Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Donald E. Knuth

Nadreálná čísla

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 23 (1978), No. 2, 66--76

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139649

Nadreálná čísla

Povídka o tom, jak dva bývalí studenti matematiky skrze matematiku ke štěstí došli

*Donald E. Knuth, Stanford, California, USA**)

Autor knihy Nadreálná čísla *je dobře znám především svými pracemi z oboru výpočetní techniky* (*hlavně* The Art of Computer Programming). *Záměry, které sledoval sepsáním předkládané knihy, vysvětlil svým čtenářům v originále knihy v první části doslovu. Tato část doslovu je v překladu zařazena jako předmluva.*

Pro doplnění zde pouze poznamenejme, že předkládaný text lze brát vážně nejenom po stránce metodické, ale i po stránce odborné. Kniha obsahuje základy Conwayova zobecnění Dedekindovy a Cantorovy výstavby číselného systému. Conwayův číselný systém vznikl při analýze kombinatorických her, má však aplikace i ve výpočetní technice. Bližší informace najde čtenář v knihách: J. H. Conway: On Numbers and Games, *Academic Press (1976) a E. R. Berlekamp, J. H. Conway, R. K. Guy:* Winning Ways, *Freeman (1977).*

Druhá část originálního doslovu, která obsahuje metodické poznámky a doplňková cvičení k textu, bude uvedena za závěrečnou částí překladu. (Pozn. překladatelky.)

Předmluva

Zesnulý maďarský matematik Alfréd Rényi napsal tři podnětné *Dialogy o matematice*, které byly vydány roku 1967 v San Francisku nakladatelstvím Holden - Day. První dialog, který je situován do starověkého Řecka kolem roku 440 př. n. l., představuje Sokrata a jeho ústy velice pěkným způsobem popisuje podstatu matematiky. Druhý dialog, který se údajně odehrál roku 212 př. n. l., obsahuje stejně pěknou Archimedovu rozmluvu o aplikacích matematiky. Třetí se týká matematiky a vědy a Rényi v něm dává ožít postavě Galilea, který k nám promlouvá asi z roku 1600 n. l.

Nadreálná čísla jsem napsal jako matematický dialog sedmdesátých let tohoto století. Snažil jsem se v něm zdůraznit podstatu tvořivé matematické práce. Tento text jsem napsal hlavně pro zábavu, a proto doufám, že i čtenáři si z něho odnesou trochu potěšení. Přiznávám však, že mě k jeho napsání vedl i jiný závažný důvod. Chtěl jsem jím poskytnout materiál, který by pomohl překlenout jeden z nejzávažnějších nedostatků současného vzdělávacího systému, totiž nedostatečnou průpravu pro výzkumnou práci.

---

*) V tomto čísle začínáme otiskovat překlad knížky D. E. Knutha *Surreal Numbers*, která vyšla v roce 1974 v nakladatelství Addison-Wesley. Zbývající části překladu vyjdou v číslech 3, 4, a 5 tohoto ročníku. Přeložila Helena Nešetřilová.

Student má totiž před ukončením vysoké školy*) jen velice málo příležitostí k tomu, aby poznal, jak skutečně vzniká nová matematika.

Řekl jsem si, že „tvůrčí práci“ se nikdo nenaučí pomocí učebnice a že by účelu lépe posloužil nějaký „anti-text“ jako třeba tato povídka, snažil jsem se proto napsat pravý opak Landauových *Grundlagen der Mathematik*. Chtěl jsem ukázat, jak se matematika může dostat ze tříd a posluchárен ven do skutečného života a snažil jsem se přimět čtenáře k tomu, aby ke zkoumání abstraktních matematických myšlenek používal vlastní hlavu.

Připadá mi, že nejlepší způsob, jak někoho zasvětit do metodiky matematického výzkumu, je seznámit ho s detailním studiem nějakého případu. Nedávno vzniklá Conwayova teorie čísel mi z tohoto hlediska připadala jako výborný prostředek, na kterém lze dobře ilustrovat důležité aspekty matematického výzkumu. Je to totiž teorie bohatá, která však nevyžaduje téměř žádné předběžné znalosti, přitom souvisí jak s algebrou, tak s analýzou a navíc je ještě stále z velké části neprozkoumána.

Chtěl jsem tedy říci, že mým hlavním cílem nebylo naučit někoho Conwayovu teorii, ale naučit ho, jakým způsobem postupovat při vytváření takové teorie. Zachytil jsem proto v knize nejen to, jak dvě hlavní postavy zkoumají a postupně budují Conwayův číselný systém, ale i jejich chybné začátky a omyly spolu s dobrými nápady. Snažil jsem se pokud možno věrně zachytit důležité zásady matematiky, její metody, radosti, vášně i její filozofii.

Napsal jsem povídku tak, jak jsem já sám při zkoumání postupoval, aniž bych při tom používal nějakých vnějších pramenů. Mým jediným vodítkem byla mlhavá vzpomínka na rozhovor, který jsem měl s Johnem Conwayem asi před rokem při obědě.

Tato kniha je určena především studentům matematiky zhruba ve druhém a třetím ročníku studia. V rámci tradiční výuky se dá zřejmě nejlépe použít buď jako A. doplňkový text k přednáškám „Úvod do abstraktní matematiky“ nebo „Matematická logika“, nebo B. jako hlavní text v semináři pro posluchače nižších ročníků, který je zaměřen na výchovu studentů k samostatné práci.

1. Kamenná deska

A. Tak co, Bille, myslíš si, že jsme tu našli sami sebe?

B. Cože?

A. Podívej, žijeme tu spolu už několik měsíců. Tady, na břehu Indického oceánu, je civilizace a všechno, co k ní patří a před čím jsme utíkali, pěkně daleko. Když jsme odcházeli, říkali jsme si, že tu „najdeme sami sebe“, tak mě zrovna napadlo, jestli si myslíš, že se nám to podařilo.

B. Alice, já se ti přiznám, právě jsem na to taky myslel. Prožil jsem tu s tebou báječnou dobu a konečně si připadám zase jako člověk. Ale v poslední době jako by mi něco scházelo ... něco z toho, před čím jsme utíkali. Dostal jsem třeba strašnou chuť

*) V originálu: ... until students reach graduate school. (Pozn. př.)

přečíst si nějakou knížku. Ty si určitě budeš myslet, že jsem cvok, ale já bych už přečetl i matematickou učebnici. Jak tu tak ležím, vzal bych za vděk i obyčejnou křížovkou.

A. S tou křížovkou to, doufám, nemyslíš vážně, ale celkem ti rozumím. Připomíná mi to konec prázdnin. Jako malá holka jsem se nikdy nemohla dočkat konce školního roku, vždycky už od května se mi dny až do začátku prázdnin pomalu a nudně vlekly, ale v září jsem byla kupodivu nějak ráda, že jsem zase zpátky ve škole.

B. Mám tady chléb, víno a ženu po boku a nemohu zrovna říct, že se mi dny nudně vlečou, ale přesvědčil jsem se tu na vlastní kůži, že prostý a romantický život mi ke štěstí nestačí. Potřebuju něco komplikovanějšího, potřebuju o něčem přemýšlet.

A. Když pro tebe nejsem dost komplikovaná, tak nejsem, co se dá dělat, proto ti navrhuju, abychom se radši zvedli a vydali se na průzkumnou cestu po pláži. Třeba najdeme něco zajímavého a budeme s tím moct něco podniknout.

B. (si sedá) To není špatný nápad, ale napřed si jdu zaplavat.

A. (běží do vody) Já taky, o co, že mě nechytíš?

. . . . .

B. Podívej, Alice, co je to tamhle? Vidíš to? Nějaký podivný černý kámen a je skoro celý zasypaný pískem.

A. Co to je, to teda nevím, nic mi to nepřipomíná, ale podívej se, tady vzadu jsou nějaké zvláštní škrábance.

B. Ukaž ... pojď, vyhrabeme ho, vypadá skoro jako z muzea a navíc je pěkně těžký. A to, čemu ty říkáš škrábance, mi připadá jako nějaké staré arabské znaky ... nebo počkej, mohla by to být i hebrejština, musím si to otočit vzhůru nohama.

A. Hebrejština ...?

B. Jo, kdysi jsem se trochu hebrejsky učil a zdá se mi, že bych to mohl přečíst.

A. Archeologové to tu ještě moc neprozkoumali, takže máme naději, že jsme našli novou Rosettskou desku nebo něco takového. Vyluštil už jsi z toho něco?

B. Počkej, nech mě chvilku ... Tady vpravo nahoře to začíná nějak jako: „Na počátku všeho byla prázdnota a ...“

A. Páni, to začíná jako bible, první kniha Mojžíšova. Nemyslíš, že ...

B. Nemyslím. Tohle má totiž úplně netradiční pokračování. Vezmeme si ten kámen s sebou, mám dojem, že se mi to podaří přeložit.

A. Ale Bille, to je přece přesně to, co jsi potřeboval!

B. Ještě že jsem říkal, že umírám touhou po nějakém čtení. Nemyslel jsem tím sice přesně tohle, ale už se vůbec nemohu dočkat, až se na to budu moct pořádně podívat. Není mi zatím úplně jasné, jestli je to povídka nebo co. Je tu něco o číslech a ...

A. Tak se mi zdá, že se to tady vespod ulomilo, kámen byl asi původně větší.

B. To je naše štěstí, jinak bychom s ním asi vůbec nehnuli. I když tuším, že se nápis stane zajímavý právě tam, kde je kámen ulomený.

A. Tak se můžeš pustit do překládání. Já ti s tím asi moc nepomohu, protože jazyky nejsou moje silná stránka. Půjdu radši sehnat něco k večeři, mohu třeba natrhat nějaké ovoce, co bys říkal datlím?

. . .

B. Tak, Alice, už to mám. Na několika místech si sice nejsem úplně jist, neznám několik znaků, ale to budou asi nějaké archaismy. Celkem myslím, že vím, co tu stojí. Poslouchej, tohle je téměř doslovný překlad:

Na počátku všeho byla prázdnota a J. H. W. H. Conway začal tvořit čísla. I řekl Conway: „Nechť jsou dvě pravidla, která všechna čísla vytvářejí, malá i velká. Toto budiž pravidlo první: Každé číslo nechť odpovídá dvěma množinám čísel už stvořených tak, že žádný prvek množiny levé není větší nebo roven žádnému prvku množiny pravé. A toto budiž pravidlo druhé: Jedno číslo je menší nebo rovno číslu druhému tehdy a jen tehdy, když žádný prvek z levé množiny prvého čísla není větší nebo roven druhému číslu a žádný prvek z pravé množiny druhého čísla není menší nebo roven číslu prvému“. I prozkoumal Conway tato dvě pravidla, která vytvořil a ejhle, byla dobrá.

A prvé číslo bylo stvořeno z prázdnoty levé množiny a prázdnoty pravé množiny. I nazval Conway toto číslo „nulou“ a řekl, že bude znamením oddělujícím čísla kladná od čísel záporných. Dokázal Conway, že nula je menší nebo rovna nule a viděl, že je to dobré. I byl večer, a bylo jitro, den nuly. Příštího dne byla stvořena další dvě čísla, jedno s nulou jako levou množinou a jedno s nulou jako pravou množinou. I nazval Conway prvé číslo „jedničkou“ a druhé nazval „minus jedničkou“. A dokázal, že minus jednička je menší, ale nerovna nule a nula že je menší, ale nerovna jedné. A byl večer ...

A dál je kámen ulomený.

A. Ty ... myslíš, žes to přeložil správně?

B. Trochu jsem to sice upravil, ale snad jo.

A. Já jen, že Conway není hebrejské jméno. Nepřidáváš si něco?

B. To jméno může být sice trochu jiné, protože ve staré hebrejštině se nepsaly samohlásky, třeba Keenawu, možná i něco jako Khans, ale to spíš ne. Dělal jsem překlad do angličtiny, tak jsem si vybral i anglický jméno, na kameni je to tuhle, podívej se. A J. H. W. H. může třeba znamenat Jehovah.

A. Bez samohlásek ... tak to by mohla být pravda, ale co si o tom všem vlastně myslíš?

B. Vím toho právě tolik co ty, dvě bláznivá pravidla pro čísla ... Snad je to nějaká předpotopní aritmetická metoda, která byla zastaralá už v době kamenné. Mohli bychom zítra vyzkoušet, co to dělá, třeba to bude legrace. Teď bych ale navrhoval, abychom se najedli a šli spát, za chvíli už bude tma.

A. Dobře, ale napřed mi to ještě jednou přečti, chtěla bych si to rozmyslet. Když jsi to četl poprvé, nebrala jsem tě vůbec vážně.

B. (ukazuje) „Na počátku všeho...“

2. Symboly

A. V noci jsem o tom přemýšlela a víš, co si myslím, Bille? Ten Conwayův kámen není vlastně tak úplně nesmyslný.

B. Taky jsem se tomu snažil přijít na kloub, ale usnul jsem dřív, než jsem něco vymyslel. Tak povídej, poslouchám.

A. Není to tak velká záhada, hlavní potíž je asi v tom, že na desce se všechno popisuje slovy. Podívej, co se stane, když se totéž vyjádří pomocí symbolů.

B. Snad tu desku nechceš dešifrovat pomocí moderní matematiky?

A. Moc mě to mrzí, ale připadá mi, že to půjde. První pravidlo potom říká, že každé číslo x je vlastně dvojice množin, nazvěme levou množinu x_L a pravou x_P:

$$x = (x_L, x_P) .$$

B. Moment, nemusíš kreslit do písku, tužku a papír snad přece jenom někde v ranci najdu. Počkej chvilku ... tak, tady to máš.

A.
$$x = (x_L, x_P) .$$

Přitom x_L a x_P nejsou čísla, ale množiny čísel a každé číslo v takové množině je samo dvojicí množin a tak dál.

B. Zadrž, tvoje značení mě plete, co je množina a co číslo.

A. Tak dobře, budu používat velká písmena pro množiny čísel a malá pro čísla. Conwayovo první pravidlo tedy zní

(1)
$$x = (X_L, X_P), \quad \text{kde} \quad X_L \ngeq X_P .$$

To znamená, že je-li x_L libovolné číslo z X_L a x_P libovolné číslo z X_P, pak musí splňovat $x_L \ngeq x_P$. A tohle znamená, že x_L není větší nebo rovno x_P.

B. (se škrábe na hlavě) Na mě je to ještě pořád moc rychle. Nezapomeň, že ty sis to už všechno rozmyslela, kdežto mě se to teprve začíná pomalu rýsovat. Když číslo je dvojice množin čísel a každé z nich je zase dvojice množin čísel atakdál atakdál, jak chceš vůbec začít?

A. No vidíš, to je právě to pěkné na Conwayově schématu. Každý prvek množin X_L a X_P musel už být vytvořen předem a pro první den tvoření, kdy ještě nebyla žádná čísla, se kterými by se dalo pracovat, se za X_L i X_P vzala prázdná množina.

B. V životě mě nenapadlo, že se dožiju dne, kdy prázdná množina bude mít nějaký rozumný smysl. To je teda skutečně tvoření něčeho z ničeho. Platí ale, že $X_L \ngeq X_P$, když jak X_L, tak X_P jsou prázdné množiny? Jak by se něco mohlo nerovnat samo sobě?

Vlastně jo, je to v pořádku, protože to znamená, že žádný prvek prázdné množiny není větší nebo roven libovolnému prvku prázdné množiny. To je pravdivé tvrzení, protože prázdná množina žádné prvky nemá.

A. Takže se to celé rozběhne docela dobře a dostaneme tak číslo, kterému se říká nula. Když pro prázdnou množinu použijeme symbol $\emptyset$, můžeme psát

$$0 = (\emptyset, \emptyset) .$$

B. To snad není možné.

A. Druhý den už se pak dá 0 použít v levé nebo v pravé množině, takže Conway dostane další dvě čísla

$$-1 = (\emptyset, \{0\}) \quad \text{a} \quad 1 = (\{0\}, \emptyset)\,.$$

B. Moment, zkontroluju to. Aby -1 byla číslo, tak musí platit, že žádný prvek prázdné množiny není větší nebo roven 0 a pro 1 musí platit, že 0 není větší než libovolný prvek prázdné množiny. Člověče, s tou prázdnou množinou to báječné funguje. Myslím, že se jednou odhodlám a napíšu knihu *O vlastnostech prázdné množiny.*

A. Nikdy bys ji nedokončil.
Jestliže X_L nebo X_P jsou prázdné, pak je podmínka $X_L \ngeqq X_P$ splněna vždycky, ať už je v druhé množině cokoliv. Což znamená, že se dá stvořit nekonečně mnoho čísel.

B. Dobře, ale co to druhé Conwayovo pravidlo?

A. To použiješ, když chceš zjistit, jestli $X_L \ngeqq X_P$ v případě, že jsou obě množiny neprázdné. Tohle pravidlo definuje menší nebo rovno.
Symbolicky zapsáno:

(2) $$x \leqq y \quad \text{znamená, že} \quad X_L \ngeqq y \quad \text{a} \quad x \ngeqq Y_P\,.$$

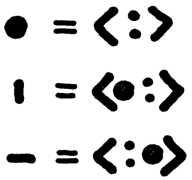
B. Počkej, už mě zase předbíháš. Podívej, X_L je množina čísel a y je číslo, tedy dvojice číselných množin. Co tím myslíš, když píšeš $X_L \ngeqq y$?

A. Myslím tím, že každý prvek z X_L splňuje $x_L \ngeqq y$. Jinak řečeno, žádný prvek z X_L není větší nebo roven y.

B. Aha, takhle to je. A tvoje pravidlo (2) ještě navíc říká, že x není větší nebo rovno žádnému prvku Y_P. Musím si to porovnat s textem ...

A. Na desce je to trochu jinak, ale $x \leqq y$ musí přece znamenat totéž jako $y \geqq x$.

B. Jo, máš pravdu. Ale moment, podívej se, co je tu vyryto na boku:



To jsou ty znaky, které jsem včera nemohl přečíst, ale s tvou symbolikou je to úplně jasné: tahle dvojtečka odděluje levou a pravou množinu. Určitě jsi na stopě!

A. Hele, rovnítka a všechno ostatní. Kameník, co tohle tesal, zřejmě používal 
pro -1. Skoro se mi víc líbí jeho značení než moje.

B. Tak se mi zdá, že jsme podcenili primitivní národy. Určitě nežili tak jednoduše, jak si dneska myslíme, a když se zrovna nemuseli starat o jídlo nebo o střechu nad hlavou, taky si občas potřebovali zaměstnávat mozkové závity. Asi si historii dost zjednodušujeme.

A. To jo, ale dá se to dělat nějak jinak?

B. Taky pravda.

A. Tak pojď, budeme pokračovat. Teď následuje kus textu, kterému nerozumím. Prvního dne tvoření Conway „dokazuje“, že $0 \leqq 0$. Proč se vůbec obtěžuje, aby dokazoval, že něco je menší nebo rovno samo sobě, vždyť rovnost musí přece platit? A druhý den “dokazuje“, že -1 není rovna 0, není tohle samozřejmé bez důkazu, když -1 je jiné číslo?

B. Víš co, pojď si radši zaplavat.

A. Proč ne, moře vypadá fajn a já nejsem moc zvyklá na tak dlouhé soustředění. Jdeme!

3. Důkazy

B. Něco mě napadlo, když jsme se koupali. Začal jsem pochybovat, že jsem to skutečně dobře přeložil.

A. Jak to? Podívej, kolik už jsme toho zkontrolovali, to přece musí být dobře.

B. Já vím, ale když jsem na to teď znova myslel, nebyl jsem si úplně jist slovem, které překládám jako „rovno“. Mohlo by mít slabší význam, třeba „podobno“ nebo „jako“. Druhé Conwayovo pravidlo by potom znělo: „Jedno číslo je *menší* než jiné číslo nebo *jako* toto číslo tehdy a jen tehdy ...“ A pak má smysl dokazovat, že nula je *menší* nebo *jako* nula, minus jednička je *menší* než nula, ale *ne jako* nula a tak dál.

A. Aha, to bude ono. Conway to slovo používá abstraktně, jako technický termín, který pak musí definovat pravidly. Takže se samozřejmě snaží dokázat, že 0 je menší nebo jako 0, aby si ověřil, že podle jeho definice je číslo *jako* ono samo.

B. A podaří se mu tohle dokázat? Podle pravidla (2) potřebuje ukázat, že žádný prvek prázdné množiny není větší než 0 nebo jako 0 a že 0 není větší nebo jako nějaký prvek prázdné množiny ... Hm, je to tak. Dva nula pro Conwaye a pro prázdnou množinu.

A. Ale jak se mu asi podařilo dokázat, že -1 není jako 0? Umím si to představit jedině tak, že se dokáže, že 0 není menší nebo jako -1. Myslím to takhle: podle pravidla (2) umíme říct, jestli nějaké číslo je menší nebo jako nějaké jiné číslo, a tedy jestliže x není menší nebo jako y, pak x není menší než y a x není jako y.

B. Aha, potřebujeme teda dokázat: není pravda, že $0 \leqq -1$. Použijeme pravidlo (2) pro $x = 0$ a $Y_P = \{0\}$, takže $0 \leqq -1$ tehdy a jen tehdy, když $0 \ngeqq 0$. Ale 0 je $\geqq 0$. to už víme, proto $0 \nleqq -1$. Takže Conway měl zase pravdu.

A. Myslíš, že zkoušel taky -1 a 1? Já bych řekla, že ano, i když v textu se o tom nic neříká. Jestli jsou jeho pravidla dobrá, musí se podle nich nechat dokázat, že -1 je menší než 1.

B. Tak to zkusíme: -1 je $(\emptyset, \{0\})$ a 1 je $(\{0\}, \emptyset)$, takže díky prázdné množině je zase podle pravidla (2) $-1 \leqq 1$. Na druhé straně $1 \leqq -1$ je totéž jako $0 \ngeqq -1$ a $1 \ngeqq 0$, tady používáme pravidlo (2), ale my víme, že ani jedno z posledních dvou tvrzení není v pořádku. Proto $1 \nleqq -1$ a to znamená, že $-1 < 1$. Vypadá to, že Conwayovi ta jeho pravidla fungují.

A. Zatím, ale to jsme až dosud používali skoro při každém důkazu vlastnosti prázdné množiny, všechny důsledky pravidel nejsou proto ještě úplně vidět. Všimni si, že všechno, co jsme zatím dokazovali, by šlo shrnout nějak takhle: „Jestliže X a Y jsou nějaké číselné množiny, pak $x = (\emptyset, X)$ a $y = (Y, \emptyset)$ jsou čísla a $x \leqq y$."

B. To se ti povedlo, moc se mi líbí, jak jsi právě dokázala nekonečně mnoho tvrzení formálně stejným způsobem, jako jsem to udělal já pro několik málo konkrétních případů. Tomuhle se přece říká abstrakce nebo zobecnění nebo tak nějak. Ale uměla bys taky dokázat, že to tvoje x je ostře menší než y? Pro moje jednoduché případy totiž tohle vždycky platilo a skoro bych se vsadil, že to bude platit i obecně.

A. Jen se neukvapuj, určitě to neplatí, když X a Y jsou obě prázdné, protože to by znamenalo $0 \ngeqq 0$. Ale jinak to vypadá dost zajímavě. Pojď zkusit třeba případ, kdy X je prázdná a Y neprázdná, je potom pravda, že 0 je menší než $(Y, \emptyset)$?

B. Jestli je, tak bych číslu $(Y, \emptyset)$ říkal „kladné". Tohle přece musel mít Conway na mysli, když říkal, že 0 odděluje kladná a záporná čísla.

A. No jo, ale podívej, podle pravidla (2) je $(Y, \emptyset) \leqq 0$ tehdy a jen tehdy, když žádný prvek Y není větší nebo jako 0. Takže když Y je například množina $\{-1\}$, pak $(Y, \emptyset) \leqq 0$. Chceš, aby kladná čísla byla $\leqq 0$? Začínám docela litovat, že jsme se nevsadili.

B. Jestli ti dobře rozumím, tak $(Y, \emptyset)$ bude kladné, jen když Y bude obsahovat nulu nebo nějaké číslo větší než nula. Asi máš pravdu, takže teď vlastně už rozumíme všemu, o čem se v Conwayově textu mluví.

A. Všemu až k místu, kde se kámen ulomil.

B. Co tím chceš říct?

A. Docela by mě zajímalo, co se stalo třetí den.

B. Když už známe obě pravidla, tak si to přece dokážeme odvodit sami. Jestli tě to baví, zkusíme po obědě vymyslet, co se stalo třetího dne.

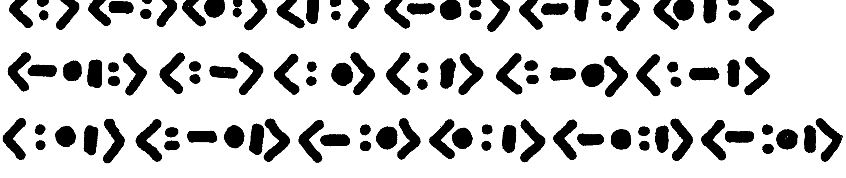
A. Když už jsi o tom začal, neměl bys jít chytit nějakou rybu k obědu? Pokusím se zatím najít nějaké kokosy.

4. Špatná čísla

B. Tak jsem přemýšlel, co se stane třetí den a mám dojem, že to bude docela problém. Jak se tvoří další a další čísla, počet možných množin se hrozně rychle zvětšuje. Myslím, že sedmý den už byl Conway přímo zralý pro odpočinek.

A. To je fakt. Taky jsem si to rozmýšlela a na třetí den mi vychází sedmnáct čísel.

B. Sedmnáct? Já jich našel devatenáct, dvě jsi někde poztrácela, podívej:



A. Vidím, že už začínáš používat starou symboliku. Ale proč zapisuješ $\langle : \rangle$? Nula byla přece stvořena už první den.

B. No, musíme přece porovnat stará a nová čísla, abychom zjistili, jestli se k sobě hodí.

A. Ale já jsem napočítala sedmnáct nových čísel, takže na konci třetího dne jich musí být dohromady dvacet. Podívej, chybí ti $\langle - : | \rangle$.

B. (zamrká) No jo, máš pravdu. Hm, dvacet krát dvacet, to máme čtyři sta různých případů, které budeme muset přešetřit podle pravidla (2). Nebude to žádná velká zábava, ale co se dá dělat, nedá mi to pokoj, dokud si to neověřím.

A. Možná, že by šel vymyslet způsob, jak si tu práci zjednodušit.

B. To by nebylo špatné ...
Mám už první výsledek, 1 je menší než $(\{1\}, \emptyset)$. Dostal jsem to tak, že jsem napřed dokázal, že $0 \ngeq (\{1\}, \emptyset)$.

A. Já to zkouším trochu jinak. Pravidlo (2) říká, že musíme vyzkoušet každý prvek X_L, abychom se přesvědčili, že není větší nebo jako y, ale přeci se nemusí zkoušet každý prvek. Jestliže nějaký prvek X_L je $\geqq y$, pak největší prvek X_L musí být taky $\geqq y$. Podobně stačí taky vyzkoušet x jenom proti nejmenšímu prvku Y_P.

B. Jo, to by měla být pravda ... Úplně stejně jako jsem dokázal, že 1 je menší než $(\{1\}, \emptyset)$, umím tedy taky dokázat, že 1 je menší než $(\{0, 1\}, \emptyset)$, ta „0" navíc v X_L nehraje žádnou roli.

A. Jestli je pravda to, co říkám, ubyde nám hodně práce, protože každé číslo (X_L, X_P) se bude ve všech relacích $\leqq$ chovat úplně stejně, jako kdyby se X_L nahradilo svým největším prvkem a X_P nejmenším. Nebudeme muset uvažovat žádná čísla, ve kterých X_L nebo X_P mají dva nebo více prvků a deset z těch našich dvaceti čísel bychom pak mohli vyloučit.

B. Já už tomu zase moc nerozumím. Jak bychom proboha mohli něco takového dokázat?

A. No mohli, ale to bychom potřebovali něco na tenhle způsob:

(T 1) jestliže $x \leqq y$ a $y \leqq z$, pak $x \leqq z$.

Na první pohled není zřejmé, jestli to platí, ale s ničím, co zatím víme, to v rozporu není.

B. Jestli se Conwayova čísla chovají jenom trochu slušně, tak by to měla být pravda. Mohli bychom sice (T 1) předpokládat a pokračovat dál, ale bylo by hezčí najít důkaz hned a pro všechna čísla najednou jenom pomocí Conwayových pravidel.

A. Tím bychom taky vyřešili problémy kolem třetího dne a ani by to nedalo tak moc práce. Ale jak na to ...

B. K čertu, ty mouchy! Zrovna když se chci soustředit. Víš co ... půjdu se na chvíli projít.

...

Jak pokračuješ?

A. Špatně, připadá mi, že přemýšlím pořád v kruhu a nemohu z něho ven; tohle $\ngeq$

versus $\leqq$ mě hrozně mate. Všechno se tvrdí negativně a věci se tím příšerně zamotávají.

B. Možná, že (T 1) neplatí.

A. Musí přece platit. Počkej, víš co, zkusíme dokázat, že (T 1) neplatí. A když se nám to nepodaří, tak můžeme důkaz hledat pomocí příčiny neúspěchu.

B. To by mohlo jít. Vždycky je jednodušší dokázat, že něco neplatí, než dokázat, že to platí.

A. Předpokládejme, že máme tři čísla x, y a z, pro která

$$x \leqq y\,, \quad y \leqq z \quad \text{a} \quad x \nleqq z\,.$$

Copak nám o takových „špatných" číslech říká pravidlo (2)?

B. První dva vztahy znamenají, že

$$\begin{aligned} X_L &\ngeqq y\,, \\ x &\ngeqq Y_P \\ \text{a} \quad Y_L &\ngeqq z\,, \\ y &\ngeqq Z_P\,, \end{aligned}$$

pak má ještě platit, že $x \nleqq z$, což znamená ...

A. To znamená, že je porušena aspoň jedna nerovnost z Conwayova druhého pravidla. Buď existuje číslo x_L z X_L, pro které $x_L \geqq z$ nebo existuje číslo z_P ze Z_P tak, že $x \geqq z_P$. Když už toho o x, y a z víme tolik, přece se nám musí podařit něco z toho dokázat.

B. No, x_L je z X_L, takže nemůže být větší nebo rovno y. Řekněme tedy, že je menší než y. Ale $y \leqq z$, takže x_L musí být ..., ale ne, promiň, nemohu používat věci, které jsme nedokázali.

Když to vezmeme z druhé strany: víme, že $y \leqq z$ a $z \leqq x_L$ a $y \nleqq x_L$, takhle dostaneme další tři špatná čísla, ale zase to nikam nevede. Vypadá to dost beznadějně.

A. Ale Bille, tys na to přišel!

B. Jak to?

A. Podívej, jestliže (x, y, z) je trojice špatných čísel, pak mohou nastat tyto dva případy:

P ř í p a d 1: nějaké $x_L \geqq z$, pak (y, z, x_L) jsou další tři špatná čísla.

P ř í p a d 2: nějaké $z_P \geqq x$, pak (z_P, x, y) jsou další tři špatná čísla.

B. Ale nezdá se ti, že už zase uvažuješ v kruhu? Vždyť pořád nacházíš jenom další a další špatná čísla.

A. Myslím, že ne, protože v obou případech je nově vzniklá trojice špatných čísel jednodušší než ta původní; jedno z čísel je totiž „starší", bylo vytvořeno dříve. A protože nemůžeme pokračovat pořád dál a dál a nacházet starší a starší trojice špatných čísel, žádná taková trojice tedy vůbec neexistuje.

B. (se rozzáří) Pane jo, ty teda říkáš tohle: Každé číslo x bylo vytvořeno nějakého dne $d(x)$. Máme-li tři špatná čísla (x, y, z), pro něž je součet jejich dnů stvoření $d(x) +$

$+ d(y) + d(z) = n$, pak nastane jeden z těch dvou případů, o kterých jsi mluvila, a dostaneme trojici špatných čísel, pro něž je součet dnů menší než n. Z téhle trojice vznikne zase další, pro kterou je součet dnů ještě menší a tak dál a tak dál, ale tohle právě není možné, protože žádná tři čísla nemají součet dnů menší než 3.

A. Přesně tak. Líbí se mi způsob, jak jsi vyjádřil důkaz pomocí součtů dnů stvoření. Jestliže neexistuje trojice špatných čísel, pro něž je součet dnů menší než n, pak je v obou případech vidět, že neexistuje ani žádná trojice, pro kterou je součet dnů roven n. Řekla bych, že tohle je důkaz indukcí podle součtu dnů.

B. Hlavně, žes to odborně pojmenovala. Myšlenka, to je to podstatné!

A. Já to uznávám, ale když myšlenka dostane jméno, je její další použití jednodušší.

B. Jo, ale jen když ti ještě někdy k něčemu bude... Ale co bych se rozčiloval kvůli novodobému matematickému slovníku, stejně oba dobře víme, že jsme právě dokázali tranzitivní zákon.

A. (přikývne) Na takové dva amatéry jako jsme my, to není špatné.

B. Byla to vlastně tvoje zásluha. Prohlašuju teda slavnostně, že ode dneška se bude tranzitivní zákon (T 1) nazývat Alicina věta.

A. Ale jdi, Conway na něj určitě přišel už dávno.

B. To přece vůbec nesnižuje tvoje tvůrčí úsilí. Vsadil bych se, že každý velký matematik začínal znovuobjevováním „dobře známých" výsledků.

A. Všechna sláva polní tráva, nech toho Bille, děláme to přeci pro zábavu.

Pokračování překladu v dalším čísle.

Tištěné odporové vrstvy pro hybridní integrované obvody

(K 25. výročí MFF UK)

Radomír Kužel, Praha

V posledních 30 letech došlo ve slaboproudé elektrotechnice k nebývalému rozvoji. Vzpomeňme jen objev tranzistoru a dalších složitějších struktur, které přinesly do této oblasti skutečnou technickou revoluci. V současné době jsou to zejména integrované obvody, které nabývají stále většího významu.

Rozvoj uvedených aktivních elektronických prvků si však vynucuje miniaturizaci a zvýšení výrobní produktivity rovněž elektronických prvků pasívních, jako jsou např. kondenzátory a odpory, jedny z důležitých a nejčastěji se vyskytujících součástek v elektronických zařízeních a přístrojích.