Ján Andres; Jiří Fišer

Řez zlatý, stříbrný a bronzový

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 40 (1995), No. 6, 307--317

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/139605`

Řez zlatý, stříbrný a bronzový

Jan Andres a Jiří Fišer, Olomouc

Autoři si v příspěvku kladou za cíl představit proporci zlatého řezu jako paradigma pro vědomí souvislostí. V relaci s otázkou, proč právě zlatý řez tolik lahodí našim smyslům, se snaží nalézt ospravedlnění své domněnky v tendenci přírody minimalizovat či ekonomizovat. Na základě stejného matematického principu jsou pak definovány a vizualizovány i jiné estetické poměry (stříbrný, bronzový aj.). Zvláštní pozornost je věnována chápání těchto poměrů jako tzv. Pisotových čísel.

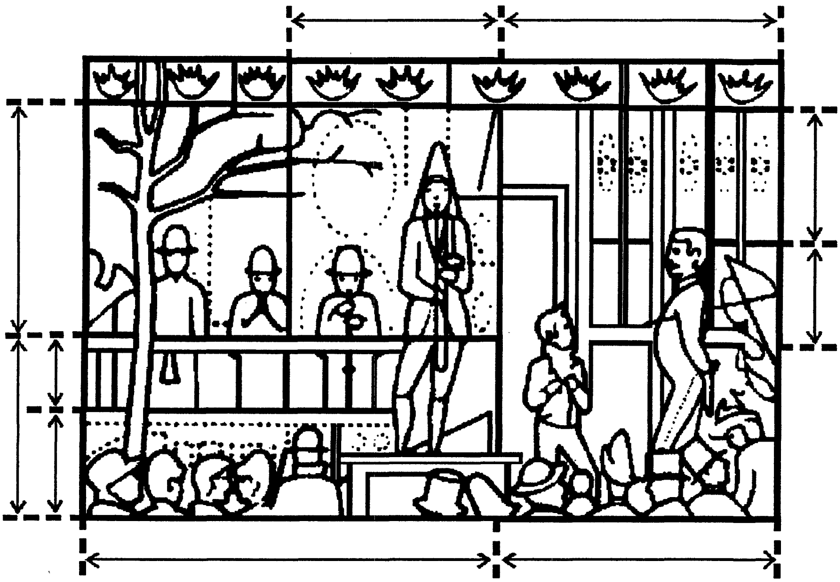
1. Několik úvodních informací

Lze bez nadsázky říci, že *zlatý řez* (sectio aurea, proportio divina) představuje od antiky základní estetický poměr. Uplatňuje se v mnoha tvůrčích aktivitách přírody (krystaly, rostliny, zvířata, člověk, ...) i — a to zejména — v artefaktech lidských (viz [5]–[13], [18]).

S jeho konkrétními uměleckými projevy se můžeme setkat nejen např. u řeckých váz, athénského Pantheonu (447–432 př. Kr.), pařížské katedrály Notre-Dame či pražského chrámu sv. Víta (půdorysné proporce), ale i ve stavbách francouzského architekta Le Corbusiera (aplikací známá studie „Modulor") nebo u budovy OSN v New Yorku. Vyvrcholení těchto tendencí je možno vysledovat v renesanci (malířské kompozice Leonarda da Vinci, Raffaela, A. Dürera aj.) a částečně i v období klasicismu (např. u N. Poussina). Silně diskutabilním se může jevit časté dohledávání zlatého poměru v kompozicích některých děl Jana Vermeera, Rembrandta van Rijna a mnoha dalších barokních mistrů. Příkladem jeho nepochybně záměrného užití jsou naopak některá díla francouzského pointilisty G. Seurata (viz obr. 1, podle [19]) a skupiny moderních umělců, sdružených ne náhodně pod názvem „Section d'Or". U nás se vědomým uplatněním zlaté proporce v obrazové kompozici nejdůsledněji zabýval B. Kubišta.

Kromě výtvarnictví a architektury je možné s trochou štěstí podobné projevy najít i ve stavebních relacích hudby (tzv. tektonika), a to zejména klasicistní (sonátová forma u W. A. Mozarta a J. Haydna), ale i novodobé (např. v první větě „Hudby pro smyčce, čelestu a bicí" Bély Bartóka). Totéž lze říci o poměrech vlnových délek tónů obsažených v libozvučných akordech (např. kvartsextakord), přičemž H. von Helmholtz objevil (viz [9], [17] a zejména [10]) dokonce analogii u vlnových délek světla náležejících barvám (kvartsextakordu g–c–e–g potom odpovídají duhové barvy červená, žlutá, indigová modř a ultrafialová).

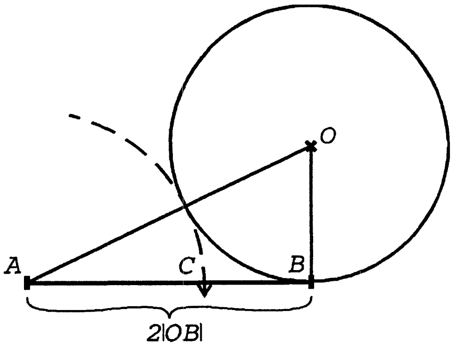
Doc. RNDr. Jan Andres, CSc. (1954), Mgr. Jiří Fišer (1968), katedra matematické analýzy PřF UP, Tomkova 40, 779 00 Olomouc–Hejčín.



Obr. 1.

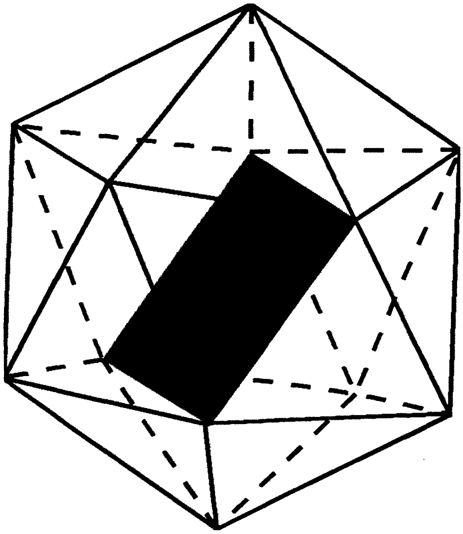
Z hlediska matematického sehrál velmi významnou roli spisek s názvem „De divina proportione" [15] (viz rovněž [14]), vydaný r. 1509 v Benátkách. Jeho autor Fra Luca Pacioli jej věnoval svému dobrodinci Lodovicu il Morovi, přičemž 59 ilustracemi jej opatřil (oplátkou za jistou protislužbu) sám Leonardo da Vinci. Při definici zlatého řezu Fra Pacioli vycházel z tzv. 15. knihy Euklidových „Základů", která však ve skutečnosti pochází od Hypsikla. Zlatý řez vznikne rozdělením úsečky na dvě části (viz obr. 2), přičemž ***poměr velikosti větší části** AC **k menší** CB **se rovná poměru velikosti celé úsečky** AB **k větší části** AC*, tj.

$$|AC| : |CB| = |AB| : |AC| \qquad \Big[= (|AC| + |CB|) : |AC|\Big] .$$



Obr. 2.

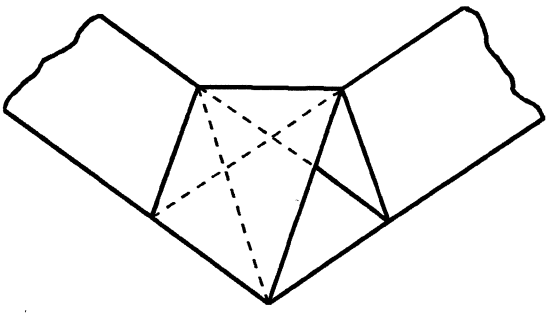
Fra Pacioli objevil celkem 13 projevů této božské proporce, jak ji sám nazývá. Hledal je zejména v geometrii pěti dokonalých (platónských) těles. Jako příklad uveďme kapitolu o dvanácté vlastnosti, projevující se v pravidelném dvacetistěnu následovně (viz obr. 3):



Obr. 3.

Spojíme-li páry koncových bodů dvou protilehlých hran dvacetistěnu, dostaneme obdélník, jehož *delší strana je k menší právě v poměru zlatého řezu.* Tento a podobné objekty zhotovil Fra Pacioli ze skla jako dar do různých šlechtických sbírek. V této souvislosti je vhodné se zmínit, že stejný tvar dvacetistěnu vykazují i krystaly bóru a viry dětské obrny.

Podobný model si můžeme sami snadno vyrobit z proužku papíru, a to tak, že na něm uvážeme uzel a zase ho opatrně rozvážeme. Vznikne pravidelný pětiúhelník, jehož *úhlopříčky se opět dělí v poměru zlatého řezu* (viz obr. 4).



Obr. 4.

Za zmínku rovněž stojí skutečnost, že *délka strany pravidelného desetiúhelníka je ve zlatém poměru k poloměru kružnice desetiúhelníku opsané.*

2. Kvantitativní ocenění estetické kvality

Vzniká přirozeně otázka, ***proč právě tento poměr (a ne jiný) nejvíce lahodí oku a snad i dalším smyslům?*** Dříve nežli se pokusíme na ni alespoň částečně odpovědět, měli bychom se nejprve zmínit o pokusech Gustava Theodora Fechnera (1801–1887), zakladatele tzv. psychofyziky a experimentální estetiky (viz [9]). Fechner byl tímto problémem velmi zaujat. Cílem jeho pokusů bylo zjištění základních estetických poměrů, kdy by se nijak neprojevovaly nějaké utilitární zájmy. Např. pokusným osobám bylo předloženo deset pravoúhelníků od čtverce až po protáhlý obdélník, které byly ze stejného materiálu, jejichž plocha byla stejná. Úkolem bylo vybrat ten „nejkrásnější". Statistické vyhodnocení skutečně vyznělo ve prospěch obdélníka se stranami ve zlatém poměru, přičemž obě zmíněné krajnosti byly odmítnuty. Při jiném pokusu dostaly pokusné osoby čtyři svislé úsečky různé délky, přičemž nad nimi měly udělat ve vhodné vzdálenosti tečku. Rovněž zde a při dalších podobných pokusech se potvrdila testovaná hypotéza.

Jelikož Fechnerovy testy pouze potvrdily empirickou zkušenost (a nic víc), zmíníme se ještě o některých dalších snahách v tomto směru. Vycházeje z Hemsterhuisovy (18. stol.) definice umělecké hodnoty požadující „vyjádření co největšího počtu myšlenek v co nejkratším čase", podal Američan George D. Birkhoff (1884–1944) kvantitativní ocenění estetické kvality M vzorcem

$$M = \frac{O}{C},$$

kde čitatel O značí míru „řádu" a jmenovatel C míru „složitosti" nebo úsilí o pochopení. Jeho fundamentální kniha [2] byla napsána v duchu blízkém introspekterní psychologii, v němž G. Boole zkoumal zákony logiky.

Je známo, že G. D. Birkhoff rovněž vytvořil dle zmíněné formule vázy, melodie a básně; nicméně také varoval, že „úplné kvantitativní použití základní formule je možné, jen jsou-li prvky řádu vesměs formální". V této souvislosti je nutné upozornit na skutečnost, že ač veden formulemi, považoval tuto tvorbu, dle slov svého syna Garetta B., jen za ukázku dovednosti (tour de force), ***„nikdy ani minutu nepomyslel na to, že by umění mohlo z takových pokusů těžit (!)"***.

Matematičtěji lze myšlenku použitou ve vzorci $M = O/C$ vyjádřit jako ***kvantifikaci shody míry estetického zážitku s relativní změnou entropie, vyvolané u diváka při vnímání uměleckého díla.***

Také další zakladatelé numerické (informační) estetiky vycházeli při kvantifikaci estetického z podobných pozic (viz [4]). Abraham A. Moles vymezuje r. 1958 termín ***„estetický obsah"*** na základě pojetí uměleckého díla jako permutačního systému, a to opět v souvislosti se zmíněnou relativní změnou entropie. Jsou definovány i další odpovídající pojmy, jako ***„nápadnost"*** (Fred Attneave), ***„stupeň komunikativnosti díla"*** (Herbert W. Franke), aj. Rovněž vznik informatiky umožnil prohloubení poznatků vědecké estetiky (Frieder Nake).

Žádná z uvedených koncepcí by však zřejmě nedala uspokojivou odpověď na naši fundamentální otázku maximální působnosti zlaté proporce, neboť všechny tyto teorie sledují převážně vnitřní obsah.

3. Trocha aritmetiky

Pro lepší kvantitativní chápání smyslu zlatého poměru za účelem hledání možné odpovědi na otázku „proč (?)“ — má-li tato vůbec nějaký smysl — je ještě potřeba vyslovit dvě další (ekvivalentní) definice (viz [16], [19]).

První vychází z tzv. *Fibonacciho posloupnosti* (Leonardo Pisano alias Fibonacci žil v letech 1170–1250):

$$\{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \ldots\},$$

generované rekurzivním předpisem

$$A_{n+1} = A_n + A_{n-1}, \qquad A_0 = 0, \quad A_1 = 1,$$

charakterizující populační dynamiku hlodavců, přičemž lze poměrně snadno odvodit, že (viz [19])

$$A_{n+1} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \qquad \text{pro } n = 1, 2, \ldots .$$

Některé z tzv. *Fibonacciho poměrů*

$$\left\{\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \ldots\right\}, \qquad \text{tj. } \frac{A_{n+1}}{A_n},$$

se vyskytují i v přírodě, např. obložíme-li vhodně okolo některých rostlin spirálu, pak je možné se často přesvědčit, že na třech závitech leží 5 listů (tj. poměr $\frac{5}{3}$).

Roste-li n nade všechny meze ($n \to \infty$), pak je známo, že zmíněný poměr A_{n+1}/A_n konverguje k číslu

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803398874\ldots,$$

což není nic jiného, než převrácená hodnota *zlatého čísla* $(\sqrt{5}-1)/2$.

Pro druhou definici využijeme skutečnost, že každé reálné číslo x lze zapsat pomocí tzv. řetězového zlomku jako

$$x = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}} = [a_1, a_2, a_3, \ldots],$$

přičemž pro zlatou proporci z platí, že

$$\boxed{z := \frac{\sqrt{5}-1}{2} = [1, 1, 1, \ldots].}$$

Poznamenejme zde, že rovněž (viz [1])

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}},$$

avšak k tomuto vztahu se již nebudeme vracet.

V souvislosti s reprezentací pomocí řetězového zlomku můžeme analogicky definovat

$$\boxed{s := \sqrt{2}-1 = [2,2,2,\dots]}$$

jako tzv. *stříbrné číslo*, přičemž odpovídající posloupnost poměrů zde vypadá takto:

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{5}{12}, \frac{12}{29}, \frac{29}{70}, \frac{70}{169}, \frac{169}{408}, \frac{408}{985}, \frac{985}{2378}, \frac{2378}{5471}, \dots\right\}$$

a také

$$\boxed{b := \frac{\sqrt{13}-3}{2} = [3,3,3,\dots]}$$

jako tzv. *bronzové číslo*, kde odpovídající posloupnost poměrů vypadá následovně:

$$\left\{\frac{1}{3}, \frac{3}{10}, \frac{10}{33}, \frac{33}{109}, \frac{109}{360}, \frac{360}{1198}, \frac{1198}{3927}, \dots\right\},$$

a tak dále.

Dodejme ještě, že všechna tři čísla z, s, b jsou iracionální, tj. mají nekonečný desetinný rozvoj a lze je obtížně aproximovat čísly racionálními, tj. zlomky. Číslo z je dokonce ze všech iracionálních čísel vůbec nejhůř aproximovatelné v uvedeném smyslu.

Navíc se lze snadno přesvědčit o platnosti rovností

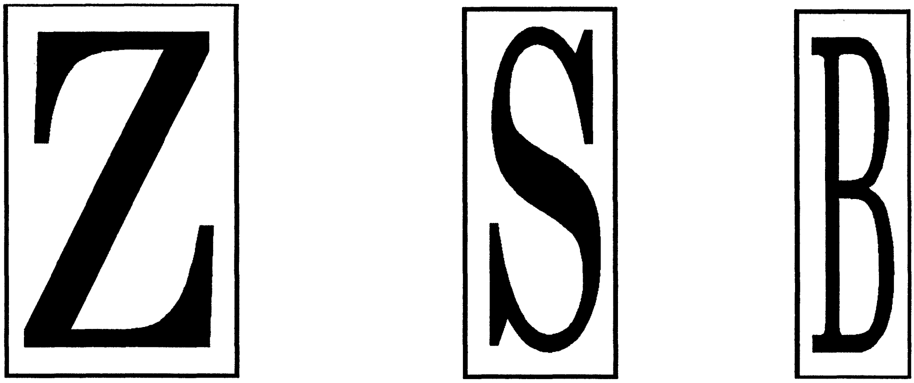
$$z := \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)},$$
$$s := \sqrt{2}-1 = \frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)},$$
$$b := \frac{\sqrt{13}-3}{2} = \frac{1}{3+\frac{1}{2}(\sqrt{13}-3)},$$

tj. obecně

$$\varkappa_k = \frac{1}{k+\varkappa_k},$$

kde

$$\boxed{\varkappa_k = \frac{-k+\sqrt{k^2+4}}{2}, \qquad k = 1,2,3,\dots\ ,}$$



Obr. 5.

přičemž

$$z = \varkappa_1 = 0{,}61803\ldots, \qquad s = \varkappa_2 = 0{,}41421\ldots, \qquad b = \varkappa_3 = 0{,}3028\ldots.$$

Odtud rovněž vidíme, jak je možné nové zkoumané poměry vizualizovat, neboť zajisté platí

$$\varkappa_k = \frac{m}{v} = \frac{v}{kv+m},$$

kde m a v značí menší a větší díl rozdělené úsečky (viz obr. 5).

Stříbrné proporce determinované číslem $1+\sqrt{2}$ byly nedávno objeveny ve struktuře tzv. kvazikrystalů, vykazujících tradičně krystalograficky nepřípustnou osmičetnou symetrii (viz [19], str. 323]).

Přestože si nejsme vědomi jakéhokoliv záměrného použití těchto nových proporcí člověkem[1]) (i „modulorové" vztahy Le Corbusierovy či tzv. tradiční francouzské formáty krajina, figura, atd. jsou založeny na něčem jiném; viz [5], [12]) — lahodí oku. Přitom *estetická kvalita studovaného poměru je zřejmě jednak nepřímo úměrná míře „informačního obsahu" odpovídajícího řetězového zlomku, jednak „vlivu" jednotlivých ve zlomku zastoupených cifer na celkovou hodnotu zlomku.* Lze se totiž snadno přesvědčit, že zatímco míra informačního obsahu u všech tří poměrů z, s, b je minimální, jeví se zlatý řez krásnější než stříbrný a ten je zase pěknější než bronzový, atd.

Mimochodem, *krása nekonečně členitých geometrických útvarů, fraktálů, se rovněž vysvětluje (M. Barnsley) nízkým informačním obsahem*, vyplývajícím z toho, že program pro jejich generování je konečný, přestože obraz vytvořený tímto programem je nekonečný (viz [16]). Někdy se hovoří v této souvislosti o tzv. art-ware. Michael Barnsley výstižně přirovnává tento efekt k jevu, kdy *„vidíme jasně a přesně oblouk horizontu, ačkoli se na moři valí vlny"*.

[1]) Podobně se mohou jevit např. estetické poměry v holandské geometrické abstrakci (skupina De Stijl) — ani zde si však nejsme vědomi jejich cílevědomého užití. Při této příležitosti však poznamenejme, že tito neoplasticisté užívali dokonce „kvadratických" proporcí, např. G. Vantongerloo v obraze „Kompozice $y = 2x^2/5$ s červenou".

Dodejme, že asociativně se vybavuje i jakási volná analogie s hudební teorií harmonie, vyloženou roku 1738 (na psychologickém podkladě) švýcarským matematikem Leonhardem Eulerem (1707–1783), a sice *„čím menších čísel je zapotřebí k vyjádření dvou kmitočtů, tím je příjemnější poslouchat takové zvuky"*. Euler dokonce měřil určité velikosti disonance v celých akordech.

Jinými slovy, *mohlo by se jednat o jeden z projevů přírody minimalizovat.* Při vyslovení této naší hypotézy se opíráme zejména o následující názor (viz [12]) francouzského malíře a významného teoretika Paula Sérusiera (současník a přítel Gauginův, působící v Paříži na Académie Ranson, na jehož názory však měla rozhodující vliv teorie benediktýnského mnicha P. Didiera): *„Dobrými proporcemi nazývám ty, na nichž je konstruován vnější svět, a tedy i naše tělo. Jsou to ony, které se zakládají na nejjednodušších číslech, jejich odvozeninách, čtvercích a čtvercích kořenů."* Dalšími, mnohem známějšími tendencemi přírody k minimalizaci, jsou např. následující fenomény: mýdlová bublina (minimální obsah plochy), kapka vody (minimální objem), což obojí souvisí s obecnějším principem minimalizace energie, a v makroměřítku — diskutabilní finální tepelná smrt vesmíru (maximální entropie). Nelze opomenout ani Fermatův či značně obecný Le Chatelierův princip.

4. Estetické proporce jako tzv. Pisotova čísla

Velmi významným projevem hodnot $\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$, $\sqrt{2}+1$, $\frac{1}{2}(\sqrt{13}+3)$ atd. z hlediska matematického je rovněž určitá vlastnost, společná tzv. Pisotovým číslům (viz [3]). *Povýšením (mocninou) na vysoký řád se taková čísla velmi blíží celým.* Např.

$$\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{99} = 4895267005239686611 24,\underbrace{000\ldots0}_{20\times}\ldots,$$

$$\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{100} = 792070839848372253126,\underbrace{999\ldots9}_{20\times}\ldots,$$

$$(\sqrt{2}+1)^{99} = 784861179029326838180094670109292192 14,\underbrace{000\ldots0}_{37\times}\ldots,$$

$$(\sqrt{2}+1)^{100} = 1894822502992738668357461598418000358 73,\underbrace{999\ldots9}_{38\times}\ldots,$$

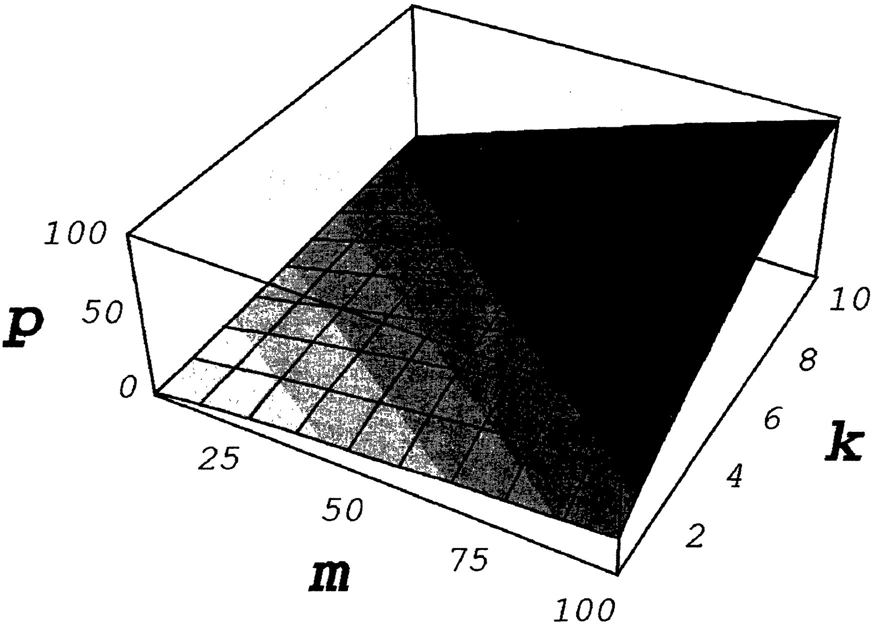
$$\left(\frac{\sqrt{13}+3}{2}\right)^{99} = 2338988962578467916674359227269256102699 59\backslash \\ 4020035236,\underbrace{000\ldots0}_{51\times}\ldots,$$

$$\left(\frac{\sqrt{13}+3}{2}\right)^{100} = 7725155762528195934947675683947368118709 92\backslash \\ 492242998,\underbrace{999\ldots9}_{51\times}\ldots.$$

Zajímavá se jeví závislost počtu p devítek pro sudá m, resp. počtu nul pro lichá m za desetinnou tečkou v obecném výrazu

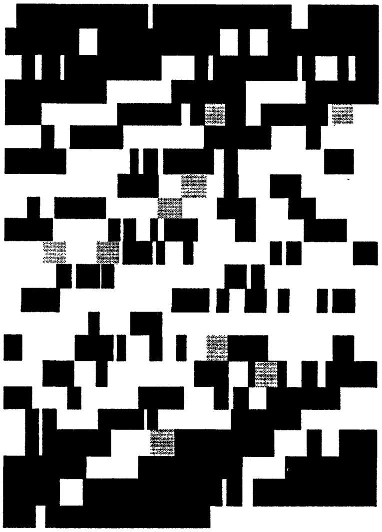
$$\left[\frac{\sqrt{k^2+4}+k}{2}\right]^m$$

na parametrech k, m, která je zachycena v obr. 6 a následující tabulce.



Obr. 6.

k \ m	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	22	24	26	28	30	32	34	36	38
3	2	5	7	10	12	15	18	20	23	25	28	31	33	36	38	41	44	46	49	51
4	3	6	9	12	15	18	21	25	28	31	34	37	40	43	47	50	53	56	59	62
5	3	7	10	14	17	21	25	28	32	35	39	42	46	50	53	57	60	64	67	71
6	3	7	11	15	19	23	27	31	35	39	43	47	51	55	59	63	67	71	75	78
7	4	8	12	17	21	25	29	34	38	42	46	51	55	59	64	68	72	76	81	85
8	4	9	13	18	22	27	31	36	40	45	50	54	59	63	68	72	77	81	86	90
9	4	9	14	19	23	28	33	38	43	47	52	57	62	67	71	76	81	86	91	95
10	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100



Obr. 7.

Na obr. 7 je na několika řádcích barevně znázorněna celá část čísla

$$\left[\frac{\sqrt{10^{24}+4}+10^{12}}{2}\right]^{100}$$

a to tak, že všechny nuly jsou obarveny na černo, trojice nenulových cifer jsou šedé (delší opakování se nevyskytuje), zbytek je bílý. Tato vizualizace je fenomenologickým příkladem četnosti a rozložení cifer ve vysokých mocninách čísel charakterizujících estetické proporce.

5. Závěrečné poznámky

Vzhledem k vědomě omezenému rozsahu našich poznámek jsme se nemohli detailněji zabývat některými dalšími významnými důsledky zlaté proporce. Např. *v teorii chaosu číslo zlatého poměru charakterizuje při určitých scénářích něco jako poslední bariéru při přechodu uspořádané struktury v neuspořádanou* (viz [16]).

V numerické matematice existuje metoda zlatého řezu. Tento poměr se projevuje i u tzv. Penrosovy dlažby, která je volnou analogií již zmíněné struktury některých kvazikrystalů. Záměrně stranou zůstalo i schéma mikrokosmických analogií Roberta Fludda (zač. 17. stol.), názory německého spisovatele A. Zeisinga (pol. 19. stol.), pokoušejícího se naivně dokázat, že zlatý řez je klíčem k veškeré morfologii přírody i umění, stejně jako nauka o harmonii světa hudebního teoretika Hanse Kaysera (pol. 20. stol.). Zde všude hraje zlatý poměr opět hlavní roli.

Konečně stálo by nesporně za to položit si otázku, jak libé či nelibé působení zkoumaných poměrů vysvětlit z hlediska neurofyziologického. Jak totiž bylo nedávno poznamenáno Olegem Kopanevem, dělí geometrický průměr frekvencí mozkového β-rytmu odpovídající frekvenční interval právě v poměru zlatého řezu. Nabízí se tak možnost chápat maximální estetický zážitek jako rezonanci mozkového β-rytmu při podnětech determinovaných ideální proporcí.

... a latinský kříž?

Literatura

[1] von Baravalle H.: *Die Geometrie des Pentagramms und der Goldene Schnitt.* Stuttgart, Waldorf-Verlag 1932.

[2] Birkhoff G. D.: *Aesthetic Measure.* Cambridge, Mass., Harward Univ. Press 1933.

[3] Bertin M. J., Decomps-Guilloux A., Grandet-Hugot M., Pathiaux-Delefosse M., Schreiber J. P.: *Pisot and Salem Numbers.* Basel, Birkhauser 1992.

[4] Bertók I., Janoušek I.: *Počítače a umenie.* Bratislava, SPN 1989.

[5] Crhák F., Kostka Z.: *Výtvarná geometrie.* Praha, SPN 1967.

[6] Ghyka M. C.: *Esthètique des proportions dans la Nature et dans les Arts.* Paris, Gallimard 1927.

[7] Ghyka M. C.: *The Geometry of Art and Life.* Sheed and Ward New York, Sheed and Ward 1946.

[8] Ghyka M. C.: *Le nombre d'or.* Paris, Gallimard 1959.

[9] Gilbertová K. E., Kuhn H.: *Dějiny estetiky.* Praha, SNKLU 1965.

[10] Goeringer A.: *Der Goldene Schnitt und seine Beziehung zum menschlichen Körpen und anderen Dingen mit Zugrundlegung des Goldenen Zirkels.* München, J. Lindaner 1911.

[11] Hagenmaier O.: *Der Goldene Schnitt.* Ulm/Donau, W. Tapper-Verlag 1949.

[12] Hégr M.: *Výstavba obrazu z výtvarného hlediska.* Praha, Umělecká beseda 1944.

[13] Huntley H. E.: *The Divine Proportions.* New York, N.Y., Dover Publ., Inc. 1970.

[14] Levitin K.: *Geometrická rapsódie.* Praha, SNTL 1991.

[15] Pacioli L.: *De divina proportione.* Venezia, 1509.

[16] Peitgen H. O., Jürgens H., Saupe D.: *Chaos and Fractals.* Berlin, Springer 1992.

[17] Schadel E.: *Musik als Trinitätsymbol.* Frankfurt am Main, P. Lang 1995.

[18] Schenck H.: *Der Goldene Schnitt.* Augsburg, H. Rösler-Verlag 1959.

[19] Schroeder M. R.: *Number Theory in Science and Communication.* Berlin, Springer 1990.