Abe Shenitzer

Vyučování matematice

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 28 (1983), No. 5, 275--283

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139425

4. Závěr

Rentgenová topografie má nyní už své stálé místo při studiu poruch krystalové mřížky a vhodně doplňuje jiné metody. Její přednosti záležejí v tom, že je značně citlivá i na velmi malé deformace krystalové mřížky a že dokáže zobrazit poruchy ležící nejen při povrchu, ale i jejich rozložení v celém objemu vzorku. Další její velkou předností je i to, že na vzorek nepůsobí destruktivně, takže pomocí ní lze sledovat i vývoj mřížkových poruch během jednotlivých technologických operací, a to stále na stejném vzorku.

Studium mřížkových poruch křemíku, zejména jejich strukturních transformací během vysokoteplotních operací a jejich korelace s elektrickými parametry p—n přechodů, jsou v současné době středem zájmu všech výrobců integrovaných obvodů. Impulsem k zintenzívnění výzkumu fyzikálních vlastností mřížkových poruch v Si však jsou i překvapivé efekty, které s sebou nese tak čistý a dokonalý materiál, jako je monokrystalický křemík.

Literatura

[1] Bloch E.: Semiconductor Silicon 81, edited by H. R. Huff, R. J. Kriegler, Y. Takeishi. Proceedings Volume 81—5. The Electrochem. Society, INC., Pennington USA, 1981, str. 20.
[2] Laue M. von: *Röntgenstrahlinterferenzen.* Akad. Verlags gesellschaft, Frankfurt 1960.
[3] Takagi S.: J. Phys. Soc. Japan *26* (1969), 1239.
[4] Holý V.: Phys. Stat. Sol. (b) *101* (1980), 575.
[5] Fiedler R., Polcarová M.: Čs. čas. fyz. (A) *25* (1975), 241;
Tanner B. K.: *X-ray Diffraction Topography,* Pergamon Press, 1976.
[6] Kuběna J.: Sborník 7. konf. čs. fyziků, Praha 24.—28. 8. 1981, část 1. svazek 2, č. příspěvku 05—03, vydala Fyzikální vědecká sekce JČSMF 1981.
[7] Hu S. M.: J. Vac. Sci. Technol. *14* (1977), 17.
[8] Chikava J., Yoshikava S.: Solid State Technol. *23* (1980), 65.
[9] Gösele U., Frank W., Seeger A.: Appl. Phys. *23* (1980), 361.
[10] Pearce C. W., Katz L. E., Seidel T. E.: Semiconductor Silicon 81, edited by H. R. Huff, R. J. Kriegler, Y. Takeishi, Proceedings Volume 81—5 The Elektrochem. Society, INC., Penmington USA, 1981, str. 705.

vyučování

VYUČOVÁNÍ MATEMATICE*)

Abe Shenitzer, Ontario

Každý z nás máme v daném časovém okamžiku jakousi vlastní realitu, tajnou říši chápání a porozumění. Učit někoho znamená rozšiřovat tuto oblast, zvětšovat ji.

*) Abe Shenitzer: *Teaching Mathematics. Mathematics Tomorrow*, Springer-Verlag, 1981. Překlad je pořízen z verze otištěné v časopisu The Mathematical Intelligencer, Vol. *3*, No 3, 1981

Přeložila Blanka Kussová

Vyučování je všestranný proces, který zahrnuje rozvoj kritického myšlení a schopností přijímat nové myšlenky. Přitom ten, koho vzděláváme, uvažuje, hodnotí, činí závěry, ale i pochybuje o tom, co je mu předkládáno. Jeho rozhodující dovedností je schopnost osvojovat si, třídit a užívat získané informace k hlubšímu a plnějšímu porozumění. Zní to poněkud paradoxně, ale vzdělávací proces je ve své podstatě autonomní; své vzdělávání si můžeme organizovat a řídit sami.

Vyučování bude neúspěšné, nedokážeme-li v každé fázi výuky stavět na nějaké předem připravené základně, na jakémsi „nižším stupni reality". Tak např. jestliže si studenti již uvědomují „všudypřítomnost" grup, budou pravděpodobně ochotni osvojit si o nich též jisté množství teoretických poznatků. Jestliže pochopili základy fyziky, mohou projevit zájem o diferenciální rovnice. Když se jim zalíbilo studium nekonečných řad, může je zaujmout úsilí vedoucí ke zlepšování kritérií konvergence. Dokážeme-li jim předat tolik informací, aby porozuměli úvahám obsaženým v diskusi Bernoulli - d'Alembert - Euler - Lagrange, která vrcholila ve formulaci Fourierovy věty, je vysoce pravděpodobné, že budou souhlasit s tvrzením, že matematika je nikoliv obtížným, neužitečným nebo dokonce smyslu zbaveným předmětem, ale vysoce vzrušujícím intelektuálním dobrodružstvím.

Matematika je jednou z hlavních složek naší kultury. Může, a měla by proto být významným vzdělávacím činitelem. V této roli však – obdobně jako řada dalších předmětů – příliš úspěšná není. Je tomu tak proto, že vyučování matematice je vystaveno celé škále různých nebezpečí. Uveďme si některá z nich:

Základní myšlenky zanikají v přívalu vět a důkazů

..... [Galois] často marně pátral v nejrůznějších učebnicích a pojednáních ve snaze nalézt právě ony klíčové ideje matematiky. Byl přesvědčen, že opomíjíme-li zdůrazňovat při vyučování tyto myšlenky, opravdové jádro předmětu se dusí a hyne pod horou vět a pouček [1].

Vyučování trpí přemírou trivialit

..... jsme přesvědčeni, že negativní přístup žáků k aritmetice na základních školách, kde měla až do doby zcela nedávné tak vysoce nedostačující intelektuální náplň, není jen nějakým nešťastným druhem vzdoru proti obtížnému předmětu, ale zcela normální reakcí na činnost, v níž hlavní roli hrají triviality. [2]

Výuka je značně roztříštěná

..... je něco chybného v současném vzdělávacím procesu, něco, co se zřejmě dále zhoršuje vzhledem k současnému prudkému rozvoji matematiky jako vědy. Narážím zde na časté stížnosti studentů týkající se skutečnosti, že jednotlivé přednášky, které jim nabízíme, jsou příliš zahleděné do sebe a že vyučující se vůbec nepokoušejí objasnit jejich vzájemné souvislosti. Studenti se právem ptají: Jak spolu souvisejí všechny tyto speciální poznatky a jaký význam má každý z nich pro hlavní proud matematiky? A vůbec, kam to všechno spěje? [3]

Zkreslení vzdělávacích cílů vede k produkci „specialistů, jimž chybí filozofické zázemí a tím potřebná uměřenost"

..... i mezi nejschopnějšími mladými matematiky můžeme nalézt řadu takových, jimž zcela chybí znalosti týkající se zázemí a významu jejich vědecké práce, kteří nemají opravdové ani hluboké důvody pro tuto činnost a navíc se vyznačují absolutní neznalostí obecné povahy matematiky. Krátce řečeno, jsou to nevzdělaní specialisté. Na dotaz, proč jsou vědeckými pracovníky, v nejlepším případě odpovídají, že to je cesta, která vede k získání publikovatelných výsledků a tím i dobrého zaměstnání. [3]

Má-li matematika plnit úlohu vzdělávacího předmětu, musí být péče o její technickou stránku vyvážena pozorností věnovanou strukturálním, historickým, genetickým a filozofickým aspektům matematiky.

V současné době existuje naštěstí již několik učebnic, jejichž přístup k různým oblastem matematiky je genetický, resp. historický (např. [4], [5], [6]). Mé vlastní poznámky ilustrují *strukturální přístup k matematice.* Jsou to vlastně jen drobné modifikace komentářů proslovených některými mými učiteli. (Např. jeden z nich uvedl kursovní přednášku z geometrie větou: „Na rozdíl od Eukleida Hilbert si uvědomil, že je možno studovat formu bez obsahu.“ Jiný, v rámci přednášky z analýzy v komplexním oboru, poznamenal: „Jak lze nalézt nějakou zajímavou třídu funkcí? Jistě se dohodneme, že analytické funkce jsou důležité; pak ale totéž platí i pro harmonické funkce. Harmonické funkce jsou však spojitým řešením Laplaceovy rovnice. A to nás přivádí na myšlenku, že diferenciální rovnice by mohly být jedním ze zdrojů zajímavých tříd funkcí.“)

Některé z mých poznámek vycházejí z příkladů ilustrujících nějaký matematický pojem. Jiné se týkají pojmu nebo myšlenky, které dávají sjednocující pohled na dvě nebo více zdánlivě vzájemně nesouvisejících oblastí. Další představují pokus vydělit a ozřejmit klíčovou myšlenku nějaké teorie. Jsou zde také poznámky didaktické povahy. Materiál si vybírám z nejrůznějších partií – od sčítání zlomků až k Fourierově větě. Tato různorodost odráží mé hluboké přesvědčení, že komentáře strukturální povahy lze uvádět vždy, že nemusí být omezeny jen na nějaké speciální oblasti matematiky nebo jen na jistý stupeň výuky.

Netvrdím, že níže uvedené ilustrace jsou něčím zvlášť významné. Jistě mohou a měly by často být nahrazeny různými jinými příklady. Neměly by však být zamítnuty s odůvodněním, že jsou triviální. Možná, že pro vyučující zřejmé jsou; vím však, že vůbec nejsou samozřejmostí pro většinu studentů.

Funkce a rovnice

Někdy můžeme do věcí lépe nahlédnout tím, že jsme vyvedeni z konceptu. Proto dávám občas studentům tuto otázku: Funkce patří mezi nejdůležitější objekty matematického studia. Jestliže je nějaká funkce dána předpisem tvaru $y = 2x$, resp. $y = x^2$ apod., pak pro libovolnou hodnotu x umíme vypočítat příslušnou hodnotu $f(x)$. Ale co zde pak zbývá ke zkoumání?

Příliš často je posluchárna konsternována touto otázkou. Zdůrazním, že lze stěží studovat to, co není nějakým způsobem zadáno. V ten okamžik šok mizí. Dohodneme se – po jakémsi sokratovském dialogu –, že je-li dána nějaká funkce f s definičním oborem D, vyvstávají obvykle dvě základní otázky:

(1) Co je $f(D)$, tj. jak vypadá obor hodnot funkce f?

(2) Když $a \in f(D)$, jak určíme $f^{-1}(a)$, tj. množinu všech prvků z D, které se pomocí f zobrazí na a?

Řešit rovnici $f(x) = a$ vlastně znamená určit $f^{-1}(a)$. Zvolíme-li za funkci f polynom, je stanovení kořenů totožné s úlohou nalézt $f^{-1}(0)$. Didaktický význam této poznámky je zřejmý.

Otázky: Pro které funkce je snadné, nebo naopak obtížné odpovědět na výše položené otázky? [Návod: Vzpomeňte si na známé nerozřešené problémy – Fermatovu větu a Riemannovu hypotézu.] Co lze říci o množinách $f^{-1}(a)$, jestliže f je homomorfní zobrazení? A v jakém strukturálním vztahu mohou být tato $f^{-1}(a)$ k $f(D)$, jestliže $f(D)$ je např. grupou?

„Čisté" versus „aplikované"

Při sčítání zlomků používají někteří žáci místo pravidla

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

tohoto postupu

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a + c}{b + d}$$

První algoritmus je „správný" a druhý „chybný". Autoritativní sdělení učitele „To je nesprávná odpověď!" podlamuje potenciálně racionální přístup žáka a nahrazuje nezbytnou vysvobozující diskusi pouhou poslušnou odpovědí. Zde je důležité, aby si studenti byli hluboce vědomi skutečnosti, že pokud pracujeme s abstraktními symboly, je každé pravidlo stejně dobré jako kterékoliv jiné. Je to nikoliv pravidlo samo, ale oblast použití, která je činí „správným" nebo „chybným".

Tak například, koupíme-li nejprve a/b liber cukru a v jiném obchodě ještě c/d liber, pak celkové množství nakoupeného cukru je

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

Naproti tomu, uvažujeme-li, že v jedné sezóně nějaký tým sehraje b zápasů, z toho a vítězně, a v sezóně následující z d zápasů jich vyhraje c, potom v sumě hrál $b + d$ utkání a vyhrál jich $a + c$; zapsáno v symbolech

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a + c}{b + d}$$

Stejné pravidlo platí, když např. předpokládáme, že a/b reprezentuje uspořádanou dvojici čísel, v níž a je číslo reálné a b imaginární část nějakého komplexního čísla.

Opravdové porozumění je takové, kdy studenti nahlížejí, že *pravidla pro* jednotlivé *operace* mohou vytvářet více či méně zajímavý systém, ale že přitom *nejsou* ve své podstatě *ani „správná" ani „chybná". To, co je takovými činí, je teprve oblast jejich aplikace.*

Otázka: Čím byste zdůvodnili „pravidla pro znaménka" při manipulaci s celými čísly?

U příkladu se sčítáním zlomků bychom měli dodat, že tato otázka se stává obvykle zmatenou, přemýšlíme-li v její souvislosti o operaci největšího společného dělitele a nejmenšího společného násobku.

Povšimněme si totiž, že pravidlo

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

nevypovídá nic o největších společných dělitelích.

Pojem největšího společného dělitele se objeví zcela přirozeným způsobem, jestliže uvažujeme například o problému nalezení celočíselných hodnot a, pro něž má rovnice $14x + 21y = a$ řešení v oboru celých čísel. Snadno zjistíme, že $a = 7k$, kde $k \in Z$; číslo 7 je zřejmě největší společný dělitel čísel 14 a 21.

Otázka: Přeformulujte problém „vyřešte rovnici $14x + 21y = 42$ v množině celých čísel" do úlohy „nalezněte $f^{-1}(42)$ pro vhodně zvolenou funkci f" a řešte ji tak, že nejprve určíte $f^{-1}(0)$. Připomíná vám tento návod cosi, s čím jste se seznámili v algebře při řešení systému lineárních rovnic?

Matematické „atomy"

Chemická analýza má analogii v matematice.

Uvažujme celá čísla. Jedna ze základních vět aritmetiky tvrdí, že každé celé nenulové číslo různé od 1 a -1 lze vyjádřit jako součin jistých prvočísel. Prvočísla jsou tedy jakýmisi multiplikativními stavebními kameny pro celá čísla. (Fakt jednoznačnosti rozkladu ve zmíněném tvrzení je jednou z nejužívanějších vlastností celých čísel.)

Vyšetřujme dále polynomy s komplexními koeficienty. Základní věta algebry zaručuje, že každý takový polynom lze zapsat, a to jednoznačně, ve tvaru součinu nějakých lineárních faktorů. Na tyto faktory, tj. na polynomy prvního stupně, je tedy možné se dívat jako na multiplikativní stavební bloky pro polynomy s komplexními koeficienty.

Věta o bázi pro konečné Abelovy grupy je speciálním případem věty o faktorizaci. Zajišťuje, že každá konečná komutativní grupa je izomorfní, tj. strukturálně identická, s direktním součtem cyklických grup, z nichž každá má počet prvků rovný mocnině jistého prvočísla. Tedy cyklické grupy, jejichž řád je mocninou nějakého prvočísla, jsou aditivními stavebními bloky pro konečné Abelovy grupy.

Jordanova-Hölderova věta ukazuje, že jednoduché grupy jsou přirozenými stavebními kameny pro grupy konečné. Zde „stavební procedura" záleží v tom, že rozšiřujeme grupu pomocí jiné grupy. Složitost konečných grup může přitom lehce soutěžit se strukturou molekul v chemických sloučeninách. (Ovšem k tomu, aby bylo možné provádět tuto analogii efektivním způsobem, musíme předpokládat, že studenti mají alespoň hrubou představu o chemických sloučeninách. Ale ne vždy je to pravda.)

Oblíbeným prostředkem pro konstruování funkcí je jejich vytváření pomocí nekonečných součtů jednoduchých funkcí. Na první pohled je nepochopitelné, že by mohly existovat jednoduché aditivní stavební bloky pro třídu všech funkcí definovaných na nějakém intervalu. V roce 1822 však Fourier oznámil svůj slavný výsledek, který říká, že každá funkce na intervalu je nekonečným součtem určitých číselných násobků funkcí 1, $\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\sin 3x$, $\cos 3x, \ldots$ Tyto „funkční stavební kameny" mají tu výhodu, že reprezentují jednoduché harmonické pohyby (což se dá ověřit zkoumáním pohybu závaží kyvadla). Role funkcí sinus a kosinus jako stavebních kamenů spolu s jejich základním významem ve fyzikálních aplikacích ospravedlňují zdánlivě neúměrné množství času a pozornosti, jež se jim při výuce věnuje. (Je zapotřebí dodat, že Fourierovo tvrzení nebylo zcela korektní. Jeden z novějších výsledků, obsahem blízký Fourierově větě, říká, že Fourierova řada funkce f na $L_p(-\pi, \pi)$, $1 < p < \infty$, bodově konverguje k funkci f skoro všude.)

Význam deduktivní metody

Otázky: Zamyslete se nad problémem jednoznačnosti stavebních bloků ve výše uvedených příkladech. Najděte multiplikativní stavební bloky pro množinu všech sudých celých čísel.

Deduktivní metoda se ve výuce obvykle poprvé objevuje v souvislosti se studiem geometrie. Poněvadž však „první věty“ eukleidovské geometrie jsou „intuitivně zřejmé“, studenti většinou necítí potřebu je dokazovat. To ale může vyústit ve znevažování jak deduktivní metody, tak výsledků, jež lze získat její aplikací.

Nedostatečné rozlišování mezi formální stránkou matematiky a jejími inspiračními zdroji ovlivňuje negativně nejen výuku elementární geometrie. Např. mnoho posluchačů matematické analýzy není schopno odpovědět na otázku: Proč vůbec dokazujeme větu o střední hodnotě? Což není intuitivně zřejmá? Obdobně při přednášce z hyperbolické geometrie nedostaneme většinou rozumnou odpověď na dotazy (kladené v souvislosti se studiem Poincarého modelu hyperbolické roviny): Není absurdní nazývat kružnicový oblouk přímkou? A je opravdu překvapující, že důsledky takového přístupu se vzpírají zdravému rozumu?

Řešení těchto a podobných *„paradoxů“ je mnohem důležitější než nekonečné dokazování*, neboť tím umožníme studentům pochopit nesprávnost široce rozšířeného názoru, že matematika je jen nějaká komplikovaná, smyslu postrádající činnost, a zároveň je naučíme oceňovat význam deduktivní metody.

Studium „neefektivních“ systémů axiómů může být jednou z dalších cest, jak zvýšit zájem studentů o deduktivní metodu. Co tím myslím, je uvedeno v dalším odstavci.

Grupa S_n všech permutací n-prvkové množiny je „přirozeným“ objektem. Stejně tak jím jsou struktury $(Z, +)$, $(Q, +)$ a $(Q - \{0\}, .)$. Začneme-li s těmito ukázkami, měli bychom být v krátkém čase schopni „prodat“ studentům ony „neefektivní“ axiómy grupy včetně těch jejich důsledků, které nám umožní dokázat např. Lagrangeovu větu – jeden zcela neočekávaný výsledek.

Mluvíme-li o deduktivní metodě, nelze se nezmínit *o jedné smutné skutečnosti související s intelektuální úrovní současného matematického vzdělání.* Pokud si *student* na vysoké škole nevybere též přednášku z logiky, *může být promován matematikem, aniž by někdy slyšel o Gödelovi a jeho význačném objevu* přirozených mezí deduktivní metody, objevu, *který je považován za jeden z největších intelektuálních výdobytků 20. století.*

Totožnost v matematice

V matematice se můžeme dívat na ekvivalenci jako na jistou formu totožnosti. Při jejích konkrétních aplikacích pak jde o vzájemnou zaměnitelnost ekvivalentních objektů.

Relací ekvivalence lze nalézt v matematice celou řadu. Ve škole se s tímto pojmem setkáváme (neuvažujeme-li triviální případ – rovnost) poprvé v souvislosti s počítáním se zlomky: $a/b \equiv c/d$ právě když $ad = bc$. (Výhody, které při konkrétních výpočtech skýtá možnost nahrazování zlomků zlomky s nimi ekvivalentními, jsou velmi dobře známé a není tedy nutné věnovat jim zde detailnější pozornost.) Jeden z důležitých příkladů matematické ekvivalence souvisí s pojmem izomorfismu, který odráží strukturální totožnost matematických systémů. Jiným příkladem je Gaussova kongruence modulo n v množině celých čísel: $a \equiv b \pmod n$ právě když $n|(b - a)$. Rozklad množiny Z indukovaný touto ekvivalencí má řadu hezkých aplikací v mnoha oblastech (i vně světa matematiky).

Další významné příklady relací ekvivalence můžeme získat zobecněním Gaussovy definice kongruence.

Nejprve si uveďme takovouto variantu:

Buď H aditivní grupa násobků čísla n (n přirozené číslo). Definujme relaci kongruence modulo n:

$$a \equiv b(\text{mod } n) \Leftrightarrow (\exists pn \in H)\ pn + a = b$$

Abychom zdůraznili úlohu grupy H, budeme psát $a \equiv b(H)$ místo $a \equiv b(\text{mod } n)$. Dále naši variantu zobecníme:

Buď S množina a G grupa permutací množiny S. Pro libovolné $a, b \in S$ definujeme

$$(*) \qquad a \equiv b(G) \Leftrightarrow (\exists g \in G)\ ga = b$$

Ukažme si užití (*). Buď S rovina (eukleidovská) a G grupa shodností, resp. podobností, pak (*) popisuje pojem totožnosti v příslušných geometriích, tj. shodnost, resp. podobnost rovinných útvarů. Jestliže zvolíme za S a G jiné matematické objekty, můžeme dospět k dalším důležitým příkladům relace ekvivalence (podobnost matic, resp. lineárních transformací apod). Možnosti, které Gaussova myšlenka poskytuje, jsou obrovské.

V souvislosti s relacemi ekvivalence se zmiňme ještě o jednom, ne tak průhledném typu matematické totožnosti. Pojmem, který spojuje následující rovnice

(a) $ax \equiv b(\text{mod } n)$

(b) $x^m \equiv a(\text{mod } n)$

(c) $ax + by = c$, kde $a, b, c \in Z$

(d) $ax + by = c$, kde $a, b, c \in R$,

je pojem homomorfismu, neboť řešit je, vlastně znamená hledat rozkladové třídy podle jádra jistého homomorfismu.

Podívejme se ještě na jeden příklad. Uvažujme rovnici $P(x) = 0$, kde P je polynom s neznámou x, a dále diferenciální rovnici $P(D)\,y = 0$, s neznámou funkcí $y(x)$. Jestliže známe řešení první rovnice, můžeme napsat bez obtíží též řešení příslušné diferenciální rovnice. Spojovacím článkem mezi oběma rovnicemi je polynom P. Detailnější analýza této poznámky by však překročila rámec mého článku.

Relace ekvivalence zmíněné na začátku tohoto oddílu jsou variacemi na „Gaussovo téma". Homomorfní zobrazení spojuje rovnice (a) – (d). Polynomické funkce spojují rovnice $P(x) = 0$ a $P(D)\,y = 0$.

Souhlasíme-li s tvrzením, že zdůrazňování vzájemných vztahů mezi zvláštním a obecným je jedním z velmi důležitých elementů efektivního vyučování, měli bychom se podívat pravdě do očí a připustit, že na nižším stupni výuky učíme matematiku jen pomocí nejrůznějších speciálních příkladů, aniž se pokoušíme o jakýkoliv sjednocující pohled a na vyšší úrovni právě naopak předkládáme studentům jen „témata bez variací".

Otázka: Můžete uvést nějaké další příklady „sjednocujících" matematických pojmů spolu s netypickými oblastmi jejich použití?

„Správná" východiska

Při studiu faktorizace je vhodné vycházet z nějakého oboru integrity, který není tělesem; studium těchto otázek na tělese je totiž trivialita.

Při matematickém výkladu kvantové mechaniky je správné vyjít z Hilbertova prostoru.

Matematickou analýzu nelze rozumně budovat nad tělesem racionálních čísel. Je to v podstatě způsobeno tím, že toto těleso není úplné, tj. existují cauchyovské posloupnosti racionálních čísel, které nemají racionální limitu. Těleso reálných čísel však úplné je, a proto existuje „reálná analýza". Rovněž těleso komplexních čísel je úplné, což umožnilo vybudovat analýzu v komplexním oboru. Poněvadž je navíc algebraicky uzavřené (tj. každý polynom s koeficienty z K stupně $n < 0$ má právě n kořenů), nabízí jeho zkoumání další možnosti. Podle J. Hadamarda: „Nejkratší spojnice mezi dvěma pravdami o reálném oboru vede přes obor čísel komplexních".

Studium otázek spojitosti je zavaleno přemírou nepodstatností, které zmizí, vyjdeme-li z metrických prostorů (Fréchet, 1904), v nichž jediné, o co opravdu jde, je vzdálenost.

Navzdory své obecnosti, metrické prostory již nejsou vhodné při studiu bodové konvergence posloupnosti funkcí, neboť bodová konvergence nemůže být definována pomocí metriky. (Na prostoru funkcí definovaných na nějakém intervalu neexistuje žádná metrika taková, aby konvergentní posloupnosti byly právě ty, které jsou bodově konvergentní.) Naprotitomu může být bodová konvergence zavedena snadno pomocí vhodné topologie. Tento fakt mluví přesvědčivě ve prospěch topologických prostorů jakožto „správných východisek" při studiu pojmu spojitost.

Otázky: Proč by se zhroutila celá matematická fyzika, nahradíme-li reálná a komplexní čísla čísly racionálními? [Návod: Promyslete si pozorně, jak jsou definovány takové pojmy jako hustota, rychlost, zrychlení apod.] Uvažujte o situacích, v nichž je – v jistém smyslu – výhodnější pracovat s komplexními čísly než s čísly reálnými. [Návod: Užijte komplexních čísel k důkazu tvrzení, že složením dvou rotací okolo téhož, resp. různých středů je opět rotace a nalezněte její střed. Srovnejte a^b v tělese reálných a komplexních čísel. Podívejte se na pojem mocninné řady v R a K. Přečtěte si str. 234–243 z knihy [7].]

Invarianty

Jeden ze způsobů použití analytických metod v geometrii spočívá v popisu geometrických útvarů (např. křivek) v různých souřadnicových systémech. Poněvadž systém souřadnic není vnitřně svázán s geometrickým objektem, je rozumné očekávat, že některé z našich „analytických" výsledků zachycují jen jeho polohu vůči soustavě souřadnic, nikoli vlastnosti objektu samotného.

Tak například vlastnost přímky *udržovat konstantní směr* je poznatek nezávislý na volbě systému souřadnic, a tedy říká něco o „povaze" přímky. Avšak *konkrétní hodnota* této konstanty udává odchylku přímky od osy x a nevypovídá proto nic o přímce jako geometrického objektu. Podobně když vyjdeme z intuitivně zřejmé „homogenity" kružnice a prohlásíme-li, že směrnice tečny v jednom z jejích bodů je rovna nule, neřekli jsme nic, co by bylo významné pro kružnici, ale jde o důležitý poznatek, uvažujeme-li o vztahu kružnice a souřadnicového systému.

Třebaže analytický přístup ke geometrii je užitečný a obdivuhodný, je zde třeba stále dbát na jedno „výstražné znamení". Dříve než si totiž můžeme dovolit prohlásit, že jsme objevili nějaký „geometrický" výsledek, musíme ukázat, že nezávisí na volbě systému souřadnic, jinak řečeno, že je invariantem. (Když jsou přípustné souřadnicové systémy pravoúhlé a mají společnou jednotku délky, mluvíme o *eukleidovských invariantech*, jestliže jsou kosoúhlé, mluvíme o *afinních invariantech*, apod.) Obvyklé analytické definice délky oblouku, plochy omezené křivkou apod. mají smysl pouze tehdy, když můžeme dokázat, že jsou nezávislé na volbě (pravoúhlého) souřadnicového systému. Není obtížné nastínit hlavní myšlenku těchto důkazů. Myslím, že otázky spojené s pojmy invariance a invariantu by se měly objevit ve školním vyučování co nejdříve.

Otázky: Ve kterých z následujících příkladů jde o eukleidovské invarianty:

(a) linearita rovnice přímky;

(b) hodnota $\int_a^b \sqrt{(1 + f'(x)^2)}\, dx$;

(c) hodnota $\int_b^a f(x)\, dx$;

(d) hodnota $f''(x)/(1 + f'(x)^2)^{3/2}$.

Buď $y = f(x)$ rovinná křivka. Nechť $f''(p) = 0$. Co vypovídá tento fakt o chování dané křivky v bodě $[p, f(p)]$?

Vytváření nových matematických systémů ze systémů již známých je jedním z běžných druhů matematické činnosti.

Vytváření matematických systémů

Například třídy ekvivalence modulu n v množině čísel vedou k cyklickým grupám a některým konečným okruhům. Budování číselných systémů zahrnuje řetězec $Z^+ \to Z \to Q \to R \to K$. Homomorfismus umožňuje vytvářet faktorové struktury. Direktní součty jsou přirozeným technickým prostředkem pro spojování dvou nebo více struktur apod.

Na tomto místě je užitečné zdůraznit, že tento uvědomělý způsob tvoření matematických systémů je starý ne více než 200 let. Objev existence nesouměřitelných veličin učiněný Pythagorejci před zhruba 2500 lety nevyústil například v rozšíření toho, co bylo vlastně oborem racionálních čísel, ale naopak, měl za následek odmítnutí čísel jako prostředku nevhodného k získávání odpovědí na otázky, které kladla soudobá geometrie. Odsud je vidět, že tím, co je často nejrevolučnější, je pouhá změna hledisek, přístupů k problémům.

Na závěr mi dovolte říci ještě několik slov. Své poznámky jsem formuloval s úmyslem poukázat na jednu z cest vedoucích ke kritickému pochopení matematiky. Kritický přístup musí být stálou složkou studia i vyučování matematice. Bez něho zůstávají studenti negramotnými individui a vyučující je jen pouhým „dvorním dodavatelem“ deduktivních tasemnic. Kritické chápání povznáší matematiku z úrovně křížovek do role důležité složky kultury. Nevzdělaný specialista může být společnosti užitečný v mnoha směrech, ale jako učitel musí selhat ve svém nejvlastnějším poslání, kterým je (zde cituji výrok P. Hiltona): „snažit se probudit v co největším počtu lidí bez zřetele k jejich profesi uvědomění si povahy naší vědy a jejího materiálního i duchovního významu pro naši civilizaci“.

Literatura

[1] H. Wussing: *Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffes.*

[2] The Report of the Cambridge Conference on School Mathematics, 1963.

[3] R. L. Wilder: *History in the Mathematics Curriculum.* American Mathematical Monthly 79 (1972).

[4] O. Toeplitz: *The Calculus: A Genetic Approach.* Univ. of Chicago Pr., 1963.

[5] H. M. Edwards: *Fermat's Last Theorem. A Genetic Introduction to Algebraic Number Theory.* Springer-Verlag, 1977.

[6] C. H. Edwards, Jr: *The Historical Development of the Calculus.* Springer-Verlag, 1979.

[7] S. Bochner: *The Role of Mathematics in the Rise of Science,* Princeton U. Press, 1966.