Egbert Brieskorn

O dialektice v matematice. I

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 24 (1979), No. 1, 33--43

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139445

E. Brieskorn je profesorem topologie na univerzitě v Bonnu. Je nejen špičkovým odborníkem ve své specializaci, ale také významným představitelem marxistické levice. V květnu 1971 navštívil Prahu a přednášel na MFF UK o kombinatorické a diferenciální topologii. V anotaci k filozofickému článku, jehož překlad přinášíme, se vyslovuje o své vědecké práci a obecnějších zájmech takto:

„V matematice mě obzvláště zajímají problémy, při jejichž řešení docházíme ke kombinaci různých obsahově bohatých struktur a které vedou ke konkrétní konstrukci a vyšetřování objektů s takovými strukturami. Tak na základě mých prací o topologických vlastnostech komplexních analytických prostorů v okolí singulárních bodů vyplynuly nové vztahy mezi problémy a metodami z více různých oblastí, mj. mezi komplexní analýzou, algebraickou geometrií, diferenciální topologií a teorií Lieových grup.

Metodologické problémy, se kterými se matematikové střetávají při své práci, vedou přirozeně k úvahám o zásadních otázkách filozofie matematiky. Pro mne je zde ještě závažnější důvod, abych se těmto otázkám věnoval: domnívám se, že diskuse o těchto problémech je také částí obecných společenských a politických diskusí, kterých v posledních letech na univerzitách stále přibývá“.

O dialektice v matematice I

Egbert Brieskorn, Bonn *)

Motto:

„Co tím chcete říci?“ řekla Housenka přísně. „Vysvětlete to svými slovy!“

„Ale když to svými slovy nemohu, paní Housenko,“ řekla Alenka, „protože já nejsem já, rozumíte?“

„Nerozumím,“ řekla Housenka.

*(„Alenčina dobrodružství v říši divů“ od Lewise Carolla).***)

Problém podstaty matematiky

Problém podstaty matematiky je filozofická otázka, která nemůže nechat matematiky lhostejnými. Její zodpovědění má praktické důsledky také pro matematiku, a pro každého jednotlivého matematika, který v odpovědi na ni nachází rozhodující důvod pro základní zaměření svého výzkumu. Platí to obzvláště pro ty matematiky, kteří hloubkou svého pohledu více než jiní usměrnili vývoj matematiky. Odpověď na tuto otázku dále rozhoduje o tom, jak bude matematika sdělována, jak bude zpodobněna v publikacích a knihách, jak bude vyučována na školách a univerzitách. A konečně je to problém, jehož objasnění je důležité pro stanovení správného vztahu mezi rozvojem matematické teorie a jejích aplikací v praxi.

*) 1. část překladu článku E. Brieskorna *Über die Dialektik in der Mathematik* uveřejněného ve sborníku *Mathematiker über die Mathematik*, pp. 221—286, editor M. Otte. Vydalo nakladatelství Springer v řadě Wissenschaft und Öffentlichkeit.

Zbývající dvě části překladu budou otištěny v číslech 2/79 a 3/79. Přehled literatury bude zařazen za poslední část překladu. Přeložil Oldřich Kowalski.

**) Použito českého překladu Jaroslava Císaře.

Proto nemůže být nikomu, a nejméně ze všech matematikům, lhostejné, že se vytvořila a silně prosadila taková pojetí smyslu matematiky, která sice zahrnula důležité názory na matematiku, přece však povahu matematiky vcelku vystihla tak málo, že je nelze považovat za pravdivé, pokud jde o podstatu této vědy.

Proti těmto pojetím by se mělo objevit co možná nejobsažnější chápání matematiky, které sice v základních rysech a mnoha jednotlivostech není nové, přece však při současných výměnách názorů na našich univerzitách, kde fronty jsou určeny na základě falešného vědomí, se stěží může jasně projevit. Toto pojetí má postavit matematiku do souvislosti s veškerou lidskou činností a brát zřetel na praxi matematiky, na to, co je v matematice obsaženo a na její živoucí historický vývoj. Přirozeně nelze v jediném příspěvku, jako je tento příspěvek, nastínit obraz matematiky zahrnující všechny její aspekty. Můžeme zdůraznit jen jisté rysy, především ty, kterých si nejsou všichni matematikové vědomi, zatímco jiné, všem známé stránky, jako je například důležitá úloha symbolů v matematice, budeme jakožto části našeho obrazu mlčky předpokládat. Naším nejdůležitějším cílem je ukázat, že vývoj matematiky lze chápat jako rozvíjení komplexu protikladných tendencí a že sám rozvoj navzájem opačných myšlenkových proudů náleží k matematické metodě. Doufáme, že ve srovnání s jinak převažujícími statickými koncepcemi dosáhneme takovýmto dialektickým pojetím obsažnějšího a hlubšího porozumění vývoji matematiky.

Přitom je samozřejmé, že položíme-li si tak obsažné otázky, jsou nevyhnutelná jistá omezení, již kvůli rozsahu tohoto příspěvku. Horší jsou nedostatky, které vyplývají z omezeného rozsahu znalostí autora v otázkách filozofických, v dějinách matematiky, v otázkách aplikací a v problematice matematických povolání, přičemž rozbor otázek povolání se stejně zdá být ještě v počátcích (srv. [24]). Je možno jen doufat, že tato práce přesto trochu přispěje k objasnění vytyčených problémů.

K nutným omezením náleží též nemožnost vyrovnat se zde s celým komplexem názorů, které matematikové a filozofové předložili k problému povahy matematiky v průběhu století. Představu o tom lze získat např. ze sbírky Moritzových citátů [20].

Nedostačující pokusy o položení základů

Obzvláště zde není možné podrobně se vypořádat s různými pokusy o vybudování základů matematiky, které se v podstatě vyvinuly jako pokusy o překonání krize v oblasti základů vzniklé na přelomu století. Krize v oblasti základů propukla v souvislosti s antinomiemi teorie množin, jejichž příčinu lze v prvním přiblížení vidět v napětí mezi konečnem a nekonečnem. — Ještě uvidíme, že to je pouhé zjednodušení a že takto se v teorii množin projevují navenek všechny dialektické protiklady. — Hlavními směry mezi pokusy o položení základů byly, jak známo, logicismus, formalismus a intuicionismus. Logicismus chtěl matematiku redukovat na formální logiku. A. N. Whitehead: „Matematika v nejširším smyslu je rozvíjení všech druhů formálních, pro myšlení nutných, deduktivních způsobů usuzování." B. Russel r. 1903 na první straně svých *Principles of Mathematics* říká: „Čistá matematika je třída všech vět tvaru ‚p implikuje q', kde p a q jsou věty, které obsahují jednu nebo několik proměnných,..., a přitom ani p ani q neobsahují žádné konstanty s výjimkou logických konstant." Logicismus je překonán. Takto se asi vyjádřil HERMANN WEYL v r. 1944 v jedné diskusi o vztahu mezi různými pokusy o položení základů [36]: „Toto je v nynější době stav problému – žádné řešení není v dohledu. Ale ať již budoucnost přinese cokoliv, o jedné skutečnosti nelze pochybovat: že BROUWER a HILBERT posunuli problém základů matematiky na vyšší úroveň. Návrat k hledisku Russelových a Whiteheadových *Principií* je nemyslitelný." N. BOURBAKI k této otázce poznamenává v [5]: „Je proto příliš všední pravdou, řekneme-li, že toto ‚deduktivní usuzování' je jednotícím principem matematiky. Tak povrchní poznámka nemůže vystihnout zřejmou rozmanitost různých matematických teorií, stejně jako např. fyziku a biologii nelze zahrnout do jediné vědy jen proto, že obě používají experimentálních metod."

Intuicionisté a s nimi duchovně spříznění konstruktivisté zastávají názor, že antinomie vznikají z bezmyšlenkovitého operování s matematickými výroky, jejichž význam není jasný, zvláště s výroky o nekonečných množinách a o existenci matematických objektů*.) Postoj, ze kterého vychází intuicionistická kritika, byl vyjádřen E. A. BISHOPEM v práci [4] takto: „Když se pokouším o pozitivní vyjádření té vlastnosti, která chybí současné matematice a jejíž nedostatek jsem označil jako ‚schizofrenii', potom mi vždy znovu napadá slovo ‚integrita'. Nikoliv integrita nějakého izolovaného formalismu, který se na základě svých vlastních měřítek vychloubá, že je vždy na úrovni, nýbrž integrita, která hledá společný základ pro výzkum v čisté matematice, v aplikované matematice a v takových matematicky orientovaných disciplínách jako je fyzika, která se snaží co nejúplněji postihnout smysl každé vývojové změny a která se dá v první řadě vést úvahami o obsahu místo snahou o eleganci a formální atraktivnost, integrita, která dbá toho, aby matematické zobrazení skutečnosti se nezvrhlo v pouhou hru a snaží se porozumět úloze matematiky v dnešní společnosti. Tuto integritu nelze patrně uskutečnit, ale to není důležité. Rád bych pohlížel na konstruktivismus jako na jeden z pokusů, jak uskutečnit alespoň některé aspekty této idealizované integrity. Tento požadavek má přinejmenším výhodu, že možná dokáže zabránit tomu, aby se konstruktivismus opět nestal hrou, k čemuž měli v minulosti někteří konstruktivisté sklon." Ponecháme zde stranou, zdali se většině matematiků skutečně musí přisuzovat takovýto nedostatek integrity. Přinejmenším by Bishop mohl mít pravdu, když předhazuje ‚expertům', tj. expertům v otázkách základů a filozofie matematiky ovlivněným ‚analytickou filozofií': „V dnešní době experti ztotožňují ze zvyku a se samozřejmostí rozsáhlé pole matematiky s výsledky toho či onoho formálního systému. Dokazování považují za manipulování s řetězci symbolů. Filozofie matematiky záleží v rozvíjení, srovnávání a vyšetřování formálních systémů. Cílem je konzistence. Důsledkem je, že významová stránka ztrácí na hodnotě a že na počátečním stupni dokonce úplně zmizí."

Těžko můžeme popřít, že by bylo žádoucí, aby se matematikové a filozofové matematiky snažili o takovou integritu, kterou požaduje Bishop. Přirozeně bychom měli posuzovat podle tohoto požadavku i samotné konstruktivisty. A potom zjistíme toto: intuicionisté a konstrukti-

*) Viz Pokroky MFA *17* (1972), str. 4—15 (pozn. překl.).

visté se snaží, aby logickým operacím, existenčním výrokům atd. dali jasný smysl, prostý všeho nedorozumění, a to se děje odkazem na konečné konstrukce. Uznávají pouze výroky mající takovýto smysl. Další program vypadá podle Bishopa takto: „Abychom shrnuli: první úkol záleží v tom, aby co nejvíce z již existující klasické matematiky bylo podloženo konstruktivně. Zatímco se to bude dít, měli bychom stále více zaměřovat pozornost na otázky efektivnosti našich algoritmů a překlenout propast mezi konstruktivní matematikou na jedné straně a mezi numerickou matematikou a ‚computer science' na straně druhé. Protože konstruktivní matematika pojednává právě o tom, co je teoreticky vyčíslitelné, měla by poskytnout spolehlivý filozofický základ pro computer science."

Pokud jde o konstruktivistickou přeměnu klasické matematiky, což je, pokud vím, dosud jediný bod programu, na který byl veden útok většího rozsahu, ukazuje Bishop v této souvislosti, že konstruktivisté mezitím dosáhli ze svého hlediska toho podstatného a že konstruktivistické přepracování často vedlo ke zlepšení a zpřesnění klasických výsledků. Přesto je třeba konstatovat, že ta část klasické matematiky, na kterou byl použit konstruktivistický přístup, je jen nepatrným zlomkem. Přitom ‚klasickou' zde rozumíme obvyklou, nekonstruktivistickou matematiku, která se neustále dále rozvíjí a jejímuž bohatství nových teorií nemůže mnohem komplikovanější intuicionistická matematika stačit. Ale i u těch částí klasické matematiky, které byly částečně konstruktivisticky přepracovány, jako je např. reálná analýza, neplatí v intuicionistické verzi mnoho důležitých klasických vět centrálního významu, a analogické výsledky, které mají sloužit jako náhražky, nejsou tak silné a jsou mnohem komplikovanější.

Již z těchto důvodů se mi zdá, že konstruktivistická matematika nebude moci nikdy posloužit ve větším rozsahu jako teoretický základ pro aplikovanou a numerickou matematiku, nikdy nebude moci překlenout propast mezi sebou a těmito obory. Je to téměř tragické: právě ti, kteří se jako Bishop ptají po smyslu své práce, pro které matematika není samoúčelem, nýbrž by měla být viděna ve své společenské funkci, právě ti nemohou těchto cílů dosáhnout, protože vycházejí z takových filozofických pozic a tím z takového apriorního přístupu k matematice, že se správné ocenění společenské funkce matematiky a plnění této funkce stává prakticky nemožným.

Nejdůležitější aspekt tohoto zvláštního konstruktivistického, resp. intuicionistického chápání matematiky ve srovnání s jinými vědami byl, zdá se mi, krátce a stručně formulován Hermanem Weylem v práci [35]: „Výroky teoretické fyziky rozhodně nemají ten charakter, který žádá Brouwer od výroků matematických, že totiž každý z nich by měl mít svůj vlastní smysl, který by se dal beze zbytku odvodit z názoru, protože ve fyzice, pokud dochází ke konfrontaci se zkušeností, bereme v potaz pouze systém jako celek." Domníváme se, že v tom je základní omyl intuicionismu a konstruktivismu: v jeho redukci smysluplného na příliš úzký obor navzájem izolovaných matematických operací, které mají bezprostředně názorný smysl. Jestliže v poukazování na činnost matematiků jako na prvek zakládající smysl, a v tom, že se vyžaduje obsahové porozumění, je obsaženo racionální jádro, tak naproti tomu omezování se na izolované operace, nedostatečné chápání matematiky jako celého systému vědecké činnosti vřazeného do celku veškeré činnosti poznávací a veškerého praktického jednání je rozumově nezdůvodněnou redukcí s osudnými následky.

Jak je to nyní s formalismem? Ten nechce, tak jak to činí intuicionismus, vzdát se největší části klasické matematiky, nýbrž chtěl by ji pokud možno celou zachránit. K tomu má být, ve smyslu Hilbertova programu, celá klasická matematika přesně formalizována pomocí systému axiómů; konzistence takového systému axiómů má pak být (při úplném ignorování jeho obsahové stránky) dokázána v metamatematice pomocí přísně intuicionistických metod. Gödelovy věty o neúplnosti ukázaly, že tento program není proveditelný, a zdá se, že jej nepůjde uskutečnit ani poté, kdybychom v něm provedli podstatné škrty. Dá se říci, že filozofickým důvodem ztroskotání Hilbertova programu je přecenění axiomatické metody. Weyl napsal o Hilbertovi v [36]: „Mnohokrát se zdálo, jakoby svou chválou axiomatické metody chtěl říci, že tato metoda v budoucnosti odhalí jako zastaralou konstruktivní nebo genetickou metodu a vytlačí ji. Jsem si jist, že takto to přinejmenším v pozdějších letech nemyslel." To je jistě správné: tak velký matematik, jako byl Hilbert, nemohl jednoduše považovat matematiku za smyslu zbavenou hru s formulemi, což se ukazuje již v tom, jak ve své slavné přednášce [17] na mezinárodním matematickém kongresu v Paříži vyzvedl „velký význam určitých problémů pro pokrok matematické vědy obecně a důležitou úlohu, kterou hrají v práci jednotlivých badatelů."*) A to se ukazuje také v jeho historickém chápání vývoje matematiky, ve zdůraznění vzájemné souhry mezi zobecňováním a specializací, mezi myšlením a zkušeností. Bohužel později začali malí duchové pod názvem ‚formalismus' propagovat své zcela odlišné chápání matematiky jako hry s formulemi, s důsledky, proti kterým vznáší obžalobu Bishop ve výše citovaném článku. Jestliže srovnáme tento druh formalismu a konstruktivismus ve světle jejich vztahu ke klasické matematice, můžeme výsledek vyjádřit zhruba takto: při konstruktivistickém pokusu zachránit matematiku přijde klasická matematika zkrátka, protože význam matematických výroků je určován kritériem, které je založeno na konečnosti konstrukcí a na subjektivně idealistickém základě. V případě formalismu přijde zkrátka významová stránka, a klasická matematika opět není zachráněna, nýbrž znetvořena z důvodu jednostranného zdůrazňování axiomatické metody jako hry s formulemi. Intuicionisté a formalisté tak nakonec ztroskotávají při zvládání rozporů, které vyšly najevo v antinomiích teorie množin, protože se pokoušejí otázku smyslu matematických výroků řešit v mezích samotné matematiky nebo na nedostačujícím filozofickém základě, bez vztahu k významu matematiky pro lidské jednání, bez vztahu k praxi. Takto je pak nakonec i matematická praxe oběma koncepcemi ochuzena a zkreslena.

Přece však ani nemožnost založení teorie množin na formalismu a intuicionismu nezadržela mimořádný pokrok matematiky, který byl umožněn zavedením pojmu množiny. Spíše došlo k tomu, že matematikové pečlivým výběrem různých systémů axiómů právě natolik zúžili používání množinově teoretických konstrukcí, aby s ním vystačili pro splnění většiny svých cílů a aby zmizely antinomie, které se dříve objevovaly při neopatrném zacházení s množinami. V to, že se v budoucnu

*) Viz český překlad části této přednášky v Pokrocích MFA *16* (1971), str. 15—22 (pozn. překl.).

neobjeví žádné nové antinomie, můžeme ovšem jen doufat. V ostatní matematice používá většina matematiků nadále teorie množin v naivním pojetí, i když s obezřetností vypěstovanou za poslední období. Osobní důvody pro toto jednání se mohou u různých jednotlivců velmi lišit. Hermann Weyl míní v [35]), že to odpovídá filozofickému hledisku naivního realismu.

Používání teorie množin se v našem století tak dalekosáhle prosadilo, že se stala univerzálním jazykem, kterým se popisuje a sděluje veškerá matematika. U nematematiků to bohužel vedlo k příliš často se vyskytujícímu názoru, že matematika je prostě rozvíjení pojmu množiny, nebo ještě hůře, že je to totéž, co teorie množin. To je škodlivé pojetí, které je jen o málo lepší než logicismus a konec konců se odvolává na tytéž argumenty.

Bourbakismus

Obsáhlé využití pojmu množiny ve svazku s axiomatickou metodou vedlo v našem století k dosud ještě neukončenému sjednocování té matematiky, která se v minulém století rozdělila do mnoha teorií. Nejdokonalejším vyjádřením této tendence ke sjednocování byl program N. Bourbakiho, který se snaží tento plán uskutečňovat od r. 1939 publikováním díla *Eléments de Mathématique*. Názorný článek o Bourbakiho vlivu a jeho zvláštnostech můžeme najít např. u HALMOSE [14] (srv. také [26]). Bourbaki uveřejnil svůj program v pojednání s názvem, Architektura matematiky' (citujeme podle německého překladu [5.)*) Bourbakiho cílem je jednotná výstavba matematiky prostřednictvím axiomatické metody, přičemž systémy axiómů získané vzájemnou souhrou analýzy a syntézy popisují ,matematické struktury'.

Bourbaki charakterizuje axiomatickou metodu takto: „Nyní můžeme objasnit, co budeme obecně rozumět *matematickou strukturou*. Různorodým představám, které budou označovány tímto druhovým názvem, je společné to, že mohou být použity na *množiny prvků*, jejichž povaha není určena; abychom definovali matematickou strukturu, vezmeme *jednu nebo několik relací* mezi těmito (dále již neurčenými) prvky (v případě grupy to byla relace $z = x \tau y$ mezi třemi libovolnými prvky); potom požadujeme, aby daná relace (nebo dané relace) splňovaly určité *podmínky*, které jsou explicitně určeny a které se stávají axiómy uvažované struktury. Abychom vybudovali *axiomatickou teorii takto dané struktury*, zaměříme se na *vyvozování logických důsledků z axiómů této struktury*, bez ohledu na nějaký další předpoklad o uvažovaných prvcích nebo na povahu těchto prvků." Pomocí této metody chce Bourbaki uspořádat veškerou matematiku podle jednotného principu: „*Principem uspořádání* bude přitom představa *hierarchie struktur*, která jde od jednoduchého k složitému a od obecného k zvláštnímu."

Stupně této hierarchie struktur: v centru stojí ,mateřské struktury', jako například struktura grupy. Hlavními typy takových struktur jsou algebraické struktury, topologické struktury a struktury uspořádání. Potom přijdou ,vícenásobné struktury', jako například topologická algebra, v níž je navzájem organicky spojeno více mateřských struktur. Konečně přijdou teorie ve vlastním smyslu tohoto slova: „Nejprve přicházíme *k teoriím klasické mate-*

*) Viz český překlad celého článku v Pokrocích MFA *5* (1960), str. 509—518. Překlad vybraných citátů v tomto paragrafu byl kvůli stylistické jednotě pořízen nezávisle. (O. K.)

matiky: k analýze funkcí jedné reálné nebo komplexní proměnné, k diferenciální geometrii, k algebraické geometrii, k teorii čísel. Tyto teorie však již nemají svou dřívější autonomii; staly se *křižovatkami*, na kterých se střetávají a vzájemně na sebe působí *několik obecnějších matematických struktur*." S jistými omezeními, o nichž bude ještě řeč, poskytuje Bourbakiho popis matematiky toto: „Především, až na ta nezbytná omezení, můžeme lépe pozorovat *vnitřní život matematiky*, její *jednotnost* stejně jako její *rozmanitost*." Hlavní přednost axiomatické metody vidí Bourbaki v myšlenkové hospodárnosti dosažené jejím prostřednictvím, v tom, že vědecky pracujícímu matematikovi, který intuitivně rozpozná ve vyšetřovaném jevu některou z již známých struktur, dává k dispozici již hotovou teorii této struktury jako nástroj ke zpracování příslušného problému. „Mohli bychom skoro říci, že axiomatická metoda zaměřená jen na podstatné, totiž strukturální údaje o problémech, není nic jiného než ‚taylorismus' v matematice."

Tím přecházíme ke kritice Bourbakiho programu. Nemusí nám připadat podivné, když Bourbaki takovým způsobem propaguje zavedení taylorismu do matematiky a když pak současně na jiném místě ústy jednoho ze svých nejvýznačnějších členů požaduje pro sebe a sobě rovné všechna práva tvůrčího génia, a to těmito slovy: „Napij se! Touto radou se řídí matematik s radostí, v dobré víře, že svou žízeň může utišit bezprostředně u pramenů vědění a přesvědčen, že tyto prameny budou vždy plynout čisté a hojné — zatímco jiní jsou odkázáni na kalný proud špinavé skutečnosti. A když je mu vytýkán jeho pyšný postoj, když na něj volají, aby také přispěl svým dílem, když se ho ptají, proč setrvává na těch vysokých ledovcových štítech, kam ho nemůže následovat nikdo jiný než jemu rovní, odpoví jim spolu s JACOBIM: Na počest lidského ducha!"? [34]. Zajisté by jen nemnozí mohli následovat velkého matematika ANDRÉ WEILA na ony ledovcové štíty. Ale vždyť také jen málo velkých matematiků následuje hutníka do planoucího pekla opravářské směny v martinské peci. Ale slova A. Weila jsou alespoň srozumitelná. Bourbaki se k tomuto tématu zdaleka tak jasně nevyjadřuje. Nejprve se vůbec nechce vyjádřit: „Náš vlastní úkol je skromnější a méně obsažný; nechceme zkoumat vztahy matematiky ke skutečnosti ani k velkým kategoriím myšlení; hodláme spíše zůstat jen v oboru matematiky a pokusíme se zodpovědět výše položenou otázku, zatímco budeme analyzovat samotné postupy matematiky." Ale potom se přece jen vyjádří: „Že existuje těsné spojení mezi experimentálními jevy a matematickými strukturami, zdá se být tím nejneočekávanějším způsobem potvrzeno posledními objevy moderní fyziky. Ale my nevíme nic o důvodech této skutečnosti (připusťme, že bychom mohli těmto slovům skutečně přikládat význam) a snad o tom nikdy nic vědět nebudeme." A dále: „Z axiomatického hlediska se tak jeví matematika jako pokladnice abstraktních forem, matematických struktur; a stává se — aniž víme proč — že jisté stránky empirické skutečnosti zapadají do těchto forem, jako by jim byly původně ušity na míru. Přirozeně nelze popřít, že většina těchto forem měla původně velmi určitý názorný obsah; ale teprve tím, že tento názorný obsah byl vědomě potlačen, mohl být těmto formám dán onen nový obsah, který byly schopny v sobě rozvinout: mohly být připraveny pro nové interpretace a dovedeny k plnému rozvoji svých aplikačních možností."

Ve všech těchto citátech se projevuje zdráhání, zdali zkoumat „vztahy matematiky ke skutečnosti a k velkým kategoriím myšlení" a zdali tyto vztahy pojmout do budoucího obrazu matematické vědy. Podle citátu A. Weila matematik se s pýchou izoluje od těch, kteří se zabývají skutečností. A protože povoláním mnoha matematiků jsou aplikace matematiky, izoluje se tím ‚tvůrčí' matematik od takového, který jím vytvořenou matematiku ‚pouze' aplikuje. Tak může dojít k tomu, že původně pokroková tendence, která záleží v rozvoji matematické pracovní techniky a kterou Bourbaki srovnává s taylorismem, se změní v brzdu dalšího rozvoje, že dojde k oddělení tvůrčí vědecké práce v matematice na jedné straně a procesu zprostředkování získaných vědomostí a hotových technik na straně druhé. Toto dělení, které se mezitím stalo na našich univerzitách charakteristickým, a rozdělování matematiky na čistou a aplikovanou jsou – jak říkají zprávy matematiků činných v praxi – překážkami pro aplikace matematiky. ‚Schopnost vybudovat na základě dané problematiky teoretickou nadstavbu', jejíž vytvoření je požadováno na příklad Vědeckou radou v úvahách o základním matematickém studiu [37], by při vzdělávání zaměřeném jen na seznamování se s již osvědčenými strukturami vypěstována nebyla. Přímo v citovaných úvahách Vědecké rady a v jiných materiálech státních orgánů k reformě matematického vzdělání (včetně středních škol) je ale matematika jednostranně popisována jako strukturní matematika, a vychází tak najevo rozpor mezi pokusem orientovat matematické vzdělání na praxi a mezi vědeckou teorií, do které není praxe dostatečně pojata; to vede k problematickému pokusu vychovat velký počet žáků a studentů pomocí pouhého zprostředkování základních poznatků o známých strukturách a teoriích. Taylorismus pro masy a tvořivost pro některé: nemusíme zacházet příliš daleko, abychom zjistili analogii mezi poměry ve vědecké produkci a vztahy v materiální výrobě. A za těchto podmínek zpustne Bourbakiho koncepce, nechť již opatřená řadou omezení, velmi snadno v ‚obchodní dům abstraktních forem', struktur, které lze nevysvětlitelným způsobem aplikovat na skutečnost, a tato aplikace je pak také skutečně častokrát dosti ‚špinavá'.

Jako skvělý matematik, kterým je, vidí Bourbaki přirozeně, že jeho chápání jednoty a mnohotvárnosti matematiky jako hierarchické soustavy axiomaticky definovaných struktur, v sobě skrývá nebezpečí: „Abychom získali správnou perspektivu, musíme k tomuto běžnému nástinu připojit také poznámku, že je pouze velmi hrubým přiblížením skutečnému stavu dnešní matematiky; nástin je schematický a stejně tak idealizovaný jako strnulý.

Schematický – protože ve skutečnosti nejsou věci uspořádány tak jednoduše a systematicky, jak bylo popsáno výše. Kromě jiného dochází k nečekaným obratům, při kterých specializovaná teorie, jako je teorie reálných čísel, poskytne nezbytnou pomoc při vybudování obecné teorie, např. topologie nebo teorie integrálu.

Idealizovaný – protože ne ve všech oborech matematiky byla role každé z velkých struktur jasně rozpoznána a rozpracována: v jistých teoriích (např. v teorii čísel) zůstávají četné izolované výsledky, které nebylo dosud možno klasifikovat nebo uspokojivě dát do souvislosti se známými strukturami.

Konečně *strnulý* – protože nic není vzdálenější axiomatické metodě než statické pojetí vědy. Nechceme, aby si čtenář myslel, že si činíme nárok na popis konečného stadia vývoje vědy. *Struktury nejsou neproměnné*, a to ani v počtu, ani ve svém podstatném obsahu. Je docela dobře možné, že příští vývoj matematiky rozmnoží počet základních struktur, protože se ukáže plodnost nových axiómů nebo jistých kombinací axiómů. Od *objevení nových struktur* můžeme očekávat *významný pokrok*, uvážíme-li pokrok, který svého času přinesly struktury dnes známé. Na druhé straně nejsou již známé struktury v žádném případě dokončenými budovami; bylo by skutečně překvapující, kdyby z jejich základů byla již vydobyta veškerá jejich esence."

Měli bychom Bourbakimu povolit tato omezení, která sám učinil, a uznat, že jím navržený obraz hierarchie struktur spolu s uvedenými omezeními dává vhodný popis okamžitého stavu matematiky, přesněji: té části matematiky, která již neprochází obzvlášť prudkým vývojem. Ale Bourbakiho tvrzení, že nic není vzdálenější axiomatické metodě než statická koncepce vědy, musí již vzhledem ke zkušenostem s formalismem, od kterého se on sám distancuje, vést ke sporu. Když Bourbaki hovoří o činnosti matematiků a když popisuje, co má poskytnout jeho koncepce matematiky, používá sice dialektických pojmových dvojic jako je ‚jednota a mnohotvárnost', ‚analýza a syntéza', ‚obecné a zvláštní' atd., ale v samotném jeho náčrtu hierarchie struktur se dialektický charakter těchto pojmů plně neuplatní. Popisuje a objasňuje Bourbakiho model skutečně vývoj vědy? Výstavba axiomatické teorie dané struktury, říká Bourbaki, odpovídá odvozování logických důsledků z jejích axiómů. Ale co jsou to vlastně logické důsledky axiómů, například axiómů popisujících diferencovatelnou strukturu? Jestliže rozumíme ‚logikou' totéž, co má na mysli Bourbaki, tedy zřejmě formální logiku, potom přece můžeme za logický důsledek považovat pouhý výsledek řetězce logických závěrů, tedy dokázaný matematický výrok, nebo tím můžeme rozumět formální definici, ve které zaváděný pojem lze bezprostředně nebo zprostředkovaně převést na nedefinované základní pojmy systému axiómů. Matematické konstrukce se sice dají chápat formálně, nejčastěji jako důkazy existence nebo jako definice, ale každý matematik přece ví, že definice a typické konstrukce určité teorie nám nepadají do klína jako zralé ovoce ze stromu logického poznání, ale že je musíme nacházet pomocí intuice a zkušenosti, mnohdy také během dlouhého historického vývoje. Tím, že definice a konstrukce pojmeme formálně jako ‚logické důsledky axiómů', není přece absolutně nic řečeno o tom, jak je lze uskutečnit. Nebylo by např. více než absurdní tvrdit, že třeba rozklady diferencovatelných variet na ‚tělesa s uchy',*) což je důležitá pomůcka používaná při důkazech hlubokých vět jako je třeba zobecněná Poincarého hypotéza, jsou formálně logickým důsledkem axiómů diferencovatelné variety, a že by to nějakým způsobem vysvětlovalo, jak a proč se k této konstrukci došlo? Ostatně v našem případě tomu bylo tak, že myšlenka uvedené konstrukce byla objevena již v r. 1904 Poincarém, tedy dlouho před zavedením formální definice diferencovatelné variety Whitneyem v r. 1936. A přesně tak je tomu s větami jakékoliv teorie. Velcí matematikové často uhodnou své věty intuicí, dlouho předtím, než je mohou dokázat. Toto mínění uvádí např. Gauss v předmluvě k vydání Eisen-

*) Srv. Pokroky MFA *4* (1959), str. 278 (pozn. překl.).

steinova vědeckého díla [12]: „Vyšší aritmetika poskytuje nevyčerpatelné bohatství zajímavých pravd, a to takových, které nevystupují osamoceně, nýbrž v těsném vzájemném svazku, a jak se věda dále zdokonaluje, vycházejí najevo nové, neočekávané souvislosti. Velká část jejího učení získává také nové kouzlo na základě té zvláštnosti, že pouhou indukcí jsme přiváděni k důležitým poučkám s jednoduše vyjádřitelným obsahem, jejichž odůvodnění však leží v takové hloubce, že k němu dojdeme teprve po mnoha marných pokusech, zatímco jednodušší způsoby zůstávají dlouho skryty."

Bourbakiho výrok o axiomatické výstavbě teorie jako odvozování logických důsledků z axiómů neříká nic, ale vůbec nic o praktickém uskutečnění této teorie, pokud slovo ‚logický' budeme chápat ve smyslu formální logiky. Jinak by tomu bylo při takovém chápání logiky, které by v sobě zahrnovalo ‚velké kategorie myšlení' – ale to Bourbaki přímo vylučuje.

Jiným důležitým momentem, který žene vývoj matematiky kupředu a jehož význam je stále znovu zdůrazňován mnoha matematiky, je náhlé odhalení skrytých souvislostí mezi zcela různými teoriemi. Bourbakiho popis tohoto jevu staví věci z historického hlediska na hlavu, protože důvod takových souvislostí mezi teoriemi vidí v existenci společných strukturních prvků v obou teoriích, takových, které patří některé struktuře hierarchicky nadřazené oběma teoriím. Historicky je však většinou právě konkrétní objev teprve důvodem pro rozpracování příslušné struktury. Bourbaki ve *Vysvětlivkách* sice dodatečně projevuje jisté pochopení, když konstatuje, že jednota různých teorií, která se manifestačně projevuje v četných jejich souvislostech, může být v dalším procesu abstrakce vystižena a přeměněna v účinný nástroj. Skutečné vysvětlení však podáme pouze tehdy, když zdůvodníme, proč se v naší hierarchii struktur historicky vytváří jednota, krátce, objasníme-li původ struktur. Že skutečný vývoj matematiky nejde jen cestou axiomatické metody, je matematiky stále znovu zdůrazňováno. Tak např. COURANT v [10] říká: „Nějakým způsobem, otevřeně nebo skrytě, dokonce z toho nejstrnulejšího formalistického nebo axiomatického hlediska, zůstává konstruktivní nazírání přece jen stále matematice vlastním, oživujícím prvkem." (Srovnej např. také HALMOS [15].)

„Bourbakiho naděje, že matematické struktury přirozeným způsobem vyplývají z hierarchie množin, je nepochybně pouhou iluzí. Nikdo rozumný se nemůže ubránit dojmu, že nejdůležitější matematické struktury se objevují jako základní údaje o vnějším světě, a že jejich nesouměřitelná různost nachází ospravedlnění jedině v realitě" tvrdí RENÉ THOM, který snad ze všech žijících matematiků podal nejhlubší matematický příspěvek k pochopení reality, v článku [32] s názvem *Moderní matematika: výchovný a filozofický omyl?*

Jestliže problém poněkud zjednodušíme, dostaneme z celého předchozího rozboru tento výsledek: koncepce pozitivistické vědecké teorie, kterou razí formalismus, nedává ani vhodný statický obraz matematiky. Obraz, který načrtl matematik Bourbaki, obsahuje takříkajíc přibližně správnou představu o její kinematice, ale nikoliv o její dynamice. Místo, aby viděl ve vývoji matematiky vzájemnou souhru analýzy a syntézy, dedukce a indukce, axiomatické metody a konstrukce, zdůrazňuje Bourbaki jednostranně vždy jen jednu z obou tendencí.

Ptáme-li se po důvodech, proč tak

významný matematik jako je Bourbaki, který ve své vlastní vědecké práci přinesl tak důležité příspěvky k rozvoji matematiky, dochází k tak jednostrannému obrazu matematiky, a jak to, že toto pojetí se v takové míře rozšířilo, pak musíme vzhledem k jím citovanému vlastnímu svědectví vytušit toto: společenské bytí vysoce specializovaného vědeckého pracovníka ho může vést k tomu, aby si vytvořil falešné vědomí o společenském významu své práce. Průvodním zjevem tohoto falešného vědomí je obvykle otevřené stranění více či méně idealistické filozofii, nebo iluze, že by bylo možno se vyhnout nutnosti filozoficky interpretovat vlastní činnost a tím i alternativě ‚materialismus – idealismus'. Nejostřejším výrazem tohoto falešného vědomí je ignorování vztahů teorie k realitě nebo opovrhování realitou – je ironií, že to bývá dokonce spojeno s nářky, že realita nedává dostatečné impulsy pro rozvoj teorie (tak třeba [34]). Toto zdráhání uvědomit si vztah k realitě se konečně odráží zpětně na popisu samotné teorie, a namísto uvědomění si komplexu protikladných tendencí ve vývoji matematiky přichází ke slovu obraz, který již nepopisuje skutečnou živoucí matematiku v její mnohotvárnosti, a je proto zbaven jakéhokoliv vnitřního napětí, je prost všech protikladů. Stane se pak, že vzdělaný obhájce bourbakismu, R. QUENEAU, věří tomuto svému tvrzení ([25]): „Dialektika nenachází své vyjádření v povaze matematiky; platí sice pro hybné síly vývoje, ale nikoliv pro objekt vědecké činnosti."

V tomto nedorozumění týkajícím se vědy je současně vysloven i jeho původ: oddělení subjektu a objektu, fikce, že je možné o jednom mluvit a o druhém mlčet.

(*Pokračování*)

Při vzpomínce na středoškolské vzdělání si Petr připomněl některé pochybnosti, které tehdy měl o hodnotě toho, co se vyučovalo. Nechápal, proč učitel tolik zdůrazňoval, že součet dvou celých čísel je celé číslo, nebo proč dokazoval, že každá úsečka má právě jeden střed; ale učitel se zřejmě chtěl ujistit, že nikdo nechybuje v těchto elementárních věcech. Vždyť učitelé nejlépe věděli, co se má dělat.

Petr si také připomněl nadšení jednoho učitele nad vzorcem pro řešení kvadratické rovnice. „Vidíte," prohlašoval učitel vítězoslavně po odvození vzorce, „teď dovedete rozřešit každou kvadratickou rovnici". Ale Petr byl tak nenormální, že se ho zeptal, proč by si někdo měl přát řešit všechny kvadratické rovnice. Učitelovou odpovědí byl opovržlivý pohled, který přiměl Petra, že se stáhl. Ta otázka musela být hodně hloupá.

Dále si Petr vzpomněl na podobnou zkušenost z geometrie. Po dlouhém a zjevně lopotném úsilí dokázal učitel, že dva trojúhelníky jsou shodné, když strany jednoho se rovnají odpovídajícím stranám druhého. Pak se otočil ke třídě jako by očekával potlesk. Petr si troufl říci: „Ale není to zřejmé? Trojúhelník je pevný útvar. Když složíte trojúhelník ze tří tyček, nemůžete změnit jeho velikost ani tvar." To se naučil v pěti letech při hře se stavebnicí. Učitelovo pohrdání bylo nasnadě: „Kdo tu mluví o tyčkách? Zabýváme se trojúhelníky".

Přes několik dalších nesrovnalostí měl Petr matematiku stále rád. Věřil svým učitelům. Snadno se vyrovnal s jejich požadavky, a jistota výsledků přinášela jemu stejně jako jiným před ním velké zadostiučinění. A tak Petr přešel do college s přesvědčením, že má matematiku rád a že ji zvládne.