Václav Medek

Ovály v projektívnych rovinách

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 20 (1975), No. 4, 204--211

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/139518`

Ovály v projektívnych rovinách

Václav Medek, Bratislava

1. Úvod

Projektívna geometria je jednou z klasických geometrických disciplín. Poznatky z tejto oblasti sa hromadili v priebehu mnohých stáročí. Prvú ucelenú teóriu publikoval francúzsky matematik V. Poncelet (1788 – 1867) v knihe *Traité des propriétés projectives des figures* (1822). V 19. storočí sa projektívna geometria, najmä zásluhou francúzskych a nemeckých geometrov, prudko rozvíjala. Aj naši geometri koncom 19. a na začiatku 20. storočia sa intenzívne venovali projektívnej geometrii a prispeli mnohými poznatkami do tejto teórie (E. Weyr, J. Sobotka, Č. Jarolímek, B. Procházka, B. Bydžovský, F. Kadeřávek a mnohí iní). O stave teórie na začiatku 20. storočia sa možno poučiť z obsiahlej monografie J. Vojtěch: *Geometrie projektivní* (1932).

Obdobie okolo prvej svetovej vojny znamenalo prakticky zavŕšenie klasickej projektívnej geometrie (t. j. projektívnej geometrie budovanej nad telesami reálnych a komplexných čísiel). Ale už predtým sa ukazujú príznaky (najmä u anglických a amerických geometrov) renesancie projektívnej geometrie v tom zmysle, že sa začínajú študovať omnoho všeobecnejšie štruktúry. Táto moderná projektívna geometria sa rozvíjala v období medzi svetovými vojnami a najmä po druhej svetovej vojne, keď sa objavil celý rad fundamentálnych viet. Objavili sa úzke súvislosti s modernými algebraickými štruktúrami, čo podstatne ovplyvnilo ďalší rozvoj teórie. Záujem sa sústredil najmä na štúdium projektívnych rovín a dnes už existuje mnoho učebníc a monografií o projektívnych rovinách (jednou z prvých je G. Pickert: *Projektive Ebenen* (1955) a nateraz najobsiahlejšou monografiou o konečných projektívnych rovinách je P. Dembowski: *Finite Geometries* (1958)).

2. Projektívne roviny

Pretože projektívna geometria priestorov rozmeru väčšieho ako 2 sa v podstate neveľmi líši od klasickej projektívnej geometrie (pozri napr. [1]), uvediem len niektoré základné pojmy a poznatky z teórie projektívnych rovín.

Projektívna rovina (v ďalšom budeme hovoriť niekedy stručne aj len o rovine) sa definuje axiomaticky tak, aby axiómy vyjadrovali tie najvšeobecnejšie vlastnosti roviny. Preto projektívnu rovinu definujeme ako neprázdnu množinu bodov s istými podmnožinami, ktoré nazývame priamkami, a s reláciou incidencie bodov a priamok, pričom platia tieto tri axiómy:

P 1. *Každé dva rôzne body sú incidentné práve s jednou priamkou*;

P 2. *každé dve rôzne priamky sú incidentné práve s jedným bodom*;

P 3. *existujú také štyri body, z ktorých žiadne tri nie sú incidentné s jednou priamkou.*

Namiesto rečenia „bod incidentný s priamkou„ hovoríme tiež „bod leží na priamke“, „priamka prechádza bodom“ a pod.

Uvedené tri axiómy sú natoľko všeobecné, že len na ich podklade možno odvodiť iba málo vlastností projektívnej roviny. Jedna z najdôležitejších vlastností, ktorú možno odvodiť na podklade axióm P 1.—P 3. je tá, že všetky priamky jednej projektívnej roviny majú „rovnaký počet“ bodov, alebo presnejšie: dve priamky a, a' jednej projektívnej roviny ako množiny bodov sú ekvivalentné. Dôkaz tohoto tvrdenia je veľmi jednoduchý (obr. 1.). Mimo priamok a, a' si zvolíme bod O (dá sa dokázať, že taký bod vždy existuje) a spojnica bodu O s bodom $A \in a$ nech pretne priamku a' v bode A'. Tým sme našli bijekciu množiny všetkých bodov priamky a na množinu všetkych bodov priamky a'.

V súvislosti s týmto poznatkom sa vynárajú najmä tieto dve otázky: 1. či existujú projektívne roviny s ľubovoľnou mohutnosťou množiny bodov na priamke a 2. či dve roviny s tou istou mohutnosťou množiny bodov na priamke sú už izomorfné (t. j. či existuje taká bijekcia bodov jednej roviny na druhú rovinu, že priamky sa zobrazia opäť do priamok).

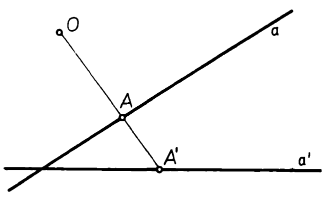
Odpoveď na prvú otázku nie je úplne známa. V prípade konečných rovín (t. j. takých, ktoré obsahujú konečný počet bodov) hovoríme, že rovina má rád n, ak každá jej priamka obsahuje práve $n + 1$ bodov. Je známe, že existujú roviny rádu $n = p^q$, kde $p > 1$ je prvočíslo a q je prirodzené číslo. Roviny iného rádu sa doteraz nepodarilo skonštruovať a vzniká preto domnienka, že roviny iného rádu ani neexistujú. Najlepší výsledok o existencii roviny rádu n predstavuje Bruck-Ryserova veta (1949): Ak $n \equiv 1, 2 \pmod 4$ a ak sa nedá písať $n = a^2 + b^2$, kde a, b sú prirodzené čísla, potom neexistuje rovina rádu n. Podľa tejto vety neexistujú roviny s rádmi 6, 14, 21, atď. Existujú roviny rádu 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, atď; nevie sa nič o existencii rovín rádu 10, 12, 15, atď. Nekonečné roviny existujú pre všetky mohutnosti bodov na priamke.

Pokiaľ ide o druhú otázku, vie sa, že roviny rádu 2, 3, 4, 5, 7, 8 sú svojím rádom jednoznačne určené (až na izomorfizmus). Sú však známe viaceré navzájom neizomorfné roviny rádu 9. Všeobecnejšie platí: Existujú aspoň dve neizomorfné roviny rádu p^q, kde $q > 1$ a $p > 2$ ([2]).

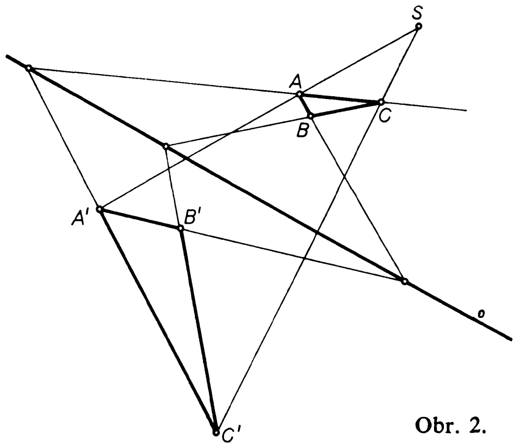
Mnoho úsilia sa venovalo štúdiu kolineácií, t. j. automorfizmov projektívnych rovín. V projektívnej rovine nemusia existovať ani tie najjednoduchšie kolineácie — perspektívne kolineácie. Perspektívna kolineácia je taká kolineácia, ktorá ponecháva invariantnými všetky body jednej priamky o (os kolineácie). Potom sa dá dokázať, že existuje taký bod S (stred kolineácie), že každá priamka ním prechádzajúca je invariantná. Príslušná situácia je znázornená na obr. 2. Nech obrazom bodu A je bod A'; potom obraz bodu B leží na priamke SB a priamky AB, $A'B'$ sa musia pretínať na osi o. Obraz bodu C môžeme teraz nájsť alebo pomocou bodov A, A' alebo pomocou bodov B, B'. Ak kolineácia existuje, musíme v obidvoch prípadoch dostať ten istý bod C'.

Z obr. 2. je bezprostredne vidieť, že existencia perspektívnej kolineácie súvisí s Desarguesovou vetou: Ak spojnice odpovedajúcich vrcholov dvoch trojuholníkov $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ prechádzajú jedným bodom, potom priesečníky odpovedajúcich strán ležia na jednej priamke.

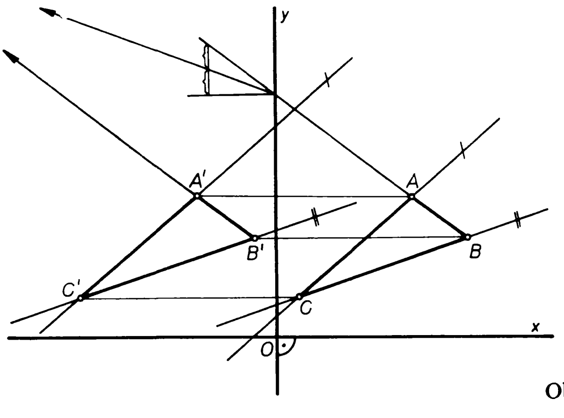
Desarguesova veta sa uvádza ako ďalšia axióma P 4. projektívnych rovín a je ekvivalentná s existenciou všetkých perspektívnych kolineácií v tej rovine. Ďalej je ekvivalentná s tým, že tá rovina je izomorfná s rovinou nad telesom T. Telesá sú známe algebraické štruktúry. Vytvoríme karteziánsky súčin $T \times T \times T$ a na ňom reláciu ekvivalencie $\sim$ takto: $(a, b, c) \sim (a', b', c') \Leftrightarrow a' = ak, b' = bk, c' = ck$, kde $k \neq 0$ (prvok $(0, 0, 0)$ vylučujeme zo svojich úvah). Potom body roviny sú triedy ekvivalencie $[m, n, p]$ pri relácii $\sim$ a priamky sú množiny všetkých takých bodov $[x, y, z]$, že o prvkoch x, y, z platí $ax + by + cz = 0$, kde aspoň jeden z prvkov a, b, c je rôzny od nuly.



Obr. 1.



Obr. 2.



Obr. 3.

Ako ďalšia axióma P 5. sa zavádza tzv. Pappova veta: *Nech a, a' sú dve rôzne priamky v rovine a nech rôzne body A, B, C ležia na priamke a a rôzne body A', B', C' ležia na priamke a'; potom body $P = AB' \cap A'B$, $Q = AC' \cap A'C$ a $R = BC' \cap B'C$ ležia na jednej priamke.* Axióma P 5. je ekvivalentná s tým, že rovina je izomorfná s rovinou nad komutatívnym telesom T. Axióma P 4. je teda dôsledkom axiómy P 5. Pre konečné projektívne roviny sú axiómy P 4. a P 5. ekvivalentné. Existujú však také nekonečné desarguesovské roviny, v ktorých neplatí axióma P 5. (napr. rovina nad telesom kvaterniónov). Roviny vyhovujúce axióme P5. nazývame pappovskými. Reálna, resp. komplexná projektívna rovina (t. j. rovina nad telesom reálnych, resp. komplexných čísiel) sú najznámejšie príklady pappovských rovín.

Príklad nedesarguesovskej roviny je Moultonova rovina (obr. 3.): V rozšírenej Euklidovej rovine ponecháme všetky body, zavedieme pravouhlú súradnicovú sústavu, a priamky Moultonovej roviny budú množiny bodov $\{[x, y] : x = k$, alebo $y = mx + k$, kde $m \geqq 0\}$ a $\{[x, y] : y = mx + k$, ak $x \geqq 0$, $y = m/2x + k$, ak $x < 0$, kde $m < 0\}$ Spojnice odpovedajúcich vrcholov trojuholníkov $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ prechádzajú jedným bodom, ale priamky, na ktorých ležia ich odpovedajúce strany, sa nepretínajú na jednej priamke.

3. *k*-oblúky

k-oblúk v projektívnej rovine je množina obsahujúca práve k bodov, z ktorých žiadne tri neležia na jednej priamke. Najjednoduchšie k-oblúky sú 3-oblúky a 4-oblúky (štvorrohy), ktoré existujú v každej projektívnej rovine.

Jedným zo základných problémov v teórii k-oblúkov je problém úplných k-oblúkov. Úplný k-oblúk je taký k-oblúk, ktorý nie je časťou žiadneho h-oblúka, kde $h > k$, čiže nie je možné dodať k tomu k-oblúku žiadny ďalší bod tak, aby vznikol $(k + 1)$-oblúk. Ide v podstate o to, nájsť nejaké vzťahy medzi rádom roviny a číslom k. Týmto problémom sa hodne zaoberala talianska škola (pozri [1]).

Keďže priamka môže mať s k-oblúkom spoločné najviac dva rôzne body, môže byť priamka alebo sečnicou k-oblúka (ak má s ním spoločné práve dva rôzne body), alebo dotyčnicou (ak má s ním spoločný práve jeden bod) alebo vonkajšou priamkou (ak s ním nemá žiadny spoločný bod). Keďže každým bodom v rovine rádu n prechádza práve $n + 1$ rôznych priamok, každým bodom k-oblúka prechádza práve $n - k + 2$ dotyčníc.

Z vlastností projektívnej roviny vyplýva, že číslo k sa môže najviac rovnať číslu $n + 2$. Skutočne, ak A je ľubovoľný bod k-oblúka, prechádza ním $n + 1$ rôznych priamok a na každej z nich môže ležať ešte najviac jeden bod k-oblúka. Tieto $(n + 2)$-oblúky existujú len v rovinách párneho rádu a nemajú žiadne dotyčnice.

V rovine nepárneho rádu platí: $k \leqq n + 1$. Skutočne, keby $k = n + 2$, zvolíme ľubovoľný bod O neležiaci na k-oblúku a zostrojíme všetky sečnice k-oblúka prechádzajúce bodom O. Na týchto sečniciach leží párny počet bodov a keďže $n + 2$ je nepárne číslo, existuje aspoň jeden taký bod M k-oblúka, ktorý neleží na žiadnej sečnici bodom O; potom by ale priamka OM bola dotyčnicou $(n + 2)$-oblúka, čo nie je možné.

4. Ovály

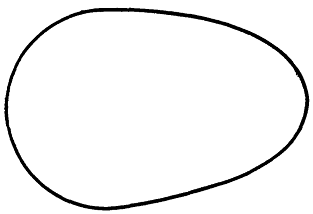
Ovál v konečnej rovine rádu n je $(n + 1)$-oblúk. Ovál má v každom svojom bode práve jednu dotyčnicu. Na podklade tejto vlastnosti sa definuje ovál aj v nekonečných rovinách. Všeobecne je teda ovál taká množina bodov, že žiadne tri z nich neležia na jednej priamke a v každom bode má práve jednu dotyčnicu.

V rovine nepárneho rádu prechádzajú bodom mimo oválu práve dve, alebo žiadna dotyčnica ([3]). Potom môžeme body roviny vzhľadom na ovál rozdeliť na tri množiny: 1. vonkajšie body, ktorými prechádzajú dve rôzne dotyčnice oválu, 2. body oválu a 3.

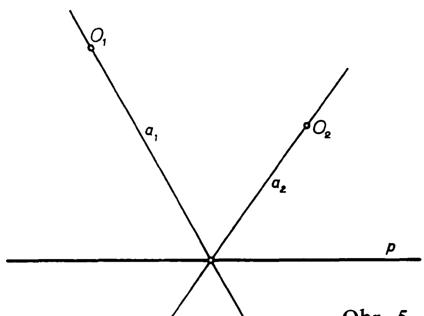
vnútorné body, ktorými neprechádza žiadna dotyčnica oválu. Jednoduchými kombinatorickými úvahami sa môžeme presvedčiť o tom, že v rovine nepárneho rádu n existuje vzhľadom na ovál $\mathcal{O}$ $\frac{1}{2}n(n + 1)$ vonkajších bodov a $\frac{1}{2}n(n - 1)$ vnútorných bodov. Vonkajšia priamka obsahuje $\frac{1}{2}(n + 1)$ vonkajších aj vnútorných bodov. Sečnica obsahuje $\frac{1}{2}(n - 1)$ vonkajších aj vnútorných bodov. ([4]).

V rovinách párneho rádu je situácia odlišná. Nech s je sečnica oválu $\mathcal{O}$ v rovine párneho rádu a nech pretína ovál $\mathcal{O}$ v bodoch A, B. Okrem bodov A, B leží na sečnici s ešte $n - 1$ bodov a taktiež na ováli okrem bodov A, B existuje ešte $n - 1$ bodov. Každým bodom $M \in s$ musí prechádzať aspoň jedna dotyčnica oválu $\mathcal{O}$, pretože všetky sečnice oválu $\mathcal{O}$ bodom M odčerpajú z neho párny počet bodov a ovál obsahuje $n + 1$, teda nepárny počet bodov. Potom ale musí každým bodom sečnice s prechádzať (okrem bodov A, B) práve jedna dotyčnica oválu $\mathcal{O}$. Nech sa teraz dve rôzne dotyčnice oválu pretnú v bode O; potom bodom O nemôže prechádzať žiadna sečnica, a teda bodom O prechádzajú všetky dotyčnice oválu $\mathcal{O}$. Bod O sa nazýva jadrom oválu $\mathcal{O}$ a spolu s ním tvorí $(n + 2)$-oblúk v tej rovine.

Útvary úzko súvisiace s oválmi sú kužeľosečky. Zrejme každá kužeľosečka v reálnej projektívnej rovine je oválom. Naopak to však neplatí. Napr. v rozšírenej Euklidovej rovine útvar skladajúci sa z polkružnice a polelipsy (obr. 4.) je oválom, ale nie je kužeľosečkou. Kužeľosečku možno definovať aj vo všeobecnejších rovinách, ako je reálna projektívna rovina. V pappovských rovinách možno použiť na definíciu kužeľosečky tzv. projektívne zväzky priamok.



Obr. 4.



Obr. 5.

Projektívne zväzky priamok možno definovať vo všeobecných projektívnych rovinách. Najprv definujeme perspektivitu medzi dvoma zväzkami priamok takto (obr. 5.): Nech O_1, O_2 sú stredy daných zväzkov priamok a nech p je priamka, ktorá neprechádza žiadnym z bodov O_1, O_2; potom obraz priamky a_1 prechádzajúcej bodom O_1 je priamka a_2 prechádzajúca bodom O_2 a pretínajúca priamku a_1 v bode na priamke p. Ak tento postup zopakujeme konečný počet krát, dostaneme zobrazenie zväzku so stredom O_1 na zväzok so stredom O_n, ktorému hovoríme projektivita. Dá sa dokázať, že v pappovských rovinách je projektivita určená troma rôznymi priamkami a ich rôznymi obrazmi.

Ak sú stredy zväzkov rôzne, je možné príslušnú projektivitu zložiť vždy z dvoch perspektivít.

Ak máme také dva projektívne zväzky priamok v pappovskej rovine, potom priesečníky priamok jedného zväzku s ich obrazmi v druhom zväzku tvoria kužeľosečku. To je Steinerova definícia kužeľosečky, ktorá je vždy oválom. Takým istým spôsobom možno definovať kužeľosečku aj vo všeobecných rovinách, napr. v desarguesovských (pozri [5]), alebo iných (pozri [6]). Ovšem takto definované kužeľosečky v týchto všeobecnejších rovinách už nemusia byť oválmi. O konečných rovinách platí Segreho veta ([7]): Každý ovál v konečnej desarguesovskej rovine nepárneho rádu je kužeľosečka.

V rovinách párneho rádu nie je každý ovál kužeľosečkou. Nech $\mathcal{O}$ je kuželosečka v rovine párneho rádu $n > 7$; potom všetky jej dotyčnice prechádzajú jadrom O a body kužeľosečky $\mathcal{O}$ spolu s jadrom O tvoria $(n + 2)$-oblúk. Ak z tohoto $(n + 2)$-oblúka vynecháme jeden bod A rôzny od bodu O, dostaneme ovál $\mathcal{O}'$. Ovály $\mathcal{O}$ a $\mathcal{O}'$ majú potom spoločných viac ako 5 bodov a ovál $\mathcal{O}'$ nemôže byť kužeľosečkou, pretože 5 bodmi prechádza jediná kužeľosečka, v tomto prípade kužeľosečka $\mathcal{O}$.

Všeobecne o počte spoločných bodov dvoch oválov v konečnej rovine nepárneho rádu platí: Ak $n > 5$ a ak majú dva ovály spoločných viac ako polovicu svojich bodov, potom sú totožné ([3]). V rovinách párneho rádu môžu mať dva rôzne ovály spoločných aj n bodov (napr. ovály $\mathcal{O}$ a $\mathcal{O}'$ z predchádzajúceho príkladu majú spoločných n bodov).

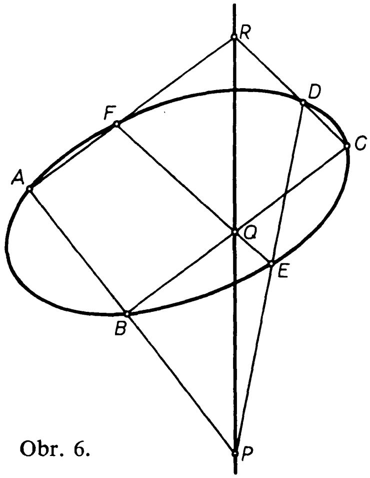
S týmito úvahami súvisí takýto problém: Všeobecne nie je možné zvoliť v rovine rádu n hocijaký k-oblúk $\mathcal{K}$ $(k > (n + 1)/2)$ ako časť oválu. Ako treba zvoliť k-oblúk $\mathcal{K}$, aby bol časťou oválu a ako sa dajú skonštruovať jeho ďalšie body?

Zaujímavé sú niektoré vzťahy medzi vlastnosťami oválu a štruktúrou príslušnej roviny. Napríklad ovál sa nazýva perspektívny, ak ku každému bodu S neležiacemu na ováli $\mathcal{O}$ existuje taká perspektívna kolineácia so stredom S, ktorá ponecháva ovál $\mathcal{O}$ invariantný. Potom platí: Ak v desarguesovskej rovine existuje perspektívny ovál, tak rovina je pappovská ([8]). Predpoklady tejto vety sú veľmi silné; pravdepodobne by sa dali zoslabiť v tom zmysle, že by sa nepožadovala existencia všetkých perspektívnych kolineácií, ale len niektorých.

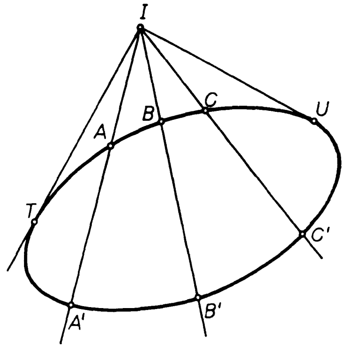
Podobný vzťah dostávame pre tzv. pascalovské ovály; ovál sa nazýva pascalovský, ak každá 6-tica A, B, C, D, E, F jeho bodov je pascalovská, t. j. platí, že body $P = AB \cap DE$, $Q = BC \cap EF$ a $R = CD \cap AF$ ležia na jednej priamke (ak sú niektoré dva susedné body totožné, je ich spojnicou dotyčnica oválu v tom bode, obr. 6.). Ak v projektívnej rovine existuje pascalovský ovál, potom rovina je pappovská a ovál je kužeľosečka ([9], [10]). Predpoklady tejto vety by bolo možné pravdepodobne tiež oslabiť.

O prvú klasifikáciu oválov sa pokúsil Ostrom ([11]), ale jeho klasifikácia je neúplná. Úplnú klasifikáciu oválov popisuje Buekenhout ([12]).

Buekenhout vychádza z inej definície oválu. Predstavme si ovál $\mathcal{O}$ a bod I mimo neho (obr. 7.); zobrazenie $\mathcal{I}$ oválu $\mathcal{O}$ na seba môžeme skonštruovať takto: obraz bodu $A \in \mathcal{O}$ je druhý priesečník priamky IA s oválom, ak priamka IA je sečnicou; ak je priamka IA dotyčnicou, je bod A invariantným bodom zobrazenia $\mathcal{I}$. Je vidieť, že zobrazenie $\mathcal{I}$ je involúciou. Tieto zobrazenia berie Buekenhout za základ pri definícii oválu, pričom ho definuje samostatne bez ohľadu na to, či leží v nejakej projektívnej rovine: Ovál je množina bodov spolu so sústavou involúcií, ktoré spĺňajú tieto podmienky: 1. každá involúcia je involutórna, 2. pre každé dve dvojice bodov (A_1, A_2), (B_1, B_2), kde $A_i \neq B_j$ $(i, j = 1, 2)$ existuje práve jedna involúcia, ktorá vymieňa A_1 s B_1 a A_2 s B_2, 3. existujú aspoň tri body. Ovál, tak ako sme ho definovali predtým, nazýva projektívnym oválom. Zrejme každý projektívny ovál je oválom. Opak nemusí platiť a vzniká otázka vnoriteľnosti oválu do projektívnej roviny. Jedna podmienka vnoriteľnosti je táto ([13]): Nech $\mathscr{I}$, $\mathscr{J}$ sú dve rôzne involúcie, ktoré nemajú žiadny spoločný invariantný bod; potom existuje práve jedna taká involúcia $\mathscr{K} \neq \mathscr{I}, \mathscr{J}$, ktorá je zámenná s obidvoma involúciami $\mathscr{I}$, $\mathscr{J}$ (involúcie $\mathscr{I}$, $\mathscr{K}$ sú zámenné práve vtedy, ak $\mathscr{I}\mathscr{K} = \mathscr{K}\mathscr{I}$).



Obr. 6.



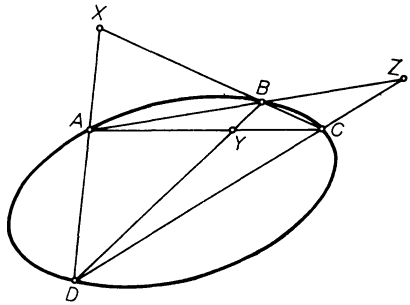
Obr. 7.

Buekenhout klasifikuje ovály pomocou istej incidenčnej štruktúry $\mathscr{P}(\mathcal{O})$ priradenej oválu $\mathcal{O}$. Body štruktúry $\mathscr{P}(\mathcal{O})$ sú všetky body oválu $\mathcal{O}$ a všetky involúcie. Priamky štruktúry $\mathscr{P}(\mathcal{O})$ sú: 1. dva body oválu $\mathcal{O}$ a všetky involúcie, ktoré ich zamieňajú, 2. bod oválu $\mathcal{O}$ a všetky tie involúcie, ktoré majú ten bod invariantný. Projektivita na ováli $\mathcal{O}$ je permutácia, ktorá je zložením konečného počtu involúcií. Automorfizmus oválu je permutácia zachovávajúca involúcie. Involúcia se nazýva regulárnou, ak je automorfizmom. Priamka štruktúry $\mathscr{P}(\mathcal{O})$ sa nazýva regulárnou, ak všetky jej involúcie sú regulárne. Priamka z $\mathscr{P}$ $(\mathcal{O})$ sa nazýva pascalovskou, ak projektivita zložená z ľubovoľných troch jej involúcií je opäť involúciou. Takáto priamka sa nazýva preto pascalovskou, pretože niektoré šestice bodov oválu $\mathcal{O}$ sú za uvedeného predpokladu pascalovské. Nech bod $A \in \mathcal{O}$ neleží na danej pascalovskej priamke a nech postupne platí: $\mathscr{I}A = B$, $\mathscr{J}B = C$, $\mathscr{K}C = D$, $\mathscr{K}A = F$, $\mathscr{J}F = E$. Ak je priamka pascalovská, musí $\mathscr{I}\mathscr{J}\mathscr{K} = \mathscr{K}\mathscr{J}\mathscr{I}$ čiže $\mathscr{I}\mathscr{J}\mathscr{K}A = \mathscr{K}\mathscr{J}\mathscr{I}A$; potom spojnica IE musí prechádzať aj bodom D a šestica bodov A, B, C, D, E, F je pascalovská.

Ovály sa klasifikujú podľa toho, čo tvorí množinu jej všetkých regulárnych priamok. Sú tieto možnosti: I. prázdna množina, II. jedna sečnica, III. jedna dotyčnica, IV. všetky dotyčnice, V. všetky dotyčnice a všetky sečnice. Typ V. má tieto podtypy: 1. žiadna pascalovská priamka, 2. všetky dotyčnice sú pascalovské, 3. všetky sečnice sú pascalovské, 4. všetky priamky z $\mathscr{P}(\mathcal{O})$ sú pascalovské (túto poslednú triedu tvoria kužeľosečky).

Pri dôkazoch rôznych tvrdení o ováloch sa používajú rôzne súradnicové sústavy viažúce sa na ovál ([9], [12], [14]).

Nakoniec by som uviedol jednu vlastnosť oválov, ktorá ich odlišuje od kužeľosečiek. Ak si na kužeľosečke v reálnej projektívnej rovine zvolíme 4 rôzne body A, B, C, D, dostávame štvorroh a jeho diagonálne vrcholy X, Y, Z tvoria polárny trojuholník (obr. 8.); potom dva z bodov X, Y, Z sú vždy vonkajšie a jeden je vnútorný bod. Ďalej,



Obr. 8.

ak ponecháme jeden z bodov X, Y, Z (napr. X) pevný a body A, B, C, D meníme tak aby bod X bol diagonálnym vrcholom štvorrohu A, B, C, D, potom body Y, Z sa pohybujú po priamke, ktorá je polárou bodu X. Ani jednu z týchto vlastností nie je možné preniesť na ovály. Existujú ovály, kde všetky tri vrcholy polárneho trojuholníka sú napr. vonkajšie body. Existujú ovály, kde pre niektoré body X ležia body Y, Z na tej istej priamke, zatiaľ čo o iných bodoch to neplatí.

Literatúra

[1] Segre, B.: *Lectures on Modern Geometry.* Roma: Cremonese 1961.
[2] Dembowski, P.: *Finite geometries.* Berlin: Springer 1968.
[3] Qvist, B.: *Some remarks concerning curves of the second degree in a finite plane.* Ann. acad. sci. fennicae, Ser. *A I*, 134 (1952).
[4] Martin, G., E.: *On arcs in a finite projective plane.* Canad. J. Math. *19* (1967) 376—393.
[5] Berz, E.: *Kegelschnitte in desargues'schen Ebenen.* Math. Z. *78* (1962) 55—85.
[6] Krüger, W.: *Kegelschnitte in Moufangebenen.* Math. Z. *120* (1971) 41—60.
[7] Segre, B.: *Ovals in a finite projective plane.* Canad. J. Math. *7* (1955) 414—416.
[8] Buekenhout, F.: *Ensembles quadratiques des éspaces projectifs,* Math. Z. *110* (1969) 306—318.
[9] Rigby, J. B.: *Pascal ovals in projective planes.* Canad. J. Math. *21* (1969) 1462—1476.
[10] Artzy, R.: *Pascal's theorem on an oval.* Amer. Math. Monthly *75* (1968) 143—146.
[11] Ostrom, T. G.: *Ovals' dualities and Desargues' theorem.* Canad. J. Math. *7* (1955) 417—431.
[12] Buekenhout, F.: *Etude intrinsèque des ovales.* Rendic. Mat. *25* (1966) 1—61.
[13] Medek, V.: *Eine Bemerkung über endliche Ovale ungerader Ordnung.* Mat. čas. *22* (1972) 319 až 322.
[14] Martin, G. E.: *Oval coordinates in a projective plane.* Atti del congresso di geometria combinatoria e sue applicazzioni 1971, 323—330.