Jaroslav Lukeš; Ivan Netuka

III. Mezinárodní matematická soutěž vysokoškoláků

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 23 (1978), No. 2, 94--96

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139654

vyučování

III. Mezinárodní matematická soutěž vysokoškoláků

Jaroslav Lukeš, Ivan Netuka, Praha

Přírodovědecká fakulta bělehradské univerzity pořádala 2. 3. 1977 III. mezinárodní matematickou soutěž vysokoškolských studentů (ISTAM 1977, Beograd). Tato soutěž se konala již podesáté, první ročníky byly pouze národní. Soutěž je organizována jednak jako soutěž tříčlenných družstev, jednak jako soutěž jednotlivců. Soutěží se ve dvou kategoriích. První je určena pro studenty 1. a 2. ročníku a řeší se v ní 4 úlohy (letos byly 3 z matematické analýzy a 1 z lineární algebry). V druhé kategorii, v níž soutěží studenti vyšších ročníků, se řeší po dvou úlohách ze dvou předem vybraných oborů (funkcionální analýza, topologie, teorie funkcí komplexní proměnné, diferenciální rovnice, teorie pravděpodobnosti, syntetická a analytická geometrie, vyšší algebra, programování). Družstva jsou tříčlenná a mohou být složena jak z účastníků první, tak i druhé kategorie. Vlastní soutěž trvá čtyři hodiny a písemně vypracovaná řešení jsou hodnocena mezinárodní jury.

Letošního ročníku se zúčastnilo celkem 18 družstev: Maďarsko (2), Rakousko (1), ČSSR (1 družstvo-MFF UK Praha), Jugoslávie (14 družstev). V soutěži si nejlépe vedli studenti z Budapešti. Obsadili všechna první místa (v soutěži jednotlivců i družstev). Všichni tři studenti z MFF UK soutěžili v 1. kategorii, kde mezi 22 účastníky obsadili 2., 3. a 7. místo. Pěkné 2. místo získal Jan Malý, posluchač 2. ročníku. V soutěži družstev se naši studenti umístili na čtvrtém místě. Před námi skončila družstva, která většinou měla účastníky druhé kategorie, a v této kategorii se – letošního roku – body získávaly přece jen trochu snadněji.

Soutěž byla po organizační stránce velmi pěkně zajištěna, atmosféra celého pobytu byla přátelská a vyznačovala se obětavostí a pozorností ze strany pořadatelů-studentů. Kromě oficiálního zahájení soutěže a vyhlášení vítězů byla organizována řada neformálních diskusí a pro účastníky byl připraven kulturní program, jakož i celodenní výlet do Titovy Užice. Tam si účastníci prohlédli muzeum národního povstání a jednotlivé delegace pak položily věnce k pomníku padlých partyzánů.

Úlohy III. ročníku ISTAM

1. kategorie (1.–2. ročník studia):

1. Rozhodněte, zda existuje posloupnost $\{a_n\}$ kladných čísel tak, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} \cdot a_{n+2} \ldots a_{n+m})^{1/m}$$

konverguje pro každé sudé m a diverguje pro každé m liché.

2. Buď A regulární matice typu (n, n) taková, že $a_{ij} \leqq 0$ pro $i \neq j$ a že existují kladná čísla λ_j $(j = 1, \ldots, n)$ tak, že $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_{ij} \geqq 0$ pro každé $i = 1, \ldots, n$. Dokažte, že soustava $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ má řešení s nezápornými složkami, kdykoli vektor $\boldsymbol{b}$ má nezáporné složky.

3. Nechť f, g jsou spojité funkce na $\langle a, b\rangle$, které mají derivaci zprava v každém bodě intervalu $\langle a, b)$. Jestliže $|f'_+(x)| \leqq g'_+(x)$ pro všechna $x \in \langle a, b)$, potom $|f(b) - f(a)| \leqq g(b) - g(a)$. Dokažte.

4. Nechť funkce $f : \langle -1, +1\rangle \to R$ má derivaci 5. řádu.

(a) Určete reálná čísla A, B, D, C, E tak, aby platilo
$$Af(2h) + Bf(h) + Cf(0) + \\ + Df(-h) + Ef(-2h) = f''(0) \,. \\ . \, h^2 + O(h^5).$$

(b) Existují vždy takové konstanty v případě, že funkce f má derivaci 4. řádu?

2. kategorie (3.–5. ročník studia):

Funkcionální analýza:

1. Nechť $\prec$ je uspořádání množiny $\langle 0, 1\rangle$ takové, že pro každé $y \in \langle 0, 1\rangle$ je množina $\{x; x \prec y\}$ spočetná. Rozhodněte, zda $\{(x, y); x \prec y\}$ je měřitelná.

2. Buď X reálný Banachův prostor a $x_1, \ldots, x_n \in X$. Je množina
$$\{\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n;\ \lambda_i \geqq 0\}$$
uzavřená?

Topologie:

1. Nechť X je kompaktní a Y libovolný topologický prostor, $F \subset X \times Y$ neprázdná uzavřená podmnožina; $p_1 : X \times Y \to X$, $p_2 : X \times Y \to Y$ buďte projekce. Dokažte, že pro každé $y_0 \in p_2(F)$ a každé okolí U množiny $p_1(F \cap p_2^{-1}(\{y_0\}))$ existuje okolí V bodu y_0 v Y tak, že pro každé $y \in V$ platí
$$p_1(F \cap p_2^{-1}(\{y\})) \subset U \,.$$

2. Nechť f, g jsou spojitá zobrazení intervalu $\langle 0, 1\rangle$ do sebe taková, že $f \,.\, g = g \,.\, f$.
Dokažte, že existuje $x \in \langle 0, 1\rangle$ tak, že $f(x) = g(x)$.

Komplexní proměnná:

1. Nechť $f : K \to \mathbf{C}$, $K = \{z \in \mathbf{C};\ |z| < 1\}$, je prostá holomorfní funkce taková, že $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$. Dále buď $F : K \to \mathbf{C}$ holomorfní funkce, pro niž $(F(z))^n = f(z^n)$. Dokažte, že F je prostá.

2. Nechť $f : \langle a, b\rangle \to \mathbf{C}$, $f \in C^2$ a nechť pro každé $t \in \langle a, b\rangle$ platí $|f'(t)| \geqq 1$ a $|f''(t)| \geqq |f(t)|$.
Dokažte nerovnost
$$\int_a^b |f''(t)| \, \mathrm{d}t \geqq b - a - 2 \,.$$

Diferenciální rovnice:

1. Nechť f je spojitá funkce na R, $\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$. Může mít rovnice $y'' + f(x) \,.\, y = 0$ řešení, které není omezené pro $x \to +\infty$?

2. Má rovnice $y' = (y^2 - 1)(y - f(x))$ nekonstantní periodické řešení pro každou spojitou periodickou funkci $f(x)$?

Teorie pravděpodobnosti:

1. Buď $\lambda \in (0, 1)$. Rozhodněte, zda existuje pravděpodobnostní prostor (Ω, F, P) a posloupnost nezávislých skoro všude nekonstantních náhodných veličin $\{x_n\}$ definovaných na (Ω, F, P) tak, že F neobsahuje žádný element, jehož P-míra by byla rovna λ.

2. a) Nechť $0 \leqq a < b$ a nechť U, V jsou náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením na $\langle a, b\rangle$. Dokažte:

$$\tfrac{1}{6}(a^2 + 4ab - b^2) \leqq E(UV) \leqq$$
$$\leqq \tfrac{1}{3}(a^2 - ab + b^2)\,.$$

b) Nechť X_n a Y_n jsou náhodné veličiny, rovnoměrně rozdělené na intervalu $\langle 0, n \rangle$, které jsou definovány na stejném pravděpodobnostním prostoru. Nechť platí

$$X_n^{-1}(\langle m - 1, m \rangle) = Y_n^{-1}(\langle m - 1, m \rangle)\,,$$
$$m = 1, \ldots, n\,.$$

Dokažte, že pro korelační koeficient ϱ_n mezi X_n a Y_n platí nerovnost $1 - 2/n^2 \leqq \leqq \varrho_n$.

Vyšší algebra:

1. Nechť $(G, +)$ je Abelova grupa, jejíž každý element má řád 2 (tj. $x + x = 0$). Rozhodněte, zda lze na G definovat operaci násobení tak, aby $(G, +, .)$ byl Booleův okruh (tj. okruh s jednotkou, v němž $x^2 = x$).

2. Rozhodněte, zda platí: na množině celých čísel lze definovat násobení pomocí sčítání, odčítání a umocňování na libovolný lichý exponent (tj. existuje výraz $t(x, y, +, -, ^3, ^5, \ldots)$ tak, že $x \,.\, y = t(x, y, +, -, ^3, ^5, \ldots)$).

Geometrie:

1. V rovině π jsou dány dva shodné, opačně orientované trojúhelníky ABC a $A'B'C'$. Dokažte s použitím pouze axiómů absolutní geometrie, že středy P, Q, R úseček AA', BB', CC' leží na jedné přímce.

2. V prostorové geometrii Lobačevského dokažte, že každé dvě mimoběžky mají jedinou společnou příčku, která je k oběma kolmá.

Programování:

Text úloh není k dispozici.

Programovaná výuka ve fyzice na vysokých školách

Jaroslav Sommer, Ostrava

Programovaná výuka ([1] až [4]) tvoří dnes vědní úsek, jehož permanentní rozvoj se dá sledovat v příslušných odborných časopisech, jako např. u nás snadno dostupné *Programmirovannoje obučenije* nebo *Programmiertes Lernen, Unterrichtstechnologie und Unterrichtsforschung*. A přestože se teorie programovaného vyučování rozrůstá do šířky i do hloubky ([5] až [8]), prosazuje se praktické uplatnění této metody jen velmi zvolna. Obtížnost a časová náročnost odrazují většinu autorů od tvorby programovaných učebnic. Zvláště na VŠ stále převládá mezi pedagogy názor, že metody programované výuky se zde nemohou dobře uplatnit, protože studované problémy jsou příliš složité. Alespoň mezi fyziky tento názor naprosto převládá. Zatímco středoškolských programovaných učebnic byla již vydána celá řada, programované vysokoškolské učebnice se objevují jen ojediněle v některých oborech fyziky. Na řadě VŠ v SSSR (Moskva, Kyjev, Vladimir) jsou v poslední době každoročně vydávány sborníky prací z programované výuky, ale jen na úrovni středoškolské fyziky.

Poněkud jiná je situace ve cvičení z fyziky na VŠ. Dnes již řada vysokoškolských pedagogů zastává názor, že zvláště v seminárním cvičení ze základů fyziky mohla by se programovaná výuka dobře uplatnit. Toto cvičení má za úkol [9] naučit posluchače v prvé řadě samostatně řešit problémy zadávané ve formě úloh z fyziky, a protože algoritmus řešení každé takové