Robert Karpe

Názorné vysvětlování kapitoly o parciálních derivacích složené funkce

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 8 (1963), No. 3, 153--159

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139490

Literatura

O. KALBUS: *Der deutsche Lehrfilm*. Berlin 1922.
F. F. NAGIBIN: O kinofikacii kursa matematiki v sredněj škole. Matěmatika v škole 1955.
J. MALÁČ: Filmy v matematice. Matematika ve škole 1959.
A. P. GROMOV: *Diafilm i kino na urokach matěmatiki v sredněj škole*. Moskva 1961.
K. DUBECKÝ: Prvé skúsenosti z výskumu školského filmu v matematike. Matematika ve škole 1961/62.
A. M. PYŠKALO: Novyje učebnyje filmy po matěmatike. Matěmatika v škole 1962.

NÁZORNÉ VYSVĚTLOVÁNÍ KAPITOLY O PARCIÁLNÍCH DERIVACÍCH SLOŽENÉ FUNKCE

ROBERT KARPE, Brno

Redakce otiskuje tento článek jako příspěvek k metodice výuky matematiky na vysokých školách.

Nechť jsou dány funkce (splňující předpoklady pro tvoření derivací)

$$z = z(u, v)\,, \quad u = u(x, y)\,, \quad v = v(x, y)\,.$$

Při sestavování parciální derivace, například $\partial z/\partial x$, vyjdeme z formy úplných diferenciálů pro tyto funkce

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial u}\,.\,\mathrm{d}u + \frac{\partial z}{\partial v}\,.\,\mathrm{d}v\,,$$

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}\,.\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\,.\,\mathrm{d}y\,,$$

$$\mathrm{d}v = \frac{\partial v}{\partial x}\,.\,\mathrm{d}x + \frac{\partial v}{\partial y}\,.\,\mathrm{d}y\,.$$

Zde máme dvě nezávisle proměnné: x, y. Při parciálním derivování podle x považujeme však y za konstantu, proto za diferenciály $\mathrm{d}y$ dosadíme do hořejších rovnic nuly. Sestavením takto redukovaných rovnic obdržíme

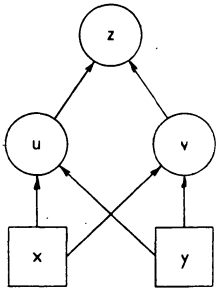
$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial u}\,.\,\frac{\partial u}{\partial x}\,.\,\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial v}\,.\,\frac{\partial v}{\partial x}\,.\,\mathrm{d}x\,,$$

odtud

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\,.\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\,.\,\frac{\partial v}{\partial x}\,.$$

Místo $\mathrm{d}z/\mathrm{d}x$ píšeme na levé straně rovnice $\partial z/\partial x$, abychom tím naznačili, že jde o derivaci funkce, jež má více nezávisle proměnných, z nichž však pouze jedna (značena ve jmenovateli) mění svou velikost.

Tento výklad lze znázornit graficky porovnáním s úlohou z mechaniky: Uvažujme o systému zdrojů (čtverečky) a nádrží (kroužky) propojených potrubím (viz obr. 1).



Obr. 1.

Přírůstek v nádrži z vyjádříme jako důsledek přírůstků v nádržích u, v

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} . du + \frac{\partial z}{\partial v} . dv .$$

Podobně přírůstek v nádrži u, (v) vyjádříme jako důsledek přírůstků ve zdrojích x, y

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} . dx + \frac{\partial u}{\partial y} . dy , \quad dv = \frac{\partial v}{\partial x} . dx + \frac{\partial v}{\partial y} . dy ,$$

kde dx, dy atd. je označení pro přírůstek kapaliny, $\partial u/\partial x$, $\partial v/\partial x$ atd. je označení pro koeficienty úměrnosti, jejichž okamžitá velikost je závislá například na okamžitém vnitřním tlaku v příslušných zdrojích, resp. nádržích.

Pro jistý okamžik tohoto děje lze tedy tyto koeficienty pokládat za konstanty – stejně tak, jako jsou konstanty parciální derivace v daném bodě.

Jestliže nyní přítokové potrubí od zdroje y uzavřeme, bude dy = 0, takže obdržíme

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} . \frac{\partial u}{\partial x} . dx + \frac{\partial z}{\partial v} . \frac{\partial v}{\partial x} . dx ,$$

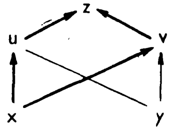
odtud

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} . \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} . \frac{\partial v}{\partial x} .$$

(Podíl dz/dx lze tedy pokládat za koeficient úměrnosti, představíme-li si, že by existovalo jen jediné potrubí přímo spojující nádrž z se zdrojem x tak, že při tom kvanta sobě odpovídajících dvojic dx, dz by byla tatáž jako za daného stavu. Platilo by pak $dz = \partial z/\partial x . dx$.)

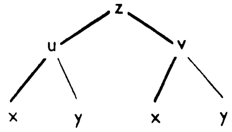
Této analogie s daným matematickým příkladem použijeme však nejen k ilustraci úlohy, nýbrž hlavně k mechanizaci výpočtu.

Abstrahujeme z nákresu příslušný graf:



Obr. 2.

Vedlejší graf rozložíme tak, aby se spojnice neprotínaly:



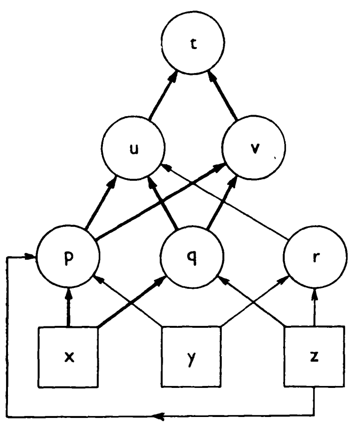
Obr. 3.

Avšak na obr. 3 je už vlastně schéma, kterého lze použít k mechanickému sestavení parciální derivace z daných rovnic. Je totiž patrno, že přírůstek v poslední nádrži vzniká jako důsledek přírůstku ve zdroji *za účasti všech možných přítokových cest ze zdroje do poslední nádrže.* (Jednotlivé molekuly tekutiny proudí vždy po každé z těchto cest.) Pochopit tento princip, znamená pochopit pravidlo pro použití grafu na obr. 3.

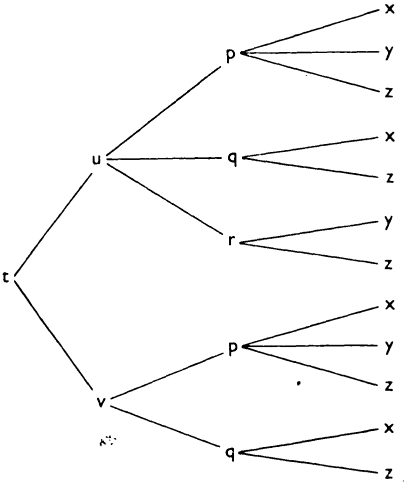
Příklad 1. Stanovte parciální derivace $\partial t/\partial x$, $\partial t/\partial y$. Složená funkce je dána takto:

$$t = t(u, v), \quad u = u(p, q, r), \quad p = p(x, y\ z) \quad x, y, z, \text{ jsou nezávisle proměnné.}$$
$$v = v(p, q), \quad q = q(x, z),$$
$$r = r(y, z),$$

Sestavíme podle zadání nákres a graf:



Obr. 4.



Obr. 5.

Např. parciální derivaci $\partial t/\partial x$ sestavíme s patrností všech možných přítokových cest ze zdroje x do nádrže t (obr. 4) neboli s patrností všech větví, které počínají kořenem t a končí kloubem x. (Na obr. 4 vyznačeno silněji.)

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial t}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial x}.$$

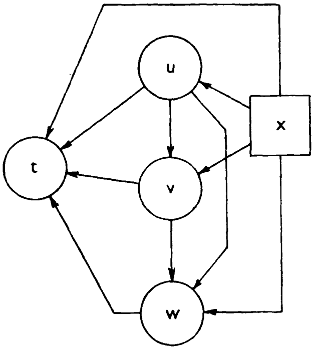
Obdobně

$$\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial t}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial t}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial y}.$$

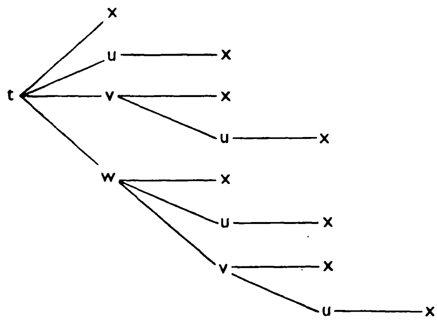
Příklad 2. Stanovte úplnou derivaci funkce

$$t = t[x, u(x), \quad v(x, u), \quad w(x, u, v)].$$

Zde je jedinou nezávisle proměnnou x. Poznámka: Není bez užitku pro posluchače, je-li jim takový příklad ilustrován nákresem – viz obr. 6. K mechanickému výpočtu



Obr. 6.



Obr. 7.

postačí ovšem schéma samotné – viz obr. 7. Schéma též umožní, abychom výsledek napsali co nejstručněji, tj. s využitím možnosti vytknutí před závorku.

$$\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial t}{\partial v}\left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right] +$$
$$+ \frac{\partial t}{\partial w}\left\{\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial w}{\partial v}\left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right]\right\}.$$

Pro druhou parciální derivaci složené funkce by byla analogie z mechaniky složitá a nepřehledná. Naproti tomu graf pořídíme snadno a poslouží nám tím, že získáme přehled a kontrolu správného řešení, zvláště pak u složitých příkladů.

Pro sestavení grafu parciální derivace vyššího řádu lépe vyhovuje tato symbolika: t_x místo $\partial t/\partial x$, t_{xy} místo $\partial^2 t/(\partial x \partial y)$ atd.

Vyjděme opět ze zadání $z = z(u, v)$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$. Vypočetli jsme, že platí $z_x = z_u \cdot u_x + z_v \cdot v_x$; tomu odpovídá graf (kořen v kroužku)

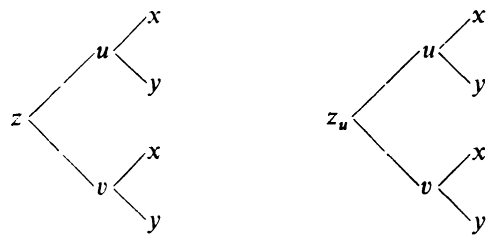
$$x \text{---} v \text{---} \boxed{z} \text{---} u \text{---} x\,.$$

Měli bychom nyní stanovit z_{xy} početně i graficky. Řešme nejdříve tuto úlohu početně. Uvedenou rovnici pro z_x derivujeme podle y

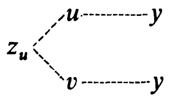
$$z_{xy} = |z_u \cdot u_x + z_v \cdot v_x|_y\,,\ \text{takže}$$
$$z_{xy} = |z_u \cdot u_x|_y + |z_v \cdot v_x|_y\,,\ \text{konečně}$$
$$z_{xy} = |z_u|_y \cdot u_x + z_u \cdot |u_x|_y + |z_v|_y \cdot v_x + z_v \cdot |v_y|_y\,. \qquad (1)$$

Uvážíme nyní toto: Je-li $z = z(u, v)$, pak předpokládáme, že je též $z_u = z_u(u, v)$ atd. Například: $z = \mathrm{e}^{u \cdot v}$, pak $z_u = \mathrm{e}^{u \cdot v} \cdot v$ atd. Samozřejmě existují funkce, např. $z = u \cdot v^3$, kde $z_u = v^3$ je již funkcí pouze proměnné v, takže zde již $z_{uu} = 0$. Formule odvozená za hořejšího předpokladu platí však i pro tuto funkci, jenže musíme pak např. za z_{uu} dosadit nulu, čímž učiníme redukci obecně platné formule.

Proto tedy v naší úloze např. $|z_u|_y$ utvoříme obdobně jako z_y, tj. použitím téhož rozvětvení



Bude tedy $|z_u|_y = z_{uu} \,.\, u_y + z_{uv} \,.\, v_y$; graf pro $|z_u|_y$ vyňatý z uvedeného rozvětvení označíme (vzhledem k dalšímu) takto:

 (2)

Podobně: Je-li $u = u(x, y)$, předpokládáme, že například též $u_x = u_x(x, y)$ atd. Proto $|u_x|_y$ utvoříme odbobně jako u_x, tj. použitím téhož rozvětvení:

Bude tedy $|u_x|_y = u_{xy}$; graf pro $|u_x|_y$ vyňatý z uvedeného rozvětvení označíme (vzhledem k dalšímu) takto:

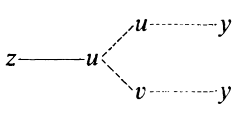
$$u_x \cdots\cdots y \,. \tag{3}$$

Nyní dosadíme do (1) příslušné výrazy; obdržíme

$$z_{xy} = (z_{uu} \,.\, u_y + z_{uv} \,.\, v_y) \,.\, u_x + z_u \,.\, u_{xy} + (z_{vu} \,.\, u_y + z_{vv} \,.\, v_y) \,.\, v_x + z_v \,.\, v_{xy} \,. \tag{4}$$

Tím byla naše úloha početně provedena. Zbývá nám provést tutéž úlohu graficky, přesně řečeno: najít grafickou interpretaci uvedeného početního postupu.

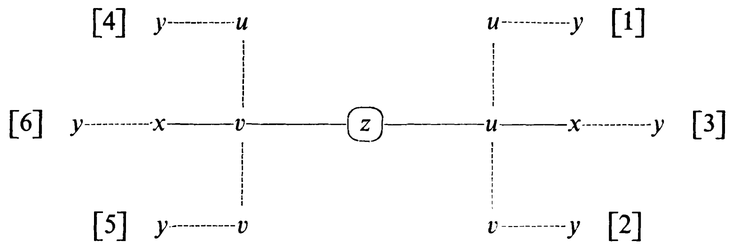
Označíme-li nyní v grafech (2), (3) z——u místo z_u, u——x místo u_x atd., budou tyto grafy zaznamenány takto:

 graf pro $|z_u|_y = z_{uu} \,.\, u_y + z_{uv} \,.\, v_y$ (2a)

u——$x \cdots\cdots y$ graf pro $|u_x|_y = u_{xy}$. (3a)

Protože články z——u, u——x (atd.) jsou již součástí grafu pro z_x, lze grafy (2a), (3a) *vsadit* do grafu pro z_x, obdobně jako byly výrazy (2a), (3a) vsazeny do (1).

Tímto způsobem lze graf pro z_x rozvinout na graf pro z_{xy}:



Obr. 8.

Je to zřejmě orientovaný strom, který se rozvíjí každým dalším derivováním. Větve prvého derivování jsou zde značeny plně, letorosty druhého derivování čárkovaně. (Budiž mi v dalším též dovoleno užívat termínu jednoroční, resp. n-roční strom.)

Též i v rovnici (4) označme tučně (slabě) písmena příslušná prvému (druhému) derivování:

$$
\left.\begin{aligned}
\mathbf{z}_{xy} &= \mathbf{z}_{uu} \,.\, u_y \,.\, \mathbf{u}_x & [1]\\
&+ \mathbf{z}_{uv} \,.\, v_y \,.\, \mathbf{u}_x & [2]\\
&+ \mathbf{z}_{u} \,.\, \mathbf{u}_{xy} & [3]
\end{aligned}\right\} \text{členy vzniklé derivováním členu } z_u \,.\, u_x
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&+ \mathbf{z}_{vu} \,.\, u_y \,.\, \mathbf{v}_x & [4]\\
&+ \mathbf{z}_{vv} \,.\, v_y \,.\, \mathbf{v}_x & [5]\\
&+ \mathbf{z}_{v} \,.\, \mathbf{v}_{xy} & [6]
\end{aligned}\right\} \text{derivováním členu } z_v \,.\, v_x
$$

Z uvedeného lze abstrahovat toto obecně platné pravidlo:

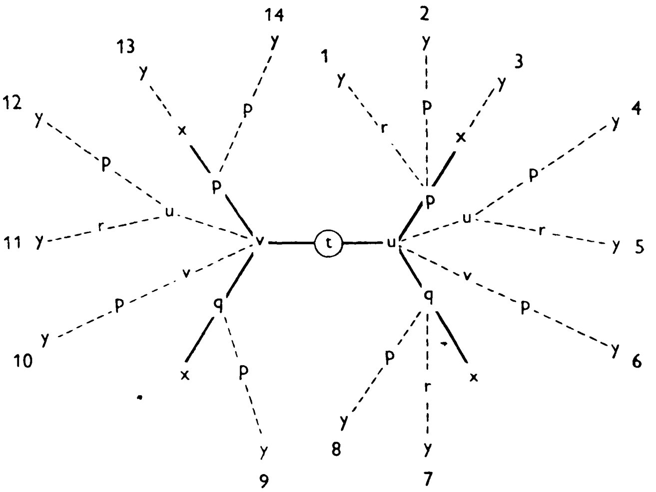
1. Dvojroční strom pro druhou parciální derivaci složené funkce se vyvine z jednoročního stromu pro příslušnou první parciální derivaci.

2. Z každého kloubu jednoročního stromu vyrostou letorosty druhého derivování týmž způsobem, jakým by vyrůstaly (k nezávisle proměnné druhého derivování) větve prvního derivování z kloubu předcházejícího.

3. Každému ukončenému letorostu dvojročního stromu odpovídá právě jeden člen druhé derivace, avšak spolu s tímto letorostem musí být brána v úvahu vždy celá příslušná větev jednoročního stromu.

Příklad 3. Složená funkce je zadána podle příkladu 1. Stanovte graficky t_{xy}. (Použijte schématu z obr. 5.)

Z grafu vyplývá (viz obr. 9)



Obr. 9.

$$\begin{aligned}
t_{xy} &= t_u(u_{pr}\,.\,r_y + u_{pp}\,.\,p_y)\,.\,p_x \quad \dots \quad (1) + (2)\\
&+ t_u\,.\,u_p\,.\,p_{xy} \quad \dots \quad (3)\\
&+ t_{uu}(u_p\,.\,p_y + u_r\,.\,r_y)(u_p\,.\,p_x + u_q\,.\,q_x) \quad \dots \quad (4) + (5)\\
&+ t_{uv}\,.\,v_p\,.\,p_y(u_p\,.\,p_x + u_q\,.\,q_x) \quad \dots \quad (6)\\
&+ t_u(u_{qr}\,.\,r_y + u_{qp}\,.\,p_y)\,.\,q_x \quad \dots \quad (7) + (8)\\
&+ t_v\,.\,v_{qp}\,.\,p_y\,.\,q_x \quad \dots \quad (9)\\
&+ t_{vv}\,.\,v_p\,.\,p_y(v_q\,.\,q_x + v_p\,.\,p_x) \quad \dots \quad (10)\\
&+ t_{vu}(u_r\,.\,r_y + u_p\,.\,p_y)(v_q\,.\,q_x + v_p\,.\,p_x) \quad \dots \quad (11) + (12)\\
&+ t_v\,.\,v_p\,.\,p_{xy} \quad \dots \quad (13)\\
&+ t_v\,.\,v_{pp}\,.\,p_y\,.\,p_x \quad \dots \quad (14)
\end{aligned}$$

Fotonásobiče bez baněk

se montují do umělých družic, neboť v kosmickém prostoru je vakuum lepší, než jaké lze vyrobit na zemi. Katody se zhotovují ze slitin berylia a chrómu, jejichž vlastnosti se nemění působením atmosféry během pobytu na zemi.

Ivan Şoudek

Barevná televize v SSSR

se vysílá v Moskvě od počátku r. 1960 na 8. kanálu (nosná frekvence obrazu 191, 25 MHz, zvuku 197,75 MHz), a to systémem s pomocnou nosnou frekvencí pro barevný signál s fázovou modulací ve dvou navzájem kolmých směrech. Sytém je kompatibilní, tj. obraz může být přijímán i běžnými televizory, ovšem jen v černé a bílé barvě. V Moskvě je instalováno asi 40 přijímačů. V Leningradě se vysílá od dubna r. 1960 a od počátku roku 1962 je tam v provozu vysílač podobný moskevskému. V SSSR byly vyvinuty dva typy přijímačů s jednou obrazovkou pro barevnou televizi; přijímače nesou označení Raduga a Temp—22. Oba mají obrazovky o úhlopříčce 53 cm s dírkovou maskou. Raduga má 26 elektronek, 15 polovodičových prvků, příkon 350 W a rozlišovací schopnost 350—400 řádek. Kromě toho byly vyvinuty tři typy projekčních přijímačů, které mají po třech jednoduchých obrazovkách, které reprodukují základní barvy. Objem barevného televizoru kteréhokoli typu zhruba odpovídá krychli o hraně 70—80 cm. (Radio und Fernsehen)

Ivan Soudek