiarní a zjavná nepravdivosť mnohých sofizmov stimulovali ARISTOTELA k poznávaciemu procesu, ktorý vyústil do objavu novej disciplíny – logiky. Aristoteles roztriedil jednotlivé javy logického dôvodenia a každú z tried reprezentoval jedným univerzálnym modelom – ten slúžil ako vodítko vo všetkých ostatných prípadoch uvedenej triedy. Príkladom je sylogizmus:

Všetci ľudia sú smrteľní
Sokratés je človek
―――――――――――
Sokratés je smrteľný.

Pekný príklad univerzálneho modela nachádzame v chýrnej učebnici algebry islámskeho matematika al-Chvárizmího. V kapitole o kvadratických rovniciach uvádza autor tri konkrétne rovnice:

$$x^2 + 10x = 39\,, \quad x^2 + 21 = 10x\,,$$
$$x^2 = 3x + 4\,.$$

Každá z nich je viac ako príklad. Je to univerzálny model, návod na to ako riešiť kvadratickú rovnicu (v dnešnej symbolike) $x^2 + px + q = 0$ pre $p > 0$, $q < 0$; $p < 0$, $q > 0$; $p < 0$, $q < 0$. Z týchto 3 univerzálnych modelov sa potom zrodil objav: vzorec $x_{1,2} = \frac{1}{2}[[-p \pm \sqrt{(p^2 - 4q)}]$

Abstrakčný zdvih

Ilustrácií štvrtej etapy – abstrakčného zdvihu – je skutočne veľa. Slávne „heuréká!" nahatého ARCHIMEDA, NEWTONOVO jabĺčko, GALILEOVO pozorovanie lustrov v Dóme atď. atď. V podstate každý objav zákonitosti či každá nová myšlienka rodiaca nový pojem je príkladom abstrakčného zdvihu. Vo fylogenéze rovnako ako v ontogenéze. Rozdiel je iba v tom, že fylogenetický rast nie je bez týchto objavov mysliteľný, zatiaľ čo v ontogenéze je možné do žiaka nahustiť mnohé poznatky bez toho, že by v jeho psychike došlo ku abstrakčnému zdvihu.

Kryštalizácia

Každý nový objav, každá nová myšlienka, či už vo fylogenéze alebo ontogenéze indukuje proces kryštalizácie. Analýza tejto etapy je zo všetkých častí poznávacieho procesu najnáročnejšia; je to pochopiteľné: domestikácia novej myšlienky ovplyvňuje emočnú sféru rovnako ako racionálnu, konfrontuje sa so stále širším okruhom iných poznatkov, spôsobuje mnohé prehodnocovanie a stáva sa tak prirodzeným stimulom celej série nových poznatkových procesov, často v oblastiach zdanlivo vôbec nesúvisiacich s pôvodným objavom. Tak napríklad kryštalizácia objavu neeuklidovskej geometrie (1829 N. I. LOBAČEVSKIJ a 1932 J. BOLYAI) potrebovala 40 rokov na prekonanie predsudkových bariér a odohrávala sa skoro výlučne (výnimkou bol RIEMANN) v oblasti emočnej. Keď potom na sklonku 60. rokov minulého storočia BELTRAMI nachádza spojenie neeuklidovskej geometrie s geometriou diferenciálnou, začína opozdená, ale o to intenzívnejšia kryštalizácia novej myšlienky aj v oblasti racionálnej: reštrukturalizácia základov geometrie, vznik modelov, použitie techniky modelov na logické zdôvodňovania, analýza pojmu „teória", „axiomatický systém" a „dôkaz", zmena názorov na pojem priestoru z hľadiska fyzikálneho, tvrdý úder idealistickej filozofii I. KANTA. Najmä na príklade modelov je vidieť, ako sa kryštalizácia jedného poznávacieho procesu stáva stimulom nového poznávacieho procesu – toho, ktorý vyústil k objavu matematiky.

Rovnako pestrý obraz uvidíme, keď sa zamyslíme nad kryštalizáciou objavu KOPERNIKA, DARWINA, MENDELEJEVA, PAVLOVA, KOMENSKÉHO atď.

Zákonitosti genézy poznávacieho procesu využijeme na rozbor výukového procesu v matematike. Pokúsime sa na dvoch dobre známych príkladoch rozobrať jeden z koreňov nedorozumenia (*):

Pri komunikácii matematiky sa učiteľ orientuje na štruktúru súdobého stavu matematických znalostí a nie na genézu matematického myslenia. Prvým príkladom bude pojem čísla a počtových úkonov, druhým príkladom bude infinitezimálny počet.

Nedorozumenie s pojmom čísla

Všeobecne známe v učiteľskej obci sú obtiaže so zlomkami. Nielen na ZDŠ. Veľa problémov robia zlomky i na stredných, ba ešte i na vysokých školách. Prečo? Preto, že deti poväčšine nemajú predstavu zlomku a manipulujú so zlomkami pomocou „zaklínadiel" typu: Zlomok zlomkom násobíme tak, že .... Prečo deti nemajú predstavu zlomku? Je to tak náročné? Asi sotva. Veď mnohé úlohy o zlomkoch v praktickom živote (napríklad pri platení) vedia riešiť naprosto bezpečne; tie isté úlohy sa však stávajú vážnym problémom, keď sa objavia na hodine matematiky v inej formulácii. Príčinou uvedeného javu je deformované poznávanie „mnohosti" už v prvej triede, ba často v predškolskom veku. Diagnóza deformovaného poznávania vyžaduje znalosť poznávacieho procesu zdravého, nedeformovaného. Opíšeme 6 etáp (zdravého) poznávacieho procesu základných počtových operácií.

Stimulom je životná potreba orientovať sa v kvantifikovaných situáciách. Vo fylogenéze to bola potreba spočítať členov kmeňa, počet zvierat a pod. V ontogenéze to môže byť jednak potreba počítania hračiek, cukríkov a pod. alebo potreba pomôcť hrdinovi rozprávky prekonať prekážku, vybŕdnuť zo zlej situácie (typický príklad: stav zápolenia draka s rytierom sa hodnotí pomerom „počet uťatých hláv: počet živých hláv").

Stimulácia spôsobuje zvýšenie záujmu o kvantitatívne situácie. Dieťa registruje, že dostalo „dva cukríky", že auto má „štyri kolesá" a „jeden volant", že „Snehurka má sedem trpaslíkov". Táto registrácia sprvoti intuitívna a polovedomá sa postupne zvedomuje, ale ostáva stále v zajatí konkrétnosti modelu. Niet ešte vzťahu medzi „dva cukríky" a „dva prsty". Tak vyzerá etapa druhá, etapa separovaných modelov — skúseností.

Mnohonásobným opakovaním rovnakých javov dochádza dieťa ku poznaniu (opäť je to najprv polovedomé), že kvantitatívne situácie je možné modelovať na prstoch. Pod oknom stáli tri autá. Počul som, že jedno naštartovalo a odišlo. Koľko je pod oknom áut? Dieťa vystrie tri pršteky, jeden zahne a odpovie: „dve autá". Prsty sa stávajú univerzálnym modelom. Druhým univerzálnym modelom je potom počítadlo. Pochopením, že ľubovoľnú kvantitatívnu situáciu možno modelovať na prstoch či počítadle sa končí tretia etapa poznávacieho procesu.

Štvrtá etapa je reprezentovaná objavom čísla. Číslo „tri" je zovšeobecnením toho, čo je spoločné nielen pre „tri cukríky", „tri vlasy deda vševeda", či „tri sestry" (nie nutne od Čechova). Číslo „tri" je zovšeobecnením aj univerzálnych „tri guľky počítadla". Objav čísla je prvý veliký abstrakčný zdvih. Pre dieťa je tento objav značne náročný.

Kryštalizácia, ako piata etapa poznávacieho procesu, je v tomto prípade dosť chudobná. Niet tu totiž žiadnej už vybudovanej štruktúry, v ktorej by sa nový poznatok mal domestikovať. Naopak, vznikajúci pojem čísla je základným kameňom rodiacej sa abstraktnej štruktúry. Preto pod kryštalizáciou môžeme v tomto prípade vidieť vlastne iba zpätné pôsobenie abstraktného pojmu do konkrétnych modelov — tentoraz náročnejších na životné skúsenosti (počítanie časových údajov, počítanie úkonov, počítanie velikých množín, počítanie častí a pod).

Záverečná šiesta etapa, automatizácia, do vlastného poznávacieho procesu nenáleží. Nie je stimulovaná potrebou orientovať sa v elementárnych kvantitatívnych situáciách, ale potrebou uvoľniť psychiku na riešenie náročnejších úloh — napríklad operácií so zlomkami.

Konfrontujme teraz opísaný poznávací proces s realitou. Tá je plne v područí základného cieľa učiteľových snáh: naučiť deti dobre počítať. Pokiaľ možno všetky a čo v najkratšom čase. Kritérium úspešnosti práce učiteľa je potom istota a rýchlosť, s ktorou deti odpovedajú (písomne či ústne) na otázky typu "koľko je päť a sedem?“ Na prvý pohľad sa zdá tento postup úplne prirodzený. Problematičnosť takéhoto hodnotenia však jasne vystúpi, akonáhle podrobíme realitu konfrontácii s etapovou analýzou poznávacieho procesu (podrobnejšie o probléme v článku [4]).

Čo stimuluje dieťa k poznávaciemu procesu? Je to snáď potreba orientovať sa v živote? Alebo je to potreba pomôcť hrdinovi rozprávky? Sotva. Predovšetkým je to potreba vyhovieť edukátorovi – rodičovi či učiteľovi. Dospelý vie, prečo sa dieťa má učiť počítať a nepovažuje za dôležité presvedčiť o tejto potrebe aj dieťa. Má predsa rýchlejšie a účinné prostriedky, ako nanútiť poznávací proces. A tak stimulom poznávacieho procesu, prvého poznávacieho abstrakčného náročného procesu, s ktorým sa dieťa v živote stretá, nie je túžba poznávať, ale nutnosť vyhovieť dospelým.

Ako vyzerá etapa výuky druhej a tretej etapy? Z hľadiska základného výukového cieľa sa obe tieto etapy javia učiteľovi ako „iba prípravné“, bez skutočného poznávania. Preto sa učiteľ snaží obe etapy zredukovať na minimum, aby mu ostalo dostatok času na nácvik toho podstatného – skutočného počítania. Preto sa separovanými modelmi zapodieva iba krátko a rýchlo privádza dieťa ku počítadlu, aby mu demonštroval univerzálny model. Preto prechod od separovaných modelov k univerzálnemu modelu nevzniká ako prirodzený rozvoj psychiky, ako uplatnenie dialektického zákona o premene kvantity na kvalitu, ale ako vynútené imitovanie cudzej skúsenosti. Avšak ani pri univerzálnom modeli sa dlho nepobudne. Väčšina detí stačí sotva si univerzálny model osvojiť a už je tu jeho zákaz. Učiteľ potlačuje prsty aj počítadlo a začína sa „počítanie zpamäti“, s tendenciou zrýchľovania výkonu. Učiteľ sa sústreďuje na záverečnú etapu poznávacieho procesu, na automatizáciu. Z hľadiska uvedených analýz vidíme, že jadro poznávacieho procesu sa učiteľovi javí ako nepodstatné a ťažisko hľadá tam, kde už vlastne ide o problematiku iného stimulu.

Ako reaguje dieťa na takto deformovaný proces výuky? Stratégia dieťaťa sa musí prispôsobiť daným podmienkam. Dieťa rýchlo nadobúda skúsenosti o tom, že úspešnejšia ako rodiaci sa orgán „matematického myslenia“ je pamäť. Je rýchla, bezpečná, nenáročná na psychickú energiu. Dieťa sa nesnaží látku pochopiť, ale získať dobrú kondíciu v rýchlom odriekavaní výsledkov. Zdokonaluje pamäť, ale nie kauzálne myslenie. Nedostatok myslenia sa neprejaví ihneď, lebo kritériá, ktorými dieťa hodnotíme, sú zamerané výlučne na testovanie momentálnej kondície v odriekávání výsledkov. Nedostatok myslenia a chýbajúce skúsenosti s kvantitatívnymi javmi sa vynoria až vtedy, keď sa tieto jevy stanú predpokladom novej vyššej abstrakcie. A to sú zlomky. Preto je so zlomkami toľko starostí.

Tragická na celej veci je tá skutočnosť, že k opísanému deformovaniu dochádza v najlepšej snahe učiteľov naučiť, vychovať, zapáliť pre matematiku. Námaha učiteľov nenachádza náležitú odozvu preto, lebo platí (*).

Nedorozumenie s pojmom limity

To, čo sú zlomky pre učiteľa ZDŠ, to je pojem limity pre vysokoškolského učiteľa: kameň úrazu. V prvom prípade sme poukázali na deformovanosť poznávacieho procesu tak, že sme napred uviedli poznávací proces zdravý a ten sme potom konfrontovali s realitou. Rovnako budeme postupovať i teraz, iba že využijeme toho, čo nám v tomto prípade ponúka história: presnú znalosť fylogenézy poznávacieho procesu.

Stimulom infinitezimálnych úvah boli jednak potreby praxe – určiť dĺžku kružnice či špirály, vypočítať plošný obsah útvarov ohraničených krivkami, jednak impulzy špekulatívneho ducha Helénov – napríklad Zenonova aporija s Achilom a korytnačkou. Staroveku sa podarilo získať niekoľko konkrétnych výpočtov (modelov) a EUDOXOS s ARCHIMÉDOM rozpracovali exhaustačnú teóriu, ktorú dnes môžeme považovať za jeden z univerzálnych modelov časti „integrovanie". Ďalej sa Gréci nedostali.

Renezancia obnovila problém infinitezimálnych veličín. Okrem spomínaných dvoch stimulov pribudli stimuly ďalšie a rozhodujúce: potreba početne zvládnuť širokú škálu oblých kriviek, plôch a telies, potreba pochopiť mechaniku, najmä dynamiku, potreba študovať geometrickú optiku a pod. Široká stimulačná škála vyvolala rovnako širokú škálu separovaných modelov: DESCARTES, HUYGENS, KEPLER, CAVALLIERI, ROBERVAL, FERMAT, BARROW, WALLIS a ďalší. Každý z nich prispieva niečím novým, každý z nich dáva pojmu „nekonečne malá veličina" nový aspekt. Všetci ale pracujú na konkrétnej materii a v súvislosti s ňou a jej charakterom prispievajú ku spoločnému poznávaniu. Tak napríklad Kepler sám spočítal do stovky objemov rotačných telies. Metóda, ktorú Kepler použil, môže byť považovaná za univerzálny model. Podobne v roli univerzálneho modelu slúžia ďalšie konkrétne techniky výpočtu: Cavallieriho geometrická a Wallisova algebraická „integračná" metóda, Fermatova metóda hľadania dotyčníc a pod.

Čas štvrtej etapy sa naplnil. Podstatu infinizimálneho počtu – derivovanie a integrovanie ako dve inverzné operácie – objavujú skoro súčasne NEWTON a LEIBNIZ. Nový poznatok sa narodil a ihneď sa vydal na víťaznú cestu do matematiky.

Nastupuje etapa piata – kryštalizácia. Rozpracúvajú sa nové a nové metódy integračné, spresňuje sa pojem funkcie, v algebre sa objavujú úplne nové problémy, objavujú sa diferenciálne rovnice, nastáva zásadná reštrukturalizácia mechaniky, EULER preniká do tajov variačných problémov. Impozantný výbuch vedeckého poznania.

To všetko však dnes neplatí – veď nikto z týchto ľudí vlastne nevedel, čo počíta – žiaden z nich nevedel, čo je to limita. $\varepsilon - \delta$ zaklínadlá sa mali narodiť až 100 rokov po Eulerovej smrti, notabene z pohnútok iných, ako bola potreba pochopiť fyzikálny mikrosvet infinitezimálneho.

Ako sa uskutočňuje výuka týchto myšlienok na vysokej škole? My matematici, v najlepšej snahe dať svojim žiakom hlboké poznanie a vedátorský zápal, ideme do boja pod heslom „$\varepsilon - \delta$". Sme si vedomí náročnosti úlohy, ale desíme sa predstavy, že by sme bludmi o „nekonečne malom" vychovávali podobných poloznalcov, ako boli Lagrange či Euler. A preto situácia vyzerá takto:

Prvé stretnutie študenda s limitou je rozpačité. Nevie prečo, nevie načo. Učiteľ mu demonštruje to, čo dejiny preverili a osnovy predpisujú. On, študent berie na vedomie. Potom príde teória – definícia, veta, dôkaz; jedna, druhá, tretia, ... Študent stále nevie načo a prečo. Snaží sa pochopiť, ale márne. Chýba stimulácia, niet modelov ani univerzálnych modelov, niet ani toho prvotného poznania Newtonovho a Leibnizovho. Začína sa hneď poznaním na druhom poschodí. Študent sa snaží preniknúť do tajov limity, zväčša však bezúspešne. A tak ako jeho mladší priateľ v 1. triede ZDŠ aj on sa obráti na osvedčenú pamäť podopretú o dokonalú sústavu ťahákov. Áno, je pravda, že príde doba, kedy študent pochopí podstatu. Bude to však zásluha príkladov a aplikácií, ktoré aspoň dodatočne vyplnia vákuum modelov a univerzálnych modelov. Málokedy sa však študentovi podarí preniknúť do záhad tak, aby sa sám mohol pustiť do neprebádaných končín. Vie iba imitovať, nevie tvoriť. Je schopný registrovať myšlienky cudzie, ale neverí, že by mohol prispieť myšlienkou vlastnou.

Taká je skutočnosť. Nie je to vina učiteľa a v žiadnom prípade za tento stav nemôže žiak. Učiteľ vidí krásnu stavbu matematiky a má vrúcnu túžbu preniesť ju do mysle a srdca študenta. Z neznalosti zákonitosti komunikácie si však počína ako záhradník, ktorý v snahe urýchliť rast kvetu, povyťahuje ho zo zeme.

Záver

Na začiatku sme povedali, že naším cieľom nie je iba akademická analýza problému, teoretické odhalenie príčin, ale zároveň i hľadanie nových východísk. Domnievame sa, že oboje je z článku vidieť. Analýza bola uvedená explicítne. Z nej vychádza aj konkrétny návod na prácu učiteľa:

Nestačí sa pri výuke matematiky opierať o štruktúru matematickú. Výuku každej témy je potrebné oprieť na znalosti genézy (ontogenézy i fylogenézy) myšlienok, ktoré sú témou reprezentované. Kostrou tejto genézy je schéma piatich (šiesta tam už vlastne nepatrí) hore opísaných etáp. Najčastejší omyl učiteľa, ktorý svoju disciplínu vidí z niekoľkoposchodového nadhľadu teoretika je v tom, že nedocení zásadný význam a zmysel prvých troch etáp poznávacieho procesu. V tom je podstata nedorozumenia (*).

V súčasnosti u nás začína „množinová matematika" na ZDŠ. Nepochybujeme, že prvé ohlasy budú priaznivé. Učitelia budú sami spočiatku pociťovať potrebu prvých troch etáp, a preto ich budú realizovať aj vo vyučovacom procese. Otázne je, čo sa stane, keď získaním „pevnej pôdy pod nohami" učitelia stratia túto potrebu. Nedopadneme tak ako v niektorých iných zemiach?

Literatúra

[1] P. Ja. Gal'perin: *Vvedenie v psichologiju.* Moskva 1976.

[2] A. N. Leontijev: *Dejatel'nosť, soznanie, ličnosť.* Moskva 1975.

[3] D. J. Struik: *Dejiny matematiky.* Praha 1963.

[4] V. Hejný - M. Hejný: *Formovanie matematických predstáv.* Obzory 1972.

„V nižším gymnasiu se podává poměrně velmi málo nového, na vyšším gymnasiu zase mnoho a z části zbytečného. Kdežto vědám zajímavějším jako fysice, lučbě, přírodopisu a dějepisu se poměrně málo věnuje, přednáší se mathematika po 8 let. Pročež by se mělo přiměřenější rozdělení látky zavésti.

Mathematika stala by se oblíbenější a zajímavější, kdyby při každé partii hodně příkladů a úloh hlavně z praktického života se podávalo a to tím více při nahoře naznačených."