Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Bohuslav Sivák; Igor Kmeť

Únik študentov z fakulty

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 32 (1987), No. 6, 328--332

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139468

vyučování

ÚNIK ŠTUDENTOV Z FAKULTY*)

Bohuslav Sivák, Igor Kmeť

1. Zostavenie rovnice

Je všeobecne známe, že jednorozmerný pohyb častice s hmotnosťou m v poli potenciálu $U(x)$ je popísaný Schrödingerovou rovnicou (pozri napr. [1])

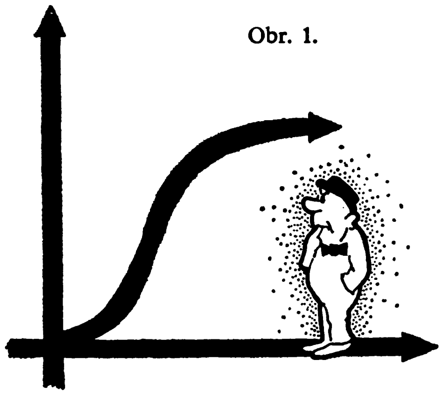
$$(1) \quad -\hbar^2 . \psi''(x)/(2m + U(x) . \psi(x) = = E . \psi(x) .$$

Vlnová funkcia $\psi(x)$ popisuje nie okamžitú polohu častice, ale má ten význam, že kvadrát absolútnej hodnoty veličiny $\psi(x)$ je priamo úmerný hustote rozdelenia pravdepodobnosti výskytu častice v bode so súradnicou x. Viazané stavy sa vyznačujú práve konečnou hodnotou integrálu

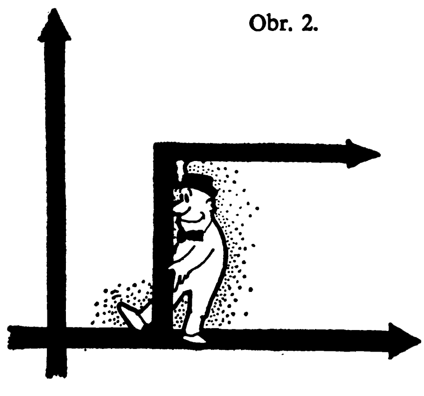
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 . \mathrm{d}x .$$

Konkrétna hodnota integrálu nemá fyzikálny význam. Obvykle sa vlnová funkcia normalizuje tak, aby sa tento integrál rovnal jednej. V ďalšom však pre jednoduchosť budeme používať nenormalizovanú vlnovú funkciu.

Ak chceme použiť rovnicu (1) na popis úniku študentov z fakulty, musíme najprv popísať potenciál $U(x)$. Študent bude interpretovaný ako častica, ktorá sa môže nachádzať v bode s ľubovoľnou kladnou súradnicou. Predstavujeme si, že študent študuje, ak je jeho vlnová funkcia prevažne sústredená blízko bodu $x = 0$. V bode $x = 0$ je nekonečne vysoká potenciálová bariéra. Priebeh potenciálu pre $x > 0$ naznačuje pôsobenie „sily" sprava doľava – pozri obr. 1. Takýto potenciál nie je



Obr. 1.



Obr. 2.

dobrý na výpočty, preto si potenciál trochu zidealizujeme – pozri obr. 2. Samozrejme, existencia nekonečne vysokej potenciálovej bariéry má za následok zmenu integračného intervalu (definičného oboru vlnových funkcií). Rovnicu (1) teda budeme riešiť s podmienkami:

$$(2) \quad \psi(0) = 0 , \quad \int_0^{+\infty} |\psi(x)|^2 . \mathrm{d}x < +\infty .$$

*) *Poznámka redakce. Doufáme, že tento ne tak zcela vážně míněný článek najde pochopení u čtenářů.*

Interpretácia potenciálu je jednoduchá – „sila" smerom sprava doľava je nevyhnutná na to, aby študenti nedali prednosť inému spôsobu využitia voľného času než je štúdium. (Pozri obr. 3.) Z praxe vieme, že takáto „sila" naozaj existuje a že pomerne účinne zabraňuje študentom odchádzať z fakúlt (nebudeme tu rozoberať charakter uvažovanej sily ani či jej veľkosť je primeraná potrebám spoločnosti).

Potenciálová funkcia vyzerá takto:

$$(3) \qquad U(x) = \begin{cases} 0, \text{ ak } 0 < x < a, \\ A, \text{ ak } x > a. \end{cases}$$

Číslo $A > 0$ udáva výšku potenciálovej bariéry, číslo $a > 0$ šírku potenciálovej jamy. Energia E viazaných stavov nutne spĺňa podmienku $0 < E < A$.

2. Riešenie rovnice

Aby vlnová funkcia mala fyzikálny zmysel, musí byť spojitá spolu so svojou prvou deriváciou. Potenciálová funkcia je v bode $x = a$ nespojitá. Bod nespojitosti rozdeľuje integračný interval na dve časti a na každej z nich je funkcia $U(x)$ konštantná. Preto najprv vyriešime rovnicu (1) na každom čiastočnom intervale zvlášť. Vlnovú funkciu teda hľadáme v tvare

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_1(x), \text{ ak } 0 \leqq x \leqq a, \\ \psi_2(x), \text{ ak } a \leqq x < +\infty. \end{cases}$$

Podmienky spojitosti funkcií ψ, ψ' na rozhraní sú potom:

$$\psi_1(a) = \psi_2(a), \quad \psi'_1(a) = \psi'_2(a).$$

V intervale $0 \leqq x \leqq a$ máme podľa (1):

$$-\hbar^2 . \psi''_1(x) = 2mE . \psi_1(x),$$

odkiaľ s využitím okrajovej podmienky $\psi_1(0) = 0$ dostaneme až na multiplikatívnu konštantu jednoznačne

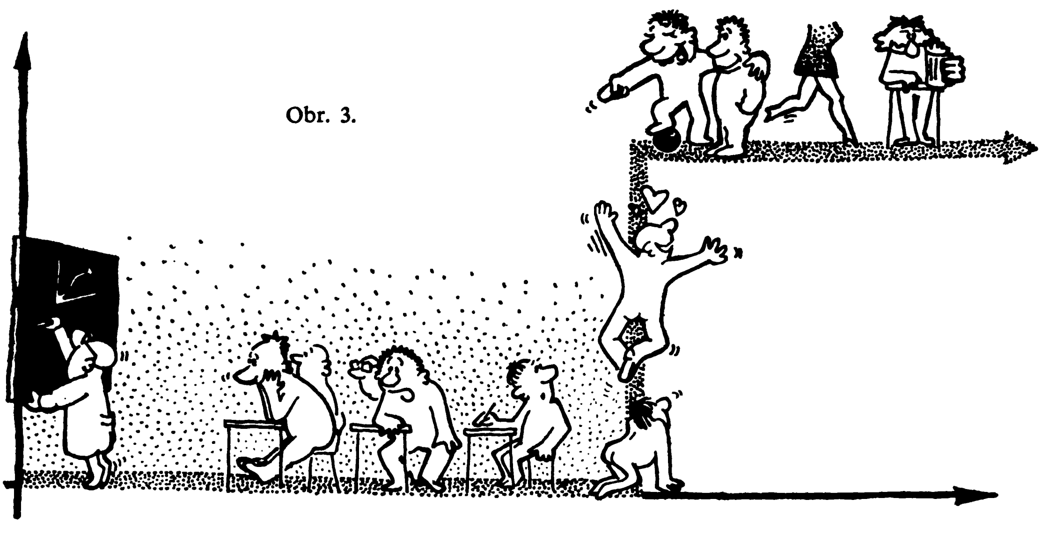
$$(4) \qquad \psi_1(x) = \sin(qx), \quad \text{kde } q = \sqrt{(2mE/\hbar^2)}.$$

V intervale $a \leqq x < +\infty$ bude podobne

$$\hbar^2 . \psi''_2(x) = 2m . (A - E) . \psi_2(x).$$

Aby integrál v (2) bol konečný, musí byť

$$(5) \qquad \psi_2(x) = k . \exp(-rx), \quad \text{kde } r = \sqrt{(2m . (A - E)/\hbar^2)}.$$



Obr. 3.

Podmienky spojitosti na rozhraní potom budú

$$(6)\quad \begin{aligned} \sin(qa) &= k \,.\, \exp(-ra)\,, \\ q \,.\, \cos(qa) &= -kr \,.\, \exp(-ra)\,. \end{aligned}$$

Zo (6) možno vyjadriť k a tak aj vlnovú funkciu:

$$(7)\quad \psi(x) = \begin{cases} \sin(qx), \text{ ak } 0 \leqq x \leqq a\,, \\ \sin(qa) \,.\, \exp(r(a - x))\,, \\ \text{ak } x \geqq a\,. \end{cases}$$

Vydelením prvej rovnice (6) druhou dostaneme

$$\operatorname{tg}(qa)/q = -1/r\,.$$

Po dosadení za q, r dostaneme rovnicu pre určenie energie E. Pre jednoduchosť zavedieme najprv bezrozmerné veličiny $c = (a/\hbar) \,.\, \sqrt{(2mA)}$, $s = \sqrt{(E/A)}$. (Prvá charakterizuje potenciál a druhá kvantový stav častice.) Zrejme

$$c > 0\,, \quad 0 < s < 1\,.$$

Hodnotu c nepoznáme a v ďalšom ju budeme len odhadovať. Potom na určenie s (a teda aj energie $E = A \,.\, s^2$) máme transcendentnú rovnicu

$$(8)\quad \operatorname{tg}(cs) = -s/\sqrt{(1 - s^2)}\,.$$

Pri hľadaní koreňov rovnice (8) možno použiť vzťah

$$c \,.\, s = n \,.\, \pi - \operatorname{arctg}(s/\sqrt{(1 - s^2)})\,,$$

ktorý sa dá písať aj jednoduchšie:

$$(9)\quad s = c^{-1} \,.\, (n \,.\, \pi - \arcsin(s))\,.$$

V tomto vzťahu n je kvantové číslo.

3. Numerické výpočty

Pre každú hodnotu $c > 0$ má rovnica (8) len konečný počet kladných riešení s, a teda existuje len konečný počet energetických hladín odpovedajúcich viazaným stavom. Čím nižšia je energia (a teda aj s), tým silnejšie je študent viazaný (musí vynaložiť viac energie na to, aby sa dostal do oblasti spojitého energetického spektra $E > A$). Podľa našich pedagogických skúseností možno postulovať existenciu dvoch viazaných stavov: základný stav odpovedá „zanietenému" študentovi, ktorý má skutočný záujem o zvolený odbor štúdia. Vyšší energetický stav odpovedá študentovi, ktorý prišiel na fakultu preto, lebo ho nič lepšie nenapadlo a do výroby alebo na vojnu sa mu nechcelo. Počet viazaných stavov je rovný 2 práve vtedy, keď $3\pi/2 < c \leqq 5\pi/2$, pre c teda máme približne interval

$$4.71239 \leqq c \leqq 7.85398\,.$$

Vyriešime rovnicu (8) pre $c = 5$. Použijeme na to (9). Pre $n = 1$ podľa (9) dostaneme:

$$s = (\pi - \arcsin(s))/5\,.$$

Tento vzťah možno použiť na hľadanie s iteračnou metódou. Z orientačného grafu odhadneme približnú hodnotu koreňa $s = 0.5$ a potom vždy dosadíme hodnotu s do pravej strany (výsledok prehlásime za novú aproximáciu koreňa). Iteračná metóda konverguje s výsledkom

$$s_1 = 0.5191478\,,$$
$$E_1 = 0.27A\,,$$
$$cs_1 = 2.595739\,.$$

Pre $n = 2$ popísaná iteračná metóda už diverguje. Preto treba počítať pomocou inverznej funkcie:

$$s = -\sin(5s)\,.$$

Z orientačného grafu odhadneme približnú hodnotu koreňa $s = 1$ a iteračnou metódou dostaneme (pravda, tu je konvergencia znateľne pomalšia a potrebujeme viac iteračných krokov):

$$s_2 = 0.981259\,,\quad E_2 = 0.96A\,,\quad cs_2 = 4.906295\,.$$

Skúsime inú hodnotu: $c = 7$. Podobným postupom ako vyššie dostaneme takéto výsledky:

$$n = 1:\quad s_1 = 0.3913555\,,\quad E_1 = 0.15A\,,\quad cs_1 = 2.739489\,,$$

$$n = 2:\quad s_2 = 0.7716738\,,\quad E_2 = 0.60A\,,\quad cs_2 = 5.401717\,.$$

Vypočítajme pravdepodobnosť preniknutia študenta do oblasti $x > a$ v oboch prípadoch. Označme

$$I_1 = \int_0^a |\psi(x)|^2 \,.\, \mathrm{d}x\,,$$

$$I_2 = \int_a^{+\infty} |\psi(x)|^2 \,.\, \mathrm{d}x\,,$$

potom zrejme

$$P(x > a) = I_2/(I_1 + I_2) = 1/(1 + I_1/I_2)\,.$$

Priamy výpočet dá

$$I_1 = (a/2)\,.\,(1 - \sin(2cs)/(cs))\,,$$
$$I_2 = a\,.\,\sin^2(cs)/(2c\,.\,\surd(1 - s^2))\,.$$

Po dosadení za I_1, I_2 a s využitím (8) dostaneme po elementárnych úpravách

$$I_1/I_2 = (2 - 2cs/\sin(2cs))/\mathrm{tg}^2(cs)\,.$$

Pre $c = 5$ teda dostávame:

$$n = 1:\quad I_1/I_2 = 21.27675\,,\quad P(x > a) = 0.0449\,;$$

$$n = 2:\quad I_1/I_2 = 0.179098\,,\quad P(x > a) = 0.8481\,.$$

Podobne pre $c = 7$ vyjde

$$n = 1:\quad I_1/I_2 = 53.11723\,,\quad P(x > a) = 0.0185\,;$$

$$n = 2:\quad I_1/I_2 = 8.83518\,,\quad P(x > a) = 0.1017\,.$$

4. Interpretácia výsledkov

Pohľad na vypočítané hodnoty ukazuje, že použitý model nedovoľuje rozumne odhadnúť $P(x > a)$ pre $n = 2$; vidíme však, že pre $n = 1$ táto pravdepodobnosť nebude veľká. V hraničnom prípade $c = 3\pi/2$ dostaneme

$$s_1 = 0.5444837\,,\quad E_1 = 0.30A\,,\quad cs_1 = 2.565819\,,$$

$$I_1/I_2 = 18.078818\,,\quad P(x > a) = 0.0524\,.$$

Vidíme, že zanietený student je na fakulte silne viazaný: pravdepodonosť $P(x > a)$ nájsť ho v oblasti $x > a$ je rádove najviac 5 % (asi 1 študent z 19člennej až 20člennej skupiny); v porovnaní so skutočnou úspešnosťou štúdia môžeme teda vyvodiť záver, že zďaleka nie všetkých prijatých študentov možno zaradiť do kategórie zanietených. Pomocou postupu, ktorý je v teórii pravdepodobnosti notoricky známy pod názvom „veta o úplnej pravdepodobnosti", môžeme získať presnú pravdepodobnosť (pozri napr. [2]). Vyjdeme z reálneho odhadu $P(x > a) = 0.30$ a dostaneme:

$$0.30 = P(n = 1)\,.\,P(x > a \mid n = 1) + P(n = 2)\,.\,P(x > a \mid n = 2)\,,$$

$$0.30 = P(n = 1)\,.\,0{,}0524 + 1 - P(n = 1)\,,$$

odkiaľ dostaneme pravdepodobnosti

$$P(n = 1) = 0.74\,,$$
$$P(n = 2) = 1 - P(n = 1) = 0.26\,.$$

To znamená, že najmenej 26 % študentov patrí do skupiny s $n = 2$ (excitovaný stav), teda „nezanietených". Tento záver je v dobrom súhlase s experimentálnymi údajmi.

Všetky numerické výpočty boli realizované na programovateľnom kalkulátore Hewlett-Packard 67. Je preto možné, že čitateľ pri ich kontrole na inom type kalkulátora dostane o máličko odlišné hodnoty.

Poďakovanie

Autori ďakujú Petrovi Homolovi za nakreslenie vtipných a výstižných obrázkov.

Literatúra

[1] LANDAU, L. D., LIFŠIC, J. M.: *Úvod do teoretickej fyziky 2. Kvantová mechanika*, Alfa, Bratislava 1982.

[2] SADOWSKI, W.: *Matematická štatistika*. Alfa, Bratislava 1975.

DVĚ ZPRÁVY O VYUČOVÁNÍ MATEMATICE VE FRANCII

Jaroslav Šedivý, Praha

Jednání 5. mezinárodního kongresu o vzdělávání v matematice (Adelaide, 1984) se týkalo také tématu „Matematika pro všechny". V příslušné sekci vystoupilo 22 účastníků, mezi nimi dva z Francie; jejich sdělení obsahovala zajímavá fakta podložená důkladnými výzkumy. Myslím, že naše čtenáře by mohly zajímat informace o problémech vyučování matematice v průmyslově vyspělé zemi s velkými sociálními protiklady. Ostatně, když budeme abstrahovat od společensky podmíněných jevů, zůstane ještě mnoho didaktických problémů, které si zasluhují pozornost i u nás.

Jean-Claude Martin (Bordeaux) se držel tématu a hned v úvodu zformuloval své stanovisko k němu: „Matematika pro všechny musí být matematika nejen přístupná, ale také zajímavá pro všechny nebo aspoň pro většinu." Pak však s tímto ideálem konfrontoval situaci ve francouzských výběrových středních školách, které lze absolvovat i bez hlubšího studia matematiky. Uvedl, že z každého tisíce studentů vstupujících (v 11 letech) do těchto škol jen 100 maturuje z matematiky a nejvýš 5 studuje dál matematiku nebo informatiku.

Předmět matematika se v nižších třídách těchto škol stal v posledním desetiletí nástrojem selekce dětí; na jeho konto připadá více propadání než na franštinu, do té doby nejobávanější předmět. Každý nedostatek ve vyučování matematice má vážné důsledky pro životní dráhu jedinců i pro celospolečenské zájmy. Chybí důkladné psychologické zmapování populace, které by ukázalo vývoj schopnosti abstrahovat a dalších psychických funkcí nezbytných pro úspěšné studium matematiky.

Příliš raný a příliš rychlý přechod k symbolickému jazyku matematiky je pro děti zátěží, kterou si prý nepřipouštějí autoři učebnic a často ani učitelé matematiky. Řada studií doporučuje také posílit fázi konceptualizace (vytváření představ a pojmů) na základě zkušeností dětí, jejich aktivní hry nebo řešení zajímavých úloh. Citoval doporučení Howsona: „Žádný symbol ani zkratka by se neměl zavádět, dokud student není připraven plně a s pochopením ocenit výhody, jaké poskytuje." Přimlouval se za souběžné užívání přirozeného a symbolického jazyka ve výuce matematiky. Připomněl průzkum,