Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Miroslav Ouhrabka; Ivo Volf
Fyzikální metaolympiáda

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 20 (1975), No. 4, 226--231

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139517

Fyzikální $^{\text{meta}}$olympiáda

K řešení úloh 1. ročníku fyzikální metaolympiády

• **T 1:** Popište gravitační pole homogenní koule. Své úvahy zdůvodněte a doplňte příslušným grafickým zpracováním. Ukažte, které poznatky z této úlohy lze sdělit žáku střední školy při výkladu tématu gravitační pole.

Výsledky řešení: Gravitační pole homogenní koule můžeme popisovat vektorovou veličinou $\boldsymbol{E}$ (intenzita gravitačního pole) nebo skalární veličinou φ (potenciál gravitačního pole), mezi nimiž platí vztah: $\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} \varphi = -\nabla\varphi$.

a) Gravitační pole homogenní koule o poloměru R v bodech vzdálených $r > R$ popisují vztahy (střed soustavy souřadnic ztotožníme se středem koule; hladinu nulové potenciální energie volíme v nekonečnu):

$$\boldsymbol{E} = -\varkappa \frac{M}{r^2} \boldsymbol{r}^\circ\,; \qquad \varphi = -\varkappa \frac{M}{r} \tag{1}$$

Pole je právě takové, jaké by vytvářel hmotný bod o hmotnosti M umístěný ve středu koule.

b) Pro vnitřek koule platí (za stejných předpokladů jako v a), ale pro $r \leqq R$):

$$\boldsymbol{E} = -\varkappa \frac{M}{R^3}\, r\, \boldsymbol{r}^\circ\,,$$

hodnotu potenciálu, který je konstantní, volíme tak, aby potenciál uvnitř koule měl touž hodnotu jako na povrchu koule.

Návod k řešení: V úloze je třeba vyřešit intenzitu a potenciál uvnitř osamocené duté koule z homogenního materiálu, všude téže tloušťky. Úloha je v podstatě vyřešena ve vysokoškolské učebnici Horák, Z. - Krupka, F. - Šindelář, V.: *Technická fyzika* (Praha: SNTL 1961), s. 191–197.

Žákům střední školy sdělujeme v podstatě jen výsledky řešení s odkazem na možné samostatné studium.

a) Ve všech bodech uvnitř osamocené duté homogenní koule je intenzita gravitačního pole nulová.

b) Vně duté koule a na jejím povrchu je intenzita stejná, jako by ve středu koule byl umístěn hmotný bod téže hmotnosti, jakou má dutá koule.

Odtud lze psát pro $r > R$ vztahy (1); pro místa $r \leqq R$ je možno vyvodit

$$\boldsymbol{E} = -\varkappa \frac{M'}{r^2} \boldsymbol{r}^\circ\,, \text{ kde } M' = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \tfrac{4}{3}\pi r^3 = \frac{M}{R^3} r^3\,,$$

$$\boldsymbol{E} = -\varkappa \frac{M}{R^3}\, r\, \boldsymbol{r}^\circ\,, \quad \boldsymbol{E}(r) \text{ je lineární funkce}\,.$$

Výsledky úvah lze vyjádřit i graficky.

Řešení problematiky je nutné k tomu, aby žáci pochopili, že intenzita gravitačního pole ve středu Země ($r \to 0_+ m$) neroste nad všechny meze, jak lze usoudit z formální aplikace gravitačního zákona platného pro dva hmotné body.

● **T 2:** Kruhová smyčka o poloměru R je vyrobena z homogenního drátu malého průřezu a je vyztužena vzpěrou ze stejného drátu, která je průměrem (viz obr. 1). Bude-li smyčka volně otáčivá kolem osy o_1 (popř. kolem osy o_2) jdoucí bodem A (popř. bodem B) kolmo k rovině smyčky, vznikne fyzické kyvadlo. Určete dobu kyvu v obou případech a jejich poměr.

Výsledky řešení: a) Doba kyvu

$$\tau_A = \pi \sqrt{\frac{2R}{3g} \frac{3\pi + 2}{\pi + 1}},$$

závisí tedy pouze na velikosti poloměru R.

b) $\tau_B = \tau_A$; doba kyvu τ je stálá vzhledem k libovolnému bodu na dané kružnici.

Návod k řešení: Vyjdeme ze vztahu pro dobu kyvu fyzického kyvadla

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{J}{mga}},$$

kde m je hmotnost tělesa, a je vzdálenost těžiště od bodu závěsu (osy otáčení). Musíme určit moment setrvačnosti J_A, popř. J_B, hmotnost tělesa m ($m = m_1 + m_2$, m_1 je hmotnost smyčky, m_2 hmotnost vzpěry).

Nechť drát má všude kruhový průřez o poloměru r; z důvodů symetrie smyčky a homogennosti tíhového pole je těžiště totožné se středem S smyčky; $a = R$. Momenty setrvačnosti vzhledem k bodu A (s použitím Steinerovy věty)

$$J_1 = m_1R^2 + m_1R^2 = 2m_1R^2,$$

$$J_2 = 4/3m_2R^2.$$

Z aditivnosti momentu setrvačnosti

$$J_A = 2m_1R^2 + 4/3m_2R^2$$

$$J_B = 2m_1R^2 + 1/3m_2R^2 + m_2R^2 = J_A.$$

Hmotnosti $m_1 = \mu \,.\, 2\pi R$, $m_2 = \mu \,.\, 2R$ (μ je lineární hustota drátu). Odtud:

$$J_A = 4\mu R^3(\pi + 2/3); \quad m = 2R\mu(\pi + 1),$$

$$\tau_A = \pi \sqrt{\frac{2R}{3g} \frac{3\pi + 2}{\pi + 1}}$$

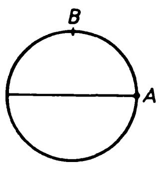
$$\tau_B = \tau_A.$$

Protože pro každý bod X smyčky platí $J_X = J_A$ a hmotnost m je konstantní, je $\tau_X = \tau_A$.

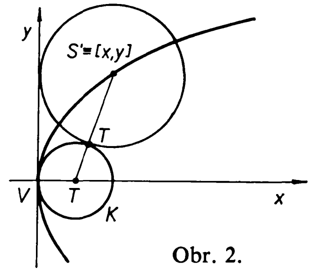
● **T 3:** a) Dokažte užitím Huygensova principu toto tvrzení: „Části rovinné vlny v blízkosti optické osy dutého parabolického zrcadla se odrážejí jako části kulové vlny prostupující ohniskem zrcadla“.

b) Sestrojte alespoň část jedné vlnoplochy odražené vlny.

c) Dokažte také, že odrazem rovinné vlny na dutém kulovém zrcadle vzniká kulová vlna sbíhající se ve vzdálenosti $R/2$ od vrcholu zrcadla (R je poloměr křivosti zrcadla), předpokládáme-li, že zrcadlo odráží jen část rovinné vlny v blízkosti osy zrcadla.



Obr. 1.



Obr. 2.

Poznámka: Důkaz lze provést i bez poměrně složitého výpočtu obalové křivky odražených sekundárních vlnoploch.

Návod k řešení: Vzhledem k osové symetrii stačí důkaz provést v rovinném řezu. Soustava souřadnic a umístění paraboly je zřejmé z obr. 2. Parabola nechť je popsána vztahem $y^2 = +2px$, $p > 0$. Uvažujeme okamžik, kdy určitá vlnoplocha dospěla do bodu V. V tomto okamžiku existuje pro každý bod $[x, y]$ paraboly sekundární vlnoplocha o poloměru právě x (viz obr. 2). Obalová křivka soustavy těchto čelních vlnoploch vytváří podle Huygensova principu čelo odražené vlny.

Stačí nyní dokázat, že mezi všemi obalovými křivkami existuje i křivka o rovnici $(x - p/2)^2 + y^2 - p^2/4 = 0$, tj. kružnice K o středu $F \equiv [p/2, 0]$ a poloměru $r = p/2$. Přesný, ale poněkud složitější výpočet obalové křivky je možno obejít touto úvahou. Předně je zřejmé, že pro každý bod T kružnice K existuje alespoň jedna sekundární vlnoplocha, která se jí dotýká v bodě T (stačí vést přímku FT a její průsečík s parabolou označí bod S'). A platí to i naopak. Kružnice K je tedy vytvořena dotykovými body, tj. je možnou obalovou křivkou. Opětovným užitím Huygensova principu na kružnici K dojdeme k závěru, že kulová vlna se sbíhá v bodě $F \equiv [p/2, 0]$.

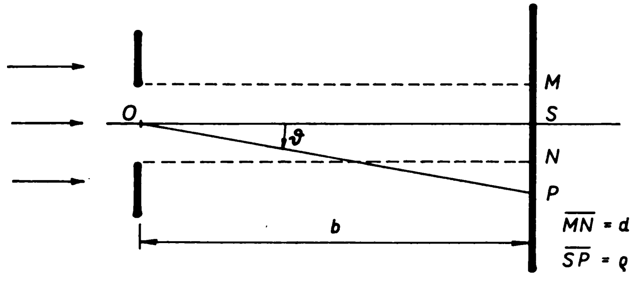
c) Rovinný řez kulovou plochou: $(x - r)^2 + y^2 - r^2 = 0$, tedy $x^2 - 2rx + y^2 = 0$. Pro r dostatečně velké lze x^2 zanedbat vůči dalším členům a můžeme psát $y^2 = 2rx$; je tedy možno považovat kulové zrcadlo v tomto přiblížení za parabolické zrcadlo s parametrem $p = r$.

● **T 4:** Odhadněte rozměr kruhového otvoru dírkové komory tak, aby rozlišovací schopnost byla optimální, tj. aby obraz bodového zdroje měl minimální rozměry. Uvažujte tyto podmínky:

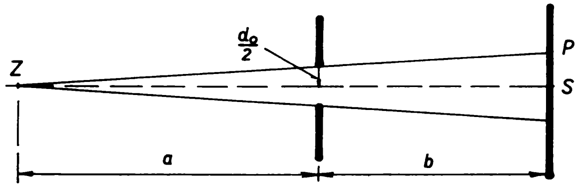
a) Bodový zdroj monochromatického světelného pole je ve vzdálenosti $a \to +\infty$ před clonou s otvorem; obraz vytvořený otvorem pozorujeme na stínítku ve vzdálenosti b za clonou.

b) Bodový zdroj monochromatického světelného pole je v konečné vzdálenosti a před clonou.

Návod k řešení: Osová symetrie umožňuje získat přibližné řešení úlohy. Odhadnout optimální rozměr kruhového otvoru komory znamená odhadnout polohu prvého minima v rozdělení energie v rovině stínítka. K řešení použijeme obr. 3; $MN = d$, body M, N



Obr. 3.



Obr. 4.

vyznačují rozhraní světla a geometrického stínu. Z elementární teorie ohybu na štěrbině šířky d víme, že prvé minimum nastává ve směru ϑ určeném vztahem $\sin \vartheta = \lambda/d \doteq \vartheta$ (neboť předpokládáme, že $b \gg d$, $b \gg \lambda$). Můžeme tedy předpokládat, že i pro kruhový otvor průměru d je poloha minima přibližně stejná, že tedy platí $\vartheta \approx \lambda/d$. V trojúhelníku POS je $\vartheta \approx \varrho/b = \lambda/d$ a odtud $\varrho = b\lambda/d$. Tedy průměr 2ϱ světlé centrální skvrny na stínítku, vzniklé jako nulté difrakční maximum, jest $D = 2b\lambda/d$. Optimální podmínky nastanou zřejmě tehdy, bude-li $d = D$, tj. průměr otvoru bude stejný jako průměr nultého difrakčního maxima, tedy

$$d_0 = \frac{2b\lambda}{d_0} \quad \text{a} \quad d_0 = +\sqrt{2b\lambda}\,.$$

Přesný výpočet dává hodnotu $\varrho = 1{,}22\, b\lambda/d$, a potom $d_0 = +\sqrt{2{,}44 b\lambda}$.

Předpokládáme-li v případě b), že ještě zůstává v platnosti Fraunhofferova approximace,

$$d_0 = \sqrt{2{,}44 \frac{ab\lambda}{a+b}}$$

(pro $a \gg d$, $a \gg \lambda$).

Stačí uvážit, že v optimálním případě platí (obr. 4)

$$\frac{d_0}{2a} = \frac{\varrho}{a+b} \quad \text{a} \quad \varrho = 1{,}22\,\frac{b\lambda}{d_0}.$$

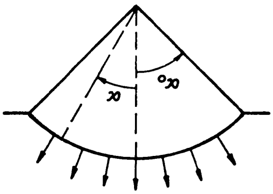
Předložili jsme čtenářům (ale i sobě) jisté problémové situace k vyřešení. Snažili jsme se vyrovnat se s nimi; nečiníme si ovšem nárok na to, že jsme uvedli jedinou správnou metodu řešení úloh. Z práce středoškolského učitele fyziky je známa zkušenost, že se leckdy úloha fyzikálně poměrně jednoduchá stane pro žáka neřešitelná, nemá-li potřebné matematické vědomosti, popř. nezná-li příslušné matematické algoritmy zpracování dat uvedených v úloze. Snažili jsme se tedy, aby složitý matematický aparát, dávající třeba přesnější výsledky, se nestal zatěžující složkou nebo nepřekonatelnou překážkou řešení fyzikálního problému. Tomu odpovídá náš přístup k řešení některých úloh: dospět k výsledku přibližnými metodami.

Úlohy třetího ročníku fyzikální metaolympiády

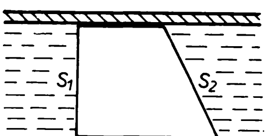
Uvádíme poslední čtveřici úloh

• **T 17:** Homogenní tyč všude stejného průřezu, délky $2l$ a hmotnosti m se opírá koncem A o hladký vnitřní povrch polokulovité nádoby o poloměru r. V dalším bodě B se opírá tyč o kraj nádoby. Určete rovnovážnou polohu tyče. Proveďte diskusi řešení pro různá l.

• **T 18:** Postřikovač k automatickému zalévání trávníku má kulovitý nástavec (obr. 1) s úhlem $\alpha_0 = 45°$ a s velkým počtem otvorů, jimiž vytéká voda stálou rychlostí v_0.



Obr. 1.



Obr. 2.

a) Dokažte, že v případě rovnoměrného rozložení otvorů je trávník zaléván nestejnoměrně.

b) Určete maximální poloměr kruhu, který je postřikovačem zaléván.

c) Poměr počtu dn otvorů a obsahu plochy dS určuje hustotu otvorů; stanovte závislost hustoty otvorů na úhlu α, aby byl kuhový trávník zaléván stejnoměrně.

Předpokládejte, že poloměr nástavce je mnohem menší než rozměry trávníku a postřikovač je umístěn na povrchu Země.

● **D 17:** Obvykle se poloha těžiště tenkých homogenních desek stanovuje pomocí momentové věty, popř. jako průsečík těžnic. Polohu těžiště lze určit i na základě práce při vhodném pohybu tělesa v homogenním tíhovém poli. Navrhněte způsob, jak lze se žáky střední školy stanovit polohu těžiště desky tvaru kruhové výseče o poloměru r a úhlu $2\alpha < 90°$. Je tato podmínka nutná?

● **D 18:** Zákon zachování a přeměny energie patří k základním zákonům přírodních věd. Přesto však lidé po staletí se pokoušeli vynalézt věčný stroj – perpetuum mobile.

a) Ve vodorovném potrubí je píst tvaru podle obr. 2. Z levé strany působí na píst určitá síla velikosti F_1. Protože pravá část pístu má větší plošný obsah ($S_2 > S_1$), je možno očekávat, že též velikost působící síly $F_2 > F_1$. Tak se bude píst trvale pohybovat směrem vlevo a bez vnější působící síly lze získat práci. Jde opravdu o perpetuum mobile nebo je chyba v úvaze?

b) Najděte další podobné úlohy a navrhněte způsob vysvětlení.

Řešení úloh označená na obálce zřetelným nápisem „Fyzikální metaolympiáda" zašlete do redakce Pokroků nejpozději do konce roku 1975. Získávejte další zájemce pro řešení úloh mezi svými spolupracovníky, popř. studenty.

Miroslav Ouhrabka, Ivo Volf

---

jubilea & zprávy

PROF. DR. JAN POTOČEK SEDMDESÁTILETÝ

Prof. dr. Jan Potoček, vedoucí vědecký pracovník Matematického ústavu Univerzity Karlovy a zástupce ředitele tohoto ústavu, se dožil dne 15. prosince 1974 sedmdesáti let. Narodil se v Sarajevu jako syn vojenského lékaře. V letech 1923—1927 studoval matematiku a fyziku na přírodovědecké fakultě brněnské univerzity. Po dokončení studií na této fakultě profesor Potoček působil až do uzavření vysokých škol v r. 1939 na této fakultě jako asistent. Za války vyučoval na průmyslové škole v Brně do ledna 1944, kdy byl okupanty zatčen pro ilegální činnost a až do konce války vězněn. Již před válkou předložil habilitační spis, habilitační řízení bylo však okupací přerušeno; habilitoval se pak na brněnské přírodovědecké fakultě v roce 1945. Ihned po osvobození působil profesor Potoček opět na vyšší průmyslové škole v Brně až do r. 1949. V r. 1949 byl jmenován mimořádným a v r. 1950 řádným profesorem na Vysoké škole technické v Brně. Na této vysoké škole vykonával funkci vedoucího katedry fyziky a též funkci děkana jedné z fakult, a to do r. 1951, kdy Vysoká škola technická byla přeměněna na Vojenskou technickou akademii (VTA). Na VTA působil v létech 1951 až 1955 ve funkci náčelníka katedry fyziky. V této funkci organizoval výuku fyziky pro všechny fakulty VTA včetně vypracování podrobných učebních plánů pro jednotlivé fakulty a oddělení, opatřování učebnic i textů a výuky mladých učitelů.

V říjnu 1955 byl z iniciativy akademika E. Čecha povolán na nově založený Matematický ústav UK, kde jeho hlavním úkolem bylo vedení nově založeného oddělení aplikované matematiky. Jakožto vědecký pracovník MÚKU profesor Potoček konal rozsáhlou přednáškovou činnost, a to jak pro pracovníky ústavu, tak i pro asistenty a studenty MFF UK. Uveďme zde několik názvů jeho přednášek, abychom tak ilustrovali bohatost a pestrost Potočkovy pedagogické činnosti: *Matematické metody hydrodynamiky,*