Jiří Anděl

O teorii strategických her

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 7 (1962), No. 5, 265--274

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139619

zlepšovat. Řekl bych, že tu nabývá nového významu a velké důležitosti tradiční úloha a činnost Jednoty a že její dílo na tomto úseku bude zvlášť závažné.

Soudružky a soudruzi,

dovolte mně, abych v závěru ještě jednou jménem ústředního výboru strany a vlády poděkoval pracovníkům matematicko-fyzikální obce za jejich obětavou a společensky vysoce významnou činnost a abych je ujistil, že ve svém úsilí mohou počítat s plnou podporou strany a vlády.

Dovolte mně, abych blahopřál vyznamenaným představitelům naší matematiky a fyziky, pracovníkům, kteří vynakládají své úsilí pro jejich rozvoj, popularizaci i výuku.

Dovolte mně, abych přál Jednotě čs. matematiků a fyziků do druhého století její činnosti rozkvět a neustálé obohacování jejích vědních oborů, jakož i stále všestrannější jejich uplatňování ve všech oborech a úsecích vědy, techniky a společenského života, uplatňování, které bude tím plnější a zároveň radostnější, protože bude již službou rozvoji komunistické společnosti.

O TEORII STRATEGICKÝCH HER

JIŘÍ ANDĚL, Praha

1. ÚVOD

V tomto článku se budeme zabývat strategickými hrami dvou osob. Hráče označíme A a B. Jednotlivé realizace hry nazveme *partiemi.* Jestliže se hra hraje tak, že vždy jeden hráč vyhrává právě to, co prohrává druhý, řekneme, že jde o hru *s nulovým součtem. Strategií* se nazývá souhrn pravidel, který jednoznačně určuje postup hráče v každém okamžiku, kdy je na tahu. Obvykle si hráč volí své tahy až v průběhu partie. Teoreticky však můžeme předpokládat, že si hráč zvolil strategii už před zahájením partie. Musel by uvážit všechny možné situace, k nimž může při jeho předchozích tazích dojít, a v každé z nich rozhodnout, jaký provede další tah. Kdyby provedl úplný soupis takových situací a svých rozhodnutí, pak by nemusel být při hře osobně přítomen. Tahy podle jeho sepsaných pokynů by prováděl soudce.

Hru nazveme *konečnou*, má-li každý z obou hráčů k dispozici jen konečný počet strategií. V opačném případě nazveme hru *nekonečnou.* Nechť hráč A má k dispozici m strategií $A_1, A_2, \dots A_m$, hráč B nechť má n strategií $B_1, B_2, \dots B_n$. Pak řekneme, že tato hra je *typu* $m \times n$.

Nejsou-li ve hře žádné tahy náhodné, pak volbou strategie A_i $(i = 1, 2, \dots m)$ hráčem A a volbou strategie B_j hráčem B $(j = 1, 2, \dots n)$ je výsledek hry jednoznačně určen. Nechť při strategiích A_i, B_j hráč A vyhraje a_{ij}. Tuto výhru si budeme představovat zatím jako peněžní částku. Je-li číslo a_{ij} záporné, hráč A tuto částku prohrává. Poněvadž se v celém článku budeme zabývat jen hrami s nulovým součtem, bude za těchto předpokladů výhra hráče B rovna $-a_{ij}$.

Každou konečnou hru dvou osob s nulovým součtem (dále jen hru) můžeme zapsat v přehledném tvaru takto:

$$
\begin{array}{c}
 \\ A_1 \\ A_2 \\ \\ A_m
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & \dots & B_n \end{array} \\
\left\|\begin{array}{cccc} a_{11}, & a_{12}, & \dots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \dots & a_{mn} \end{array}\right\|
\end{array} . \tag{1}
$$

Matici $M = (a_{ij})$ nazýváme *výplatní maticí* nebo také *maticí hry*.

Příklad 1. Každý z hráčů A a B si může zvolit sudé nebo liché číslo. Jsou-li obě čísla stejné parity (tj. buď obě sudá, nebo obě lichá), vyhrává hráč A částku 1; nejsou-li stejné parity, prohrává hráč A částku 1. Hráč A má dvě strategie: A_1 (vybrat si liché číslo) a A_2 (vybrat si sudé číslo). Stejně tak B má dvě strategie B_1 a B_2, odpovídající volbě lichého nebo sudého čísla. Matice hry je

$$
\left\|\begin{array}{rr} 1, & -1 \\ -1, & 1 \end{array}\right\| . \tag{2}
$$

Řešení této hry bude uvedeno v odstavci 4.

2. STRATEGICKÉ HRY, JEJICHŽ MATICE MAJÍ SEDLOVÝ PRVEK

Všimněme si znovu matice (1). Jestliže hráč A volí strategii A_1, zajišťuje si tím výhru nejméně $\min_j a_{1j}$. Když obecně volí strategii A_i, má zaručenu výhru nejméně

$$
\min_j a_{ij} . \tag{3}
$$

Hráč A si může vybrat tu strategii, pro kterou je částka (3) největší. Existuje tedy taková strategie hráče A, která mu zajišťuje výhru nejméně $\max_i \min_j a_{ij}$.

Zcela analogicky bychom mohli dokázat, že existuje taková strategie hráče B, která mu zajišťuje výhru nejméně $\max_j \min_i (-a_{ij})$. Ze známých vlastností maxima a minima dostaneme, že platí

$$
\max_j \min_i (-a_{ij}) = \max_j (-\max_i a_{ij}) = -\min_j \max_i a_{ij} .
$$

V tomto případě nemůže tedy A získat víc než $\min_j \max_i a_{ij}$. Kdyby platilo

$$
\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = C , \tag{4}
$$

pak hráč A si může vybrat takovou strategii, že v každé partii vyhraje nejméně C; přitom hráč B může zvolit takovou strategii, že výhra hráče A nebude větší než C. Tyto strategie jsou zřejmě pro oba hráče optimální.

Snadno zjistíme, že existují matice, které vztah (4) nesplňují. Například pro matici (2) platí

$$\max_i \min_j a_{ij} = -1 \neq \min_j \max_i a_{ij} = 1 ,$$

jak se snadno přesvědčíme.

Věta 1. *Při výše uvedeném označení platí*

$$\max_i \min_j a_{ij} \leqq \min_j \max_i a_{ij} .$$

Důkaz. Pro každé pevné i a r platí

$$\min_j a_{ij} \leqq a_{ir} , \qquad a_{ir} \leqq \max_s a_{sr} ,$$

takže

$$\min_j a_{ij} \leqq \max_s a_{sr} . \tag{5}$$

Poněvadž vztah (5) platí pro každé r, platí i pro to r, pro které nabývá pravá strana (5) své nejmenší hodnoty. Dostáváme tedy

$$\min_j a_{ij} \leqq \min_r \max_s a_{sr} . \tag{6}$$

Vztah (6) platí také pro to i, pro které nabývá levá strana (6) své největší hodnoty. Odtud

$$\max_i \min_j a_{ij} \leqq \min_r \max_s a_{sr} .$$

Změnou indexů r, s za i, j na pravé straně dostáváme tvrzení věty 1.

Prvek a_{pq} ($p = 1, 2, \dots m$; $q = 1, 2, \dots n$) nazveme *sedlovým prvkem matice* $\boldsymbol{M}$, jestliže současně platí

$$\begin{aligned} &\text{a) } a_{iq} \leqq a_{pq} \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, \dots m ,\\ &\text{b) } a_{pj} \geqq a_{pq} \quad \text{pro} \quad j = 1, 2, \dots \mathrm{n} . \end{aligned} \tag{7}$$

Sedlový prvek matice $\boldsymbol{M}$ – pokud ovšem existuje – je tedy největší ve svém sloupci a nejmenší ve svém řádku.

Věta 2. *Nutná a postačující podmínka k tomu, aby platilo*

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = \mathrm{C} , \tag{8}$$

je, aby matice $\boldsymbol{M}$ *měla sedlový prvek. Je-li* a_{pq} *sedlový prvek matice* $\boldsymbol{M}$, *platí* $C = a_{pq}$.

Důkaz. Nejprve dokážeme postačitelnost podmínky. Jestliže existuje sedlový prvek a_{pq} matice $\boldsymbol{M}$, dostaneme ze vztahů (7)

$$\max_i a_{iq} \leqq a_{pq} , \qquad \min_j a_{pj} \geqq a_{pq} ,$$

takže platí

(9) $$\max_i a_{iq} \leqq a_{pq} \leqq \min_j a_{pj}\,.$$

Protože platí

$$\min_j \max_i a_{ij} \leqq \max_i a_{iq}\,, \qquad \min_j a_{pj} \leqq \max_i \min_j a_{ij}\,,$$

dostáváme ze vztahu (9)

(10) $$\min_j \max_i a_{ij} \leqq a_{pq} \leqq \max_i \min_j a_{ij}\,.$$

Porovnáme-li získaný výsledek s tvrzením věty 1, je tím dokázána platnost vztahu (8) a tím i postačitelnost podmínky. Nyní dokážeme její nutnost. Označme p to číslo z množiny čísel 1, 2, ... m, pro něž $\min_j a_{ij}$ nabývá své největší hodnoty. Analogicky q nechť značí to číslo z množiny čísel 1, 2, ... n, pro něž $\max_i a_{ij}$ nabývá své nejmenší hodnoty. Platí tedy

(11) $$\min_j a_{pj} = \max_i \min_j a_{ij}\,, \qquad \max_i a_{iq} = \min_j \max_i a_{ij}\,.$$

Z předpokladu (8) a ze vztahů (11) dostáváme

(12) $$\min_j a_{pj} = \max_i a_{iq}\,.$$

Poněvadž platí $\min_j a_{pj} \leqq a_{pq}$, vyplývá z (12) $\max_i a_{iq} \leqq a_{pq}$. Odtud dostáváme $a_{iq} \leqq a_{pq}$. Část b) vztahu (7) se dokáže obdobně. Z relace (10) plyne i druhé tvrzení věty 2.

Veličina C se nazývá čistá cena hry.

Příklad 2. Nechť

$$\boldsymbol{M} = \begin{Vmatrix} 0, & 2, & 0 \\ -1, & 3, & -2 \end{Vmatrix}.$$

Tato matice má dva sedlové prvky, a to $a_{11} = a_{13} = 0$. Hráč A bude tedy volit strategii A_1, hráč B kteroukoliv ze strategií B_1, B_3.

3. SMÍŠENÉ STRATEGIE

V předchozí části jsme uvedli a dokázali věty o hrách, jejichž matice mají sedlové prvky. Všimneme-li si matice hry, která nemá sedlový prvek (viz příklad 1), dojdeme k závěru, že nemůžeme při všech partiích užívat obecně stále stejné strategie, protože by to soupeř vystihl a využil toho. Zřejmě je výhodnější v tomto případě při každé partii strategii nějak náhodně měnit.

Předpokládejme tedy, že hráč A volí strategii A_i s pravděpodobností u_i ($i =$

$= 1, 2, \ldots m)$, hráč B strategii B_j s pravděpodobností v_j $(j = 1, 2, \ldots n)$. Poněvadž jde o pravděpodobnosti, musí u_i a v_j splňovat podmínky

$$\sum_{i=1}^{m} u_i = \sum_{j=1}^{n} v_j = 1 . \tag{13}$$

Uspořádanou m-tici uvedených pravděpodobností $U = (u_1, u_2, \ldots u_m)$ nazveme *smíšenou strategií* hráče A. Uspořádanou n-tici $V = (v_1, v_2, \ldots v_n)$ nazveme smíšenou strategií hráče B. Budiž S_m množina všech možných smíšených strategií U hráče A; analogicky S_n budiž množina všech smíšených strategií V hráče B.

Čistá strategie je taková smíšená strategie, kde jedna z pravděpodobností je rovna jedné a ostatní jsou rovny nule. Pokud nebude hrozit nebezpečí záměny, budeme místo smíšená strategie říkat jen strategie.

Poněvadž oba hráči volí své strategie nezávisle na sobě, hráč A dostane každou částku a_{ij} s pravděpodobností $u_i v_j$. Proto průměrná výhra hráče A („střední hodnota jeho výhry") je rovna

$$f(U, V) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_i v_j .$$

Když hráč A volí strategii U, má zaručenu průměrnou výhru nejméně $\min\limits_{V \in S_n} f(U,V)$, jestliže toto minimum existuje. Z množiny S_m si hráč A může vybrat tu strategii, která mu zaručí dosažení průměrné výhry $\max\limits_{U \in S_m} \min\limits_{V \in S_n} f(U, V)$, pokud tento extrém existuje. Podobné úvahy lze provést i pro hráče B.

Je možno dokázat věty analogické větám 1 a 2. Jejich důkazy však již nejsou tak jednoduché; čtenář je najde v literatuře uvedené na konci čánku.

Fundamentální význam v teorii strategických her má

věta 3 (tzv. věta o minimaxu). *Při výše uvedeném označení veličiny*

$$C_1 = \max_{U \in S_m} \min_{V \in S_n} f(U, V) \quad \text{a} \quad C_2 = \min_{V \in S_n} \max_{U \in S_m} f(U, V)$$

existují a jsou si rovny. Veličinu $C = C_1 = C_2$ pak nazýváme cenou hry.

Větu 3 můžeme interpretovat takto: Hráč A může volit takovou strategii $U \in S_m$, že jeho průměrná výhra bude nejméně rovna C bez ohledu na to, jakou strategii zvolí hráč B. Hráč B může však volit takovou strategii $V \in S_n$, že zabrání tomu, aby průměrná výhra hráče A byla větší než C. Tyto strategie U a V se nazývají *optimální*. Nalezení optimálních strategií U a V a ceny hry C se nazývá *řešení* dané strategické hry.

4. ŘEŠENÍ HER TYPU 2 × 2

Hra typu 2×2 je dána maticí

$$\boldsymbol{M} = \left\| \begin{matrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{matrix} \right\|$$

Nechť tato matice nemá sedlový prvek. (V opačném případě užijeme výsledků odstavce 2.) Pak je zřejmé, že optimální strategie hráčů nebudou čisté.

Hledáme optimální strategie $U = (u_1, u_2)$ a $V = (v_1, v_2)$ hráčů A a B a cenu hry C. Musí platit $0 \leqq u_1, u_2, v_1, v_2 \leqq 1$, neboť jde o pravděpodobnosti. Z podmínky (13) dostáváme

$$u_2 = 1 - u_1\,, \qquad v_2 = 1 - v_1\,. \tag{14}$$

Lze snadno dokázat, že za uvedených předpokladů hráč A dosáhne průměrné výhry C, i když protivník volí čistou strategii B_1 nebo B_2, používá-li A své optimální strategie. Odtud jsou odvozeny rovnice

$$\begin{aligned} a_{11}u_1 + a_{21}u_2 &= C\,,\\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 &= C\,. \end{aligned} \tag{15}$$

Dosadíme-li za u_2 ze (14), pak z (15) lehko vypočteme

$$u_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}\,. \tag{16}$$

Odtud dále vypočteme $u_2 = 1 - u_1$. Z (15) určíme cenu hry C.

Analogicky bychom mohli též odvodit vzorce pro v_1 a v_2. Jinak ovšem lze zaměnit hráče A a B a současně matici $\boldsymbol{M}$ maticí $-\boldsymbol{M}$ a pak přímo použít vzorce (16).

Příklad 1′. Najděte řešení hry z příkladu 1.
Dosazením do odvozených vzorců dostaneme

$$u_1 = u_2 = \tfrac{1}{2}\,, \qquad v_1 = v_2 = \tfrac{1}{2}\,, \qquad C = 0\,.$$

Hry typu $2 \times m$, resp. $m \times 2$ lze řešit rovněž graficky. Zde se tím však nebudeme zabývat.

5. DOMINUJÍCÍ STRATEGIE

Zkoumáme-li některé matice strategických her, již na první pohled můžeme určit, že některé čisté strategie budou v optimální strategii vystupovat s koeficientem 0, tj. že jich hráč nebude vůbec používat.

Příklad 3. Nechť

$$\boldsymbol{M} = \begin{Vmatrix} 1, & 7, & 2 \\ 6, & 2, & 7 \\ 5, & 1, & 6 \end{Vmatrix}.$$

Je intuitivně zřejmé, že hráč A nebude používat strategie A_3, neboť mu v žádném případě nepřinese větší výhru než strategie A_2; všechny prvky druhého řádku jsou totiž větší než jim odpovídající prvky třetího řádku (dále jen: druhý řádek je větší než třetí; obdobného rčení užijeme i pro sloupce). Proto nám stačí nalézt řešení hry s maticí

$$\boldsymbol{M}_1 = \begin{Vmatrix} 1, & 7, & 2 \\ 6, & 2, & 7 \end{Vmatrix}.$$

Přitom cena hry se zřejmě nezměnila. Poněvadž třetí sloupec je větší než první, nebude hráč B užívat strategie B_3. Můžeme se tedy omezit na hru s maticí

$$\boldsymbol{M}_2 = \begin{Vmatrix} 1, & 7 \\ 6, & 2 \end{Vmatrix}.$$

Tato hra má (podle odst. 4) řešení $U = (\frac{2}{5}, \frac{3}{5})$, $V = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $C = 4$. Proto původní hra s maticí $\boldsymbol{M}$ má řešení $U = (\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, 0)$, $V = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$, $C = 4$.

Obecně platí

věta 4. *Je možno vynechat strategii, které odpovídá řádek menší, než je nějaká lineární kombinace s nezápornými koeficienty ostatních řádků. Obdobně lze vynechat strategii, které odpovídá sloupec větší než nějaká lineární kombinace s nezápornými koeficienty ostatních sloupců.* (Takto získaná hra se nazývá *redukovaná*.) *Optimální strategie původní hry se dostanou z optimálních strategií redukované hry tak, že na místa, která odpovídají vynechaným řádkům a sloupcům, přidáme nuly. Cena hry původní je rovna ceně hry redukované.*

Důkaz je uveden v knize McKinseyho [2].

6. METODY ŘEŠENÍ STRATEGICKÝCH HER TYPU $m \times n$

Má-li příslušná matice $\boldsymbol{M}$ sedlový prvek, je řešení této hry dáno v odstavci 2. Podaří-li se hru redukovat na hru typu 2×2, užijeme výsledků odstavce 3.

Nechť obecně máme hru s maticí (1). Nechť $U = (u_1, u_2, \dots u_m)$ je hledaná optimální strategie hráče A; budiž C cena hry. Optimální strategie U se vyznačuje tím, že zaručuje hráči A průměrnou výhru nejméně C, ať hráč B volí jakoukoliv strategii, speciálně ať volí čistou strategii $B_1, B_2, \dots B_n$. Odtud dostáváme podmínky

$$\begin{aligned} u_1a_{11} + u_2a_{21} + \dots + u_ma_{m1} &\geqq C\,, \\ u_1a_{12} + u_2a_{22} + \dots + u_ma_{m2} &\geqq C\,, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_1a_{1n} + u_2a_{2n} + \dots + u_ma_{mn} &\geqq C\,. \end{aligned} \tag{17}$$

Nechť $C > 0$. Není-li tato podmínka splněna, pak stačí přičíst ke všem prvkům matice $\boldsymbol{M}$ dostatečně velkou konstantu N. Lze snadno dokázat, že takto získáme hru, která má cenu o N vyšší než hra původní, přičemž optimální strategie obou hráčů zůstanou nezměněny. Každou z nerovností (17) můžeme proto vydělit číslem $C > 0$. Označíme-li $u_i/C = t_i$, $i = 1, 2, \dots m$, dostaneme

$$\begin{aligned} t_1a_{11} + t_2a_{21} + \dots + t_ma_{m1} &\geqq 1\,, \\ t_1a_{12} + t_2a_{22} + \dots + t_ma_{m2} &\geqq 1\,, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ t_1a_{1n} + t_2a_{2n} + \dots + t_ma_{mn} &\geqq 1\,. \end{aligned} \tag{18}$$

Je jasné, že $t_i \geqq 0$ pro $i = 1, 2, \dots m$. Z podmínky $\sum_{i=1}^{m} u_i = 1$ dostáváme

$$L = \sum_{i=1}^{m} t_i = \frac{1}{C}. \tag{19}$$

Průměrná výhra C bude maximální tehdy a jen tehdy, nabude-li (19) své nejmenší hodnoty. Stojíme tedy před problémem, nalézt takovou m-tici $(t_1, t_2, \dots t_m)$ nezáporných čísel $t_1, t_2, \dots t_m$, která splňuje podmínky (18) a minimalizuje lineární formu L. Jak známo, jde o problém lineárního programování. Proto i hru s maticí (1) je možno obecně řešit metodami lineárního programování (viz [5]).

Na závěr tohoto odstavce uvedeme zajímavou metodu k přibližnému řešení hry $m \times n$. Objasníme ji na následujícím příkladě:

Příklad 4. Budiž dána hra s maticí

$$\boldsymbol{M} = \begin{Vmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 4, & 0, & 1 \\ 2, & 3, & 0 \end{Vmatrix}.$$

Nechť v první partii hráči zvolili strategie A_1, B_1. Ve druhé partii hráč B předpokládá, že A vybere znovu strategii A_1, a proto zvolí B_1, neboť takto bude mít za daného předpokladu nejmenší ztrátu neboli největší výhru: -1. Hráč A uvažuje stejným způsobem a předpokládá, že B vybere znovu strategii B_1 jako v první partii, a proto zvolí strategii A_2, která by mu v tomto případě zabezpečila největší výhru: 4. Z výsledků obou partií si hráč B sestaví tabulku 1, hráč A tabulku 2.

Tabulka 1

Partie	A zvolil	Výhry B		
		B_1	B_2	B_3
1	A_1	-1	-2	-3
2	A_2	-4	0	-1
Celkem		-5	-2	-4

Tabulka 2

Partie	B zvolil	Výhry A		
		A_1	A_2	A_3
1	B_1	1	4	2
2	B_1	1	4	2
Celkem		2	8	4

Hráč B na základě tabulky 1 usoudí, že je lepší volit strategii B_2, protože -2 je největší ze všech tří čísel -5, -2, -4. Obdobně z tabulky 2 hráč A dojde k závěru, že je výhodné volit strategii A_2, která by mu byla dala v předchozím průběhu hry největší výhru: 8. Proto ve třetí partii hráči volí strategie A_2, B_2 a pokračují v doplňování tabulky. Kdyby se stalo, že by se maxima dosáhlo ve dvou nebo ve více sloupcích současně, volí hráč v další partii tu z odpovídajících strategií, která má nejmenší index (viz tab. 3 po osmé partii).

Průběh hry zapíšeme do tabulky 3. Hodnota D_i je maximum ze součtu výher hráče A do i-té partie včetně, $i = 1, 2, \ldots$. Hodnota d_i je maximum ze součtů výher hráče B do i-té partie včetně, $i = 1, 2, \ldots$, vynásobené číslem -1.

Tabulka 3

Partie	A zvolil	B zvolil	Celkové výhry A			Celkové výhry B			D_i	d_i
			A_1	A_2	A_3	B_1	B_2	B_3		
1	A_1	B_1	1	4	2	−1	−2	−3	4	1
2	A_2	B_1	2	8	4	−5	−2	−4	8	2
3	A_2	B_2	4	8	7	−9	−2	−5	8	2
4	A_2	B_2	6	8	10	−13	−2	−6	10	2
5	A_3	B_2	8	8	13	−15	−5	−6	13	5
6	A_3	B_2	10	8	16	−17	−8	−6	16	6
7	A_3	B_3	13	9	16	−19	−11	−6	16	6
8	A_3	B_3	16	10	16	−21	−14	−6	16	6
9	A_1	B_3	19	11	16	−22	−16	−9	19	9
10	A_1	B_3	22	12	16	−23	−18	−12	22	12
11	A_1	B_3	25	13	16	−24	−20	−15	25	15
12	A_1	B_3	28	14	16	−25	−22	−18	28	18
13	A_1	B_3	31	15	16	−26	−24	−21	31	21
14	A_1	B_3	34	16	16	−27	−26	−24	34	24
15	A_1	B_3	37	17	16	−28	−28	−27	37	27
16	A_1	B_3	40	18	16	−29	−30	−30	40	29
17	A_1	B_1	41	22	18	−30	−32	−33	41	30
18	A_1	B_1	42	26	20	−31	−34	−36	42	31
19	A_1	B_1	43	30	22	−32	−36	−39	43	32
20	A_1	B_1	44	34	24	−33	−38	−42	44	33

Nechť C je cena hry. Je dokázáno, že

$$\frac{d_i}{i} \leqq C \leqq \frac{D_i}{i} \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, \ldots$$

V našem případě nejlepší odhady ceny hry jsou

$$C \leqq \frac{D_8}{8} = \frac{16}{8} = 2\,, \qquad C \geqq \frac{d_{16}}{16} = \frac{29}{16} = 1{,}8125\,.$$

Je rovněž dokázáno, že s rostoucím počtem partií D_i/i a d_i/i konvergují k C.

Z tabulky 3 vidíme, že hráč A volil ve dvaceti partiích strategii A_1 třináctkrát, A_2 třikrát, A_3 čtyřikrát. Za odhad optimální strategie hráče A vezmeme proto smíšenou strategii $\left(\frac{13}{20}, \frac{3}{20}, \frac{4}{20}\right)$. Analogicky za odhad optimální strategie hráče B vezmeme smíšenou strategii $\left(\frac{6}{20}, \frac{4}{20}, \frac{10}{20}\right)$. Přesné řešení této hry je

$$U = \left(\tfrac{11}{20}, \tfrac{4}{20}, \tfrac{5}{20}\right), \qquad V = \left(\tfrac{8}{20}, \tfrac{7}{20}, \tfrac{5}{20}\right), \qquad C = 1{,}85\,.$$

Na závěr článku uvedeme

příklad 5. Závod A bude provádět montáž přístrojů ze součástí, které se vyrábějí v jiných závodech. Součásti typu S vyrábí závod B.

Je-li součást S dobrá, získá závod A po správném zamontování 50 Kčs. Je-li S zmetek, vznikne po zamontování součásti a spuštění přístroje škoda 20 Kčs, neboť provoz při vadné součásti S způsobí zničení jí samé a ještě některých součástí jiného typu. V závodě A je možno provádět kontrolu součásti S ještě před zamontováním; pro jeden kus však činí náklady na kontrolu 30 Kčs. Objeví-li podnik A závadu na některé součásti S, pošle se podle dohody mezi A a B zmetek zpět do závodu B, který ji na svůj účet opraví a znovu pošle závodu A. Kromě toho za vzniklé zdržení platí B podniku A 10 Kčs penále za každý objevený zmetek. Podnik B neuznává reklamace, které by přišly až po uvedení celého přístroje do chodu, protože v takovém případě nelze zjistit, zda závada byla zaviněna zmetkem nebo špatnou montáží. Poněvadž se výroba součástí S v závodě B teprve zahajuje, není známo průměrné procento zmetků.

Před montáží si může podnik A vybrat buď strategii A_1 (nekontrolovat), nebo A_2 (kontrolovat součást S). Přitom S může být buď dobrá („strategie" B_1), nebo zmetek („strategie" B_2). Předpokládejme, že montáž je vždy provedena správně. Při kombinaci A_1B_1 je pak zisk podniku A 50 Kčs. Při A_1B_2 je to -20 Kčs. Při A_2B_1 podnik A získá 50 Kčs, ale ztratí 30 Kčs na kontrolu, takže celkem získá 20 Kčs. Při A_2B_2 ztratí A 30 Kčs na kontrolu, dostane 10 Kčs penále a opravenou součást, za niž dále získá 50 Kčs; dohromady je to 30 Kčs. Proto matice hry je

$$\boldsymbol{M} = \begin{Vmatrix} 50, & -20 \\ 20, & 30 \end{Vmatrix}.$$

Podle odstavce 3 vypočteme optimální smíšené strategie

$$U = \left(\tfrac{1}{8}, \tfrac{7}{8}\right), \qquad V = \left(\tfrac{5}{8}, \tfrac{3}{8}\right).$$

Nás zajímá především strategie U, která udává, že A musí u každé součásti S provést kontrolu s pravděpodobností 1/8. Takto si zajistí průměrný zisk (který je roven ceně hry) 23,75 Kčs.

Literatura

[1] E. S. Ventcel: *Elementy teorii igr*, Moskva 1959.
[2] Dž. Mak Kinsi: *Vvedenie v teoriju igr*, Moskva 1960.
[3] Dž. D. Viljams: *Soveršennyj strateg ili bukvar po teorii strategičeskich igr*, Moskva 1960.
[4] *Linejnyje neravenstva i smežnyje voprosy*, sbornik perevodov, Moskva 1959.
[5] Bláha-Machek: Lineární programování. Pokroky MFA 5, 28 (1960).