J. M. Landis

O délce křivky

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 4 (1959), No. 5, 537--546

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139396

Poněvadž pro čáru u^0, která je s ní stejnolehlá v poměru 2 : 1 vzhledem k bodu $z_0 = \bar{\zeta}_0$ jako středu, platí

$$u^0 = 2(u - z_0) + z_0 = 2u - \bar{\zeta}_0 ,$$

dostáváme

$$u^0 = f + \bar{\zeta}_0 - (\bar{f} - \zeta_0)\, f'^2 - \bar{\zeta}_0 = f + (\zeta_0 - \bar{f})\, f'^2 = z ,$$

čímž je tvrzení dokázáno. Lze tedy vyslovit větu

Kotálí-li se křivka vně po shodné křivce, dotýkajíc se jí v homologických bodech, popíše libovolný bod, pevně s ní spojený, trajektorii, která je homotetická v poměru 2 : 1 k úpatnici pevné polhodie vzhledem k bodu, který má k ní touž polohu, jakou má vytvořující bod k pohyblivé polhodii.

O DÉLCE KŘIVKY[1])

J. M. Landis (Moskva)

Látka v tomto článku vyložená je — jak ukázala zkušenost — dobře přístupná žákům nejvyšších tříd středních škol, kteří mají zájem o matematiku. Byla předmětem přednášky, určené pro žáky 9. a 10. tříd[2]). Domníváme se, že hlavní myšlenka výkladu pojmu délky křivky, jak je dále podána, by se mohla zpracovat pro školní výuku matematice. J. M. L.

Délku křivky lze jak známo definovat různým způsobem. Podáme zde definici, která není příliš známa celé matematické obci, neboť se opírá o myšlenky A. N. Kolmogorova, týkající se ovšem případu obecnějšího[3]) (libovolné tak zvané A-množiny v n-rozměrném prostoru).

Kolmogorovova definice je však velmi blízká naší intuitivní představě o délce. Podle našeho názoru je této představě blíže než klasická definice, vycházející z vepisovaných lomených čar (jde jen o metodologickou stránku otázky, neboť — jak ukážeme dále — obě definice jsou ekvivalentní), a dále, což je obzvláště podstatné, pomocí této definice lze dokázat, že délku křivky lze zavést jediným způsobem při některých přirozených požadavcích.

Budeme zkoumat křivky v rovině. Pro jednoduchost se omezíme na prosté oblouky, to jest na vzájemně jednoznačné a spojité obrazy úsečky (na oblouky homeomorfní s úsečkou[4])).

---

[1]) Е. М. Ландис, О длине кривой, Matěmatičeskoje prosveščenije, 1957, č. 1.

[2]) Přednášku konal autor 11. listopadu 1956 na Moskevské státní universitě.

[3]) Vyloženo v článku A. N. Kolmogorov, *Beiträge zur Masstheorie*, Mathematische Annalen 107, 1932, str. 351—356.

[4]) O homeomorfním zobrazení viz na příklad článek Boltjanskij a Jefremovič, *O topologii I*, v tomto časopise, č. 3, 1959.

O jakou třídu křivek tu jde, pokusíme se vyložit takto:

Nejprve si představíme křivku jako stopu, kterou zanechá ostře přiřezaná tužka, je-li bez odtažení vedena po papíru. Mysleme si, že křivka byla vyrýsována v době od okamžiku t_1 do okamžiku t_2. V okamžiku t_1 nechť je hrot tužky v bodě A, v okamžiku t_2 v bodě B, v okamžiku $t(t_1 < t < t_2)$ v bodě $P(t)$. Pro jednoduchost připustíme jen ty křivky, které se samy neprotínají. To znamená: byl-li hrot tužky v okamžiku t v bodě $P(t)$, nebude v tomto bodě již v žádném jiném okamžiku $t' \neq t$, to jest pro $t' \neq t$ je $P(t') \neq P(t)$.

Hrot tužky nemůže okamžitě přeskočit z jednoho bodu do bodu jiného. To znamená, že bude-li v okamžiku t v bodě $P(t)$, bude ještě při dalším vyrýsování křivky jistou dobu (třeba velmi malou) blízko tohoto bodu. Přesně sformulujeme tuto skutečnost takto: Ať zvolíme číslo $\varepsilon > 0$ jakkoli malé, vždy existuje takové kladné číslo $\delta(\delta > 0)$, že je-li $|t - t'| < \delta$, je vzdálenost[5]) mezi bodem $P(t')$, v němž se hrot tužky nachází v okamžiku t', a bodem $P(t)$, v němž se hrot tužky nachází v okamžiku t, menší než ε. Dostáváme se tak k této definici:

Množinu S bodů v rovině nazýváme křivkou (prostým obloukem), lze-li na číselné ose t najít takový uzavřený interval $\langle t_1, t_2\rangle$ (úsečku s krajními body t_1 a t_2 včetně těchto bodů), $t_1 < t_2$, že platí:

1. Každý bod množiny S je přiřazen některému bodu t z intervalu $\langle t_1, t_2\rangle$;
2. $P(t') \neq P(t'')$ pro $t' \neq t''$;
3. ať vezmeme kterýkoli bod t z intervalu $\langle t_1, t_2\rangle$ a ať zvolíme jakkoli číslo $\varepsilon > 0$, lze najít takové číslo $\delta > 0$, že pro libovolný bod t' z intervalu $\langle t_1, t_2\rangle$, pro nějž platí
$$|t - t'| < \delta\,,$$
je odpovídající bod $P(t')$ z množiny S od bodu $P(t)$ této množiny vzdálen o méně než ε.

Poznamenejme: Body téže křivky S lze přiřadit bodům různých úseček číselné osy t, body křivky S mohou být dále přiřazeny bodům téže úsečky na číselné ose t různým způsobem. Definice vyžaduje, aby bylo možno najít alespoň jednu takovou úsečku a alespoň jeden způsob přiřazení tak, aby byly splněny uvedené tři požadavky.

Budiž nyní dána křivka S. To znamená, že existuje interval $\langle t_1, t_2\rangle$ takový, že každému jeho bodu je přiřazen bod křivky S, přičemž jsou splněny podmínky 1., 2., 3. Body $P(t_1)$ a $P(t_2)$ budeme nazývat krajními body křivky S a označíme je písmeny A a B.

Budeme dále říkat, že bod $P(t')$ křivky S je blíže bodu A po křivce (dále od bodu B po křivce) než bod $P(t'')$, je-li $t' < t''$.

Krajní body křivky a uspořádání bodů na křivce nejsou závislé ani na tom, jaký interval osy t byl zvolen, ani na tom, jak bylo provedeno přiřazení bodů zvoleného intervalu osy t bodům křivky S za podmínek 1., 2., 3. Přesný důkaz tohoto tvrzení zde uvádět nebudeme. Myšlenku důkazu můžeme názorně vyložit takto: Mysleme si, že jsme narýsovali na papíru souvislým tahem křivku, která není uzavřená a která se sama neprotíná. Pak nelze tutéž křivku narýsovat znovu, začneme-li v nějakém jejím vnitřním bodě (to jest nikoli v některém krajním bodě), tak, abychom neprošli ani jedním bodem křivky dvakrát.

Bude pro nás dále užitečné seznámit se s tak zvaným supremem (horní hranicí) a infimem (dolní hranicí) číselné množiny.

Budiž dána nějaká číselná množina. Číslo M nazýváme jejím supremem, jestliže

1. *všechna čísla dané množiny jsou menší nebo nejvýše rovna číslu M;*

2. *buď číslo M samo patří do naší množiny nebo existují v naší množině čísla libovolně málo od M se lišící.*

---

[5]) Předpokládáme, že pro měření vzdáleností byla zvolena předem pevně měřicí jednotka.

Jestliže na příklad číselná množina sestává z konečného počtu čísel, je jejím supremem největší z nich. Množina čísel $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \ldots$ má supremum rovné 1.

Analogicky se definuje infimum číselné množiny:

Infimem číselné množiny se nazývá číslo N těchto vlastností:

1. Všechna čísla dané číselné množiny jsou větší nebo nejméně rovna číslu N;

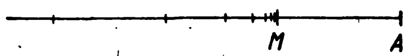
2. buď číslo N patří do dané množiny, nebo existují v ní čísla libovolně málo od N se lišící.

Platí nyní tato věta:

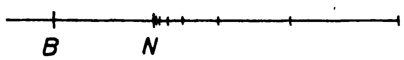
Věta I:

1. Jsou-li všechna čísla číselné množiny menší než nějaké číslo A, má množina supremum.

2. Jsou-li všechna čísla číselné množiny větší než nějaké číslo B, má množina infimum.[6])



Obr. 1.



Obr. 2.

Geometricky lze větu I ilustrovat na číselné ose, jak ukazují obrazy 1 a 2. Důkaz věty I lze najít v každé dobré učebnici matematické analysy. Zde jej podávat nebudeme. Můžeme nyní přistoupit k definici délky křivky.

Provedeme nejprve tuto předběžnou úvahu:

Mysleme si v rovině křivku S. Kdyby byla křivka S představována nití, ležící na stole, bylo by možno změřit ji takto: vezmeme ji za oba kraje, natáhneme ji a přiložíme k pravítku. Na pravítku pak odečteme délku niti.

Je-li nyní dána v rovině libovolná křivka, není obtížné si představit, jak tu máme chápat výrok „přiložit ji k pravítku". Je třeba vzít „pravítko" — úsečku. „Přiložit křivku S s krajními body A a B k pravítku" značí přiřadit každému bodu křivky S bod nějaké úsečky LM tak, že jsou-li P_1, P_2 jakékoli dva různé body křivky S a Q_1, Q_2 odpovídající jim body úsečky LM, jsou Q_1 a Q_2 dva body různé, a je-li bod P_1 položen blíže po křivce bodu A než bod P_2, je bod Q_1 na úsečce LM položen blíže bodu L než bod Q_2. Budeme říkat v tomto případě, že bodům křivky S jsou přiřazeny body úsečky LM se zachováním pořádku (není při tom nutné, aby každý bod úsečky LM byl přiřazen některému bodu křivky S).

„Přiložit křivku S k pravítku" znamená tedy přiřadit jejím bodům body nějaké úsečky LM se zachováním pořádku.

Neumíme však říci, co to znamená „napřímit"[7]) křivku. Jak obejdeme tuto obtíž?

Představme si, že místo niti máme gumičku. Budeme-li ji napřimovat stejně jako předtím nit, bude se gumička natahovat. Přiložíme-li nyní napjatou gumičku k pravítku, nezjistíme její původní délku, budeme však vědět, že původní délka byla menší než číslo, které odečteme na pravítku. To je ovšem také poznatek.

[6]) Předpokládáme, že uvažované množiny obsahují alespoň jeden prvek.

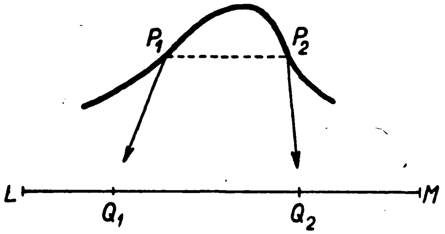
[7]) Rektifikovat křivku.

Ukazuje se, že s křivkou je možno zacházet jako s gumičkou. Můžeme ji „natáhnout“ a v tomto stavu „přiložit k pravítku“. K tomu je třeba přiřadit (se zachováním pořádku) bodům křivky S body nějaké úsečky LM tak, aby vzdálenost libovolných dvou bodů P_1, P_2 křivky S v původní poloze v rovině (to jest délka úsečky, která body P_1, P_2 spojuje) nebyla větší[8]) než vzdálenost odpovídajících bodů Q_1, Q_2 na úsečce LM (obr. 3). Jestliže se provede takové přiřazení, říkáme, že křivka S je navinuta na úsečku.

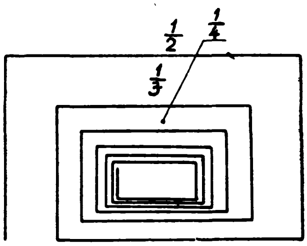
Křivku nelze vždy navinout na úsečku. V obraze 4 je lomená čára, kterou nelze navinout na žádnou úsečku[9]).

Nelze-li křivku S navinout na žádnou úsečku, budeme říkat, že horní délka křivky S je nekonečně velká. Proč volíme tento název, uvidíme z dalšího.

Předpokládejme nyní, že křivku S je možno navinout na úsečku LM. Stejně jako u gumičky také u křivky S je přirozené mít za to, že její délka (jejíž definici musíme ovšem teprve podat) nesmí být větší, než je délka úsečky LM.



Obr. 3.



Obr. 4.

Uvažujme délky všech možných úseček, na něž je možno křivku S navinout. Dostaneme tak množinu čísel, z nichž každé je větší než nula. Má tedy tato číselná množina podle věty I infimum. Toto infimum nazveme horní délka křivky. Délka křivky — budeme-li ji definovat rozumně — nesmí být větší, než je její horní délka, jinak se ukáže, že je delší než nějaká úsečka, na niž lze křivku S navinout, což odporuje naší intuitivní představě o délce.

Pokusíme se nyní odhadnout délku křivky z druhé strany. Provedeme za tím účelem tyto dvě úvahy:

1. Rozdělíme-li křivku S na několik kousků, musí být délka křivky S rovna součtu délek těchto kousků;

2. délka křivky nesmí být menší, než je délka úsečky, spojující její krajní body (říkáme „ne menší“ a „ne větší“, poněvadž nevylučujeme případ, kdy křivka je sama úsečkou).

Spojíme-li obě úvahy, dojdeme k tomuto závěru:

Délka křivky nesmí být menší než je délka lomené čáry, která je jí vepsána.

---

[8]) Pro úplnou analogii s gumičkou by se mělo říci „byla menší“ místo „nebyla větší“; pro naše potřeby je však lepší druhá formulace.

[9]) Jiným příkladem takové „nenavinutelné“ křivky je graf funkce $y = x \sin \frac{1}{x}$ pro $0 < x \leqq \frac{1}{\pi}$, $y = 0$ pro $x = 0$: O této funkci se lze dočíst v mnoha učebnicích matematické analysy.

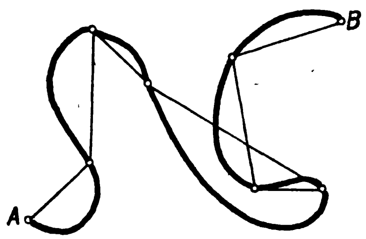
Pod lomenou čarou křivce vepsanou rozumíme toto: Budiž dána křivka S s krajními body A a B. Lomenou čarou vepsanou křivce S nazýváme lomenou čáru, jejíž vrcholy leží na křivce S, jejíž první vrchol splývá s bodem A a poslední s bodem B, a jejíž každý následující vrchol je po křivce blíže bodu B než vrchol předcházející (obr. 5).

Uvažujme množinu délek všech možných lomených čar vepsaných křivce S. Možné jsou dva případy:

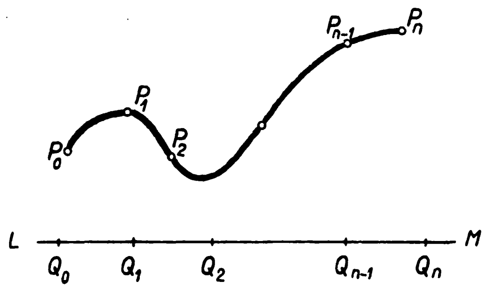
1. Všechna čísla této množiny jsou menší než nějaké číslo. Pak podle věty I má tato množina supremum. Nazveme toto supremum dolní délka křivky S;

2. v naší množině jsou jakkoli velká čísla. Pak řekneme, že dolní délka křivky je nekonečně velká.

Ať je křivce přiřazena jakýmkoli způsobem délka, nesmí tato délka být menší než je dolní délka křivky. V opačném případě by byla větší než délka některé lomené čáry křivce S vepsané, což odporuje naší intuitivní představě o délce křivky.



Obr. 5.



Obr. 6.

Označíme horní délku křivky S znakem $\bar{l}(S)$, dolní délku znakem $\underline{l}(S)$. Je-li horní popřípadě dolní délka křivky nekonečně velká, budeme psát $\bar{l}(S) = \infty$ popřípadě $\underline{l}(S) = \infty$. Není-li horní popřípadě dolní délka křivky S nekonečně velká, to jest je-li konečná, budeme psát $\bar{l}(S) < \infty$ popřípadě $\underline{l}(S) < \infty$.

Pomocná věta 1. *Je-li* $\bar{l}(S) < \infty$, *je* $\underline{l}(S) \leqq \bar{l}(S)$.

Důkaz: Předpokládejme opak:

$$\underline{l}(S) > \bar{l}(S) .$$

Poněvadž $\underline{l}(S)$ je supremum délek lomených čar křivce S vepsaných, je možno mezi nimi najít lomenou čáru C, jejíž délka je větší než $\bar{l}(S)$. Vrcholy lomené čáry C nechť jsou $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$. Poněvadž $\bar{l}(S)$ je infimum délek úseček, na něž lze křivku S navinout, lze najít úsečku LM, na niž lze křivku S navinout a takovou, že její délka je menší než délka lomené čáry C.

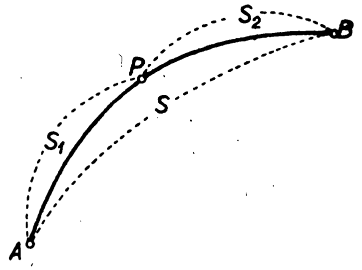
Navineme křivku S na tuto úsečku LM. Body $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$ přejdou v jisté body $Q_0, Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ úsečky LM, rozmístěné tak, že každý následující je blíže bodu M než bod předcházející (obr. 6). Délka úsečky P_0P_1 není větší než délka úsečky Q_0Q_1, délka úsečky P_1P_2 není větší než délka úsečky Q_1Q_2 atd. Tedy délka celé lomené čáry není větší než délka celé úsečky LM. Došli jsme ke sporu, naše tvrzení je tedy dokázáno.

Pomocná věta 2. *Budiž S křivka s krajními body A a B. Budiž $\underline{l}(S) < \infty$. P budiž nějaký další bod křivky S a S_1, S_2 části křivky S s krajníni body A, P a P, B (obr. 7). Pak $\underline{l}(S_1) + \underline{l}(S_2) = \underline{l}(S)$.*

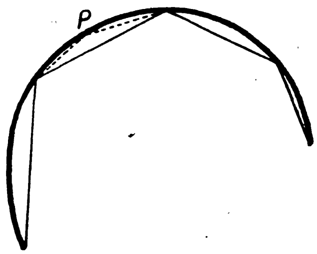
Důkaz: Lomená čára vepsaná křivce S_1 a lomená čára vepsaná křivce S_2 tvoří dohromady lomenou čáru vepsanou křivce S. Supremum délek lomených čar vepsaných křivce S není menší než součet suprem délek lomených čar vepsaných křivkám S_1 a S_2:

$$\underline{l}(S_1) + \underline{l}(S_2) \leqq \underline{l}(S) . \tag{x}$$

Z druhé strany je možno ke každé lomené čáře C vepsané křivce S najít lomenou čáru C' vepsanou křivce S takovou, že má jeden vrchol v bodě P a délku ne menší, než je délka čáry C. K tomu stačí vzít (obr. 8) oba vrcholy lomené čáry C, které sousedí s bodem P, a článek lomené čáry C s těmito krajními body nahradit dvěma články o společném vrcholu P a dalšími krajními body



Obr. 7.



Obr. 8.

v obou bodech sousedících s bodem P. Takto získanou lomenou čáru můžeme vzít za zmíněnou lomenou čáru C'. Avšak lomenou čáru C' můžeme pokládat za složenou ze dvou lomených čar, z nichž jedna je vepsána křivce S_1, druhá křivce S_2. Není tedy supremum délek lomených čar vepsaných křivce S větší než součet délek lomených čar vepsaných křivkám S_1 a S_2, tedy

$$\underline{l}(S) \leqq \underline{l}(S_1) + \underline{l}(S_2) .$$

Spolu s nerovností (x) dává tato poslední nerovnost výsledek

$$\underline{l}(S_1) + \underline{l}(S_2) = \underline{l}(S) ,$$

jak jsme tvrdili.

Pomocná věta 3: *Je-li $\underline{l}(S) < \infty$, je $\bar{l}(S)$ konečná a platí $\bar{l}(S) \leqq \underline{l}(S)$.*

Důkaz: Budiž dána křivka S s krajními body A a B. Označíme znakem $S(P'P'')$ část křivky S mezi body P' a P'' jako krajními. Vezmeme úsečku LM, jejíž délka je $\underline{l}(S)$. Sestrojíme takovou korespondenci (přiřazení) mezi body křivky S a body úsečky LM: Bodu A přiřadíme bod L a libovolnému bodu P křivky S přiřadíme bod Q úsečky LM, vzdálený od bodu L (na úsečce LM) o délku $\underline{l}[S(AP)]$. Tato korespondence je navinutím křivky S, neboť jsou-li body P', P'' body křivky S, přičemž bod P' je po křivce blíže bodu A než bod P'', je podle pomocné věty 2

$$\underline{l}[S(AP'')] - \underline{l}[S(AP')] = \underline{l}[S(P'P'')] ,$$

a poněvadž $\underline{l}(P'P'')$ není menší než vzdálenost bodů P' a P'', je naše korespondence navinutím. Je tedy možno křivku S navinout na úsečku délky $\underline{l}(S)$, to jest

$$\bar{l}(S) \leqq \underline{l}(S)\,,$$

a to jsme právě tvrdili.

Pomocná věta 3 s pomocnou větou 1 vedou k pomocným větám 4 a 5:

Pomocná věta 4: *Je-li* $\underline{l}(S) < \infty$, *je* $\bar{l}(S) < \infty$ *a* $\underline{l}(S) = \bar{l}(S)$.

Pomocná věta 5: *Je-li* $\underline{l}(S) = \infty$, *je* $\bar{l}(S) = \infty$.

Důkaz: Předpokládejme, že $\bar{l}(S) < \infty$. Pak existuje úsečka LM, na kterou lze křivku S navinout. Budiž m délka úsečky LM. Poněvadž $\underline{l}(S) = \infty$, existuje lomená čára C vepsaná křivce S, jejíž délka je větší než m. Buďtež $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$ vrcholy této lomené čáry, a $Q_0, Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ body úsečky LM, jež odpovídají bodům $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$ při navinutí křivky S na úsečku LM. Vzdálenost bodů P_{i-1}, P_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ není větší než vzdálenost odpovídajících bodů Q_{i-1}. Qi. Tedy délka úsečky není menší než délka lomené čáry. Docházíme tak ke sporu, čímž dokazujeme naši pomocnou větu.

Pomocné věty 4 a 5 dávají tuto větu 5.

Věta II:

Budiž S libovolná křivka. Pak je buď 1. $\underline{l}(S) = \infty$ *a* $\bar{l}(S) = \infty$, *nebo 2.* $\underline{l}(S) < \infty$ *a* $\bar{l}(S) < \infty$ *a* $\underline{l}(S) = \bar{l}(S)$.

Vidíme, že chceme-li, aby délka křivky odpovídala naší intuitivní představě o délce, musí délka křivky ležet mezi dolní a horní délkou. Tyto hodnoty jsou však stejné. Zůstává tedy jediný možný závěr:

Za délku křivky prohlásíme tuto společnou hodnotu dolní a horní délky.

Takto definovanou délku křivky S budeme značit $l(S)$.

Délka křivky se obvykle definuje jako limita posloupnosti délek vepsaných lomených čar, za předpokladu, že největší jejich článek konverguje k nule. Dokážeme, že tato definice vede k téže hodnotě délky křivky.

Číslo rovné limitě posloupnosti délek lomených čar vepsaných křivce S, budeme nazývat klasickou délkou křivky S na rozdíl od délky $l(S)$, která je rovna společné hodnotě dolní a horní délky. Pak můžeme říci:

Věta III:

Klasická délka křivky je rovna její délce $l(S)$.

Důkaz: Krajní body křivky buďtež A a B. Znakem $S(P)$ označíme část křivky S s krajními body A a P, kde P je nějaký bod křivky S. Znakem $l^*(S)$ označíme klasickou délku křivky S a znakem $l^*[S(P)]$ klasickou délku křivky $S(P)$. Vezmeme úsečku LM, jejíž délka je rovna $l^*[S(B)] = l^*(S)$. Každému bodu P křivky S přiřadíme bod Q úsečky LM, který je od bodu L vzdálen o délku $l^*[S(P)]$.

Vzdálenost bodů Q' a Q'', přiřazených dvěma libovolným bodům P' a P'' křivky S je rovna klasické délce části křivky S s krajními body P' a P'', a není tedy menší než délka úsečky, spojující body P' a P''. Naše korespondence je tedy navinutím křivky S na úsečku LM. Je tedy

$$\bar{l}(S) \leqq l^*(S)\,.$$

Dále je

$$\underline{l}(S) \geqq l^*(S)\,,$$

neboť, kdyby tomu tak nebylo, existovala by lomená čára vepsaná křivce S, jejíž délka by byla větší než $\underline{l}(S)$, což není možné. Dostáváme tak

$$\bar{l}(S) \leqq l^*(S) \leqq \underline{l}(S)\,,$$

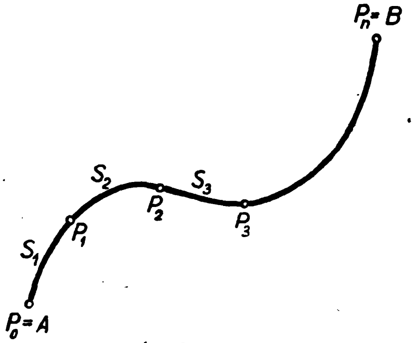
a poněvadž

$$\bar{l}(S) = \underline{l}(S)\,,$$

je

$$l^*(S) = l(S)\,,$$

což jsme chtěli dokázat.



Obr. 9.

Požadavky, které klademe na definici délky křivky a které jednoznačně vedou k naší konstrukci, můžeme formulovat přesněji. K tomu vyslovme ještě jednu definici:

Buďtež dány dvě křivky, křivka S' s krajními body A' a B' a křivka S'' s krajními body A'' a B''. Říkáme, že křivka S' je navinuta na křivku S'', jestliže každému bodu křivky S' je přiřazen jistý bod křivky S'' tak, že platí:

a) Dvěma různým bodům P_1 a P_2 křivky S' odpovídají dva různé body Q_1 a Q_2 křivky S'';

b) je-li bod P_1 po křivce S' blíže bodu A' než bod P_2, je bod Q_1 po křivce S'' blíže bodu A'' než bod Q_2;

c) délka úsečky Q_1Q_2 není menší než délka úsečky P_1P_2.

Nyní můžeme formulovat požadavky:

Každé křivce S chceme přisoudit jedno nezáporné číslo $\lambda(S)$ — její délku, nebo prohlásit, že délka křivky je nekonečně velká (v tom případě budeme psát $\lambda(S) = \infty$) tak, aby byly splněny podmínky:

1. Lze-li křivku S_1 navinout na křivku S_2, je

$$\lambda(S_1) \leqq \lambda(S_2)^{10)}\,.$$

2. Budiž S křivka s krajními body A a B. Buďtež $P_0 = A, P_1, P_2, \ldots, P_n = B$ body, rozložené na ní v pořadí od bodu A k bodu B. Budiž S_i úsek křivky S s krajními body P_{i-1}, P_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ (obr. 9). Pak

$$\lambda(S) = \lambda(S_1) + \lambda(S_2) + \ldots + \lambda(S_n)\,.$$

3. Je-li S úsečka, je $\lambda(S)$ rovno obvyklé její délce.

Věta IV:

Naše definice délky $l(S)$ vyhovuje podmínkám 1., 2., 3.

Důkaz: Předpokládejme, že křivku S_1 lze navinout na křivku S_2. Nechť přitom bodu P křivky S_1 odpovídá bod Q křivky S_2. Je-li délka $l(S_2)$ křivky S_2 nekonečně velká, je splněna podmínka 1. Předpokládejme tedy dále, že $l(S_2)$ je konečná. Budiž LM úsečka, na níž lze navinout křivku S_2. Nechť přitom

[10]) Budeme psát také $\lambda(S_1) < \lambda(S_2)$, je-li $\lambda(S_1)$ konečné a $\lambda(S_2)$ nekonečně velké a $\lambda(S_1) = \lambda(S_2)$ je-li $\lambda(S_1) = \infty$ a také $\lambda(S_2) = \infty$, takže nerovnost $\lambda(S_1) \leqq \lambda(S_2)$ zahrnuje také případ $\lambda(S_2) = \infty$.

bodu Q křivky S_2 odpovídá bod R úsečky LM. Přiřadíme bodu P křivky S_1 bod R úsečky LM, který odpovídá tomu bodu Q křivky S_2, který sám je přiřazen bodu P křivky S_1. Pak křivka S_1 je rovněž navinuta na úsečku LM. Z toho však plyne

$$\bar{l}(S_1) \leqq \bar{l}(S_2)\,,$$

to jest

$$l(S_1) \leqq l(S_2)\,.$$

Dokázali jsme výše, že rozdělíme-li křivku S bodem P na dvě části, je dolní délka $\underline{l}(S)$ rovna součtu dolních délek těchto částí. Indukcí lze toto tvrzení rozšířit na libovolný (konečný) počet částí, ve které rozdělíme křivku S, a poněvadž $\underline{l}(S) = \bar{l}(S)$, je splněna také podmínka 2.

Podmínka 3. je zřejmě splněna: délka úsečky S je rovna obyčejné délce lomené čáry jí vepsané, tedy dolní délka $\underline{l}(S)$ úsečky je rovna její délce. Avšak $\underline{l}(S) = l(S)$. Věta je dokázána.

Ukážeme nyní, že $l(S)$ je jediná délka, která vyhovuje podmínkám 1., 2., 3.

Věta V:

Budiž dána libovolná křivka S. Přiřaďme křivce S číslo $\lambda(S) > 0$ (nebo položme $\lambda(S) = \infty$) tak, aby $\lambda(S)$ splňovalo podmínky 1., 2., 3. Pak $\lambda(S) = l(S)$.

Důkaz: Předpokládejme, že křivku S lze navinout na úsečku LM. Pak podle podmínek 1. a 3. není číslo $\lambda(S)$ větší než délka úsečky LM. Tedy

$$\lambda(S) \leqq \bar{l}(S)\,.$$

Nelze-li křivku S navinout na žádnou úsečku, je $\bar{l}(S) = \infty$, tedy zase

$$\lambda(S) \leqq \bar{l}(S)\,.$$

Dokážeme, že je zároveň

$$\lambda(S) \geqq \underline{l}(S)\,.$$

K tomu použijeme pomocné věty:

Pomocná věta 6:

Budiž dána křivka S s krajními body A a B. Body A a B spojíme úsečkou (obr. 10) *a zvolíme na této úsečce nějaký libovolný bod Q. Bodem Q veďme kolmici na úsečku AB. Tato kolmice nutně protne křivku S.*

Toto tvrzení je z názoru zřejmé, důkaz však není jednoduchý. Podáme jej za chvíli. Prozatím budeme předpokládat, že pomocná věta 6 platí a přistoupíme k důkazu našeho předcházejícího tvrzení.

Křivce S vepíšeme lomenou čáru s vrcholy $P_0, P_1, P_2, \ldots, Pt$ a označíme část křivky s krajními body P_{i-1}, P_i znakem S_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) (obr. 11). Vezměme křivku S_i a článek lomené čáry $P_{i-1}P_i$. Na úsečce $P_{i-1}P_i$ zvolme libovolný bod Q a veďme jím přímku kolmou k této úsečce. Podle pomocné věty 6 protne tato kolmice křivku S_i. Vezměme průsečík (je-li jich více, tak kterýkoli z nich) a přiřaďme jej bodu Q úsečky $P_{i-1}P_i$. Dostaneme tak navinutí úsečky $P_{i-1}P_i$ na křivku S_i. Podle podmínky 1. je pak

$$\lambda(P_{i-1}P_i) \leqq \lambda(S_i)\,.$$

Avšak podle podmínky 3. je $\lambda(P_{i-1}P_i)$ rovno délce úsečky $P_{i-1}P_i$. Podle podmínky 2. je dále

$$\lambda(S) = \lambda(S_1) + \lambda(S_2) + \ldots + \lambda(S_n)$$

a dále

$$\lambda(S) \geqq \underline{l}(S) .$$

(Případ $\underline{l}(S) = \infty$ je tu také obsažen, neboť kdyby v tomto případě byla $\lambda(S)$ konečná, existovala by lomená čára vepsaná křivce S, jejíž délka by byla větší než $\lambda(S)$, což, jak jsme viděli, není možné.) Je tedy

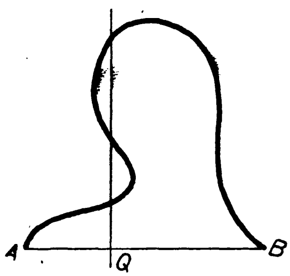
$$\bar{l}(S) \leqq \lambda(S) \leqq \underline{l}(S) ,$$

a proto

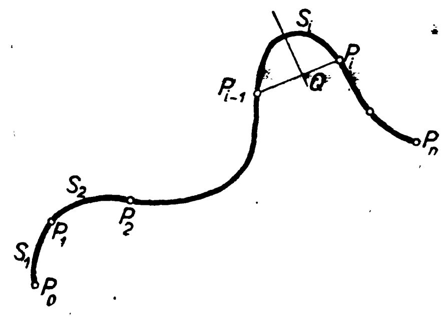
$$\lambda(S) = l(S) ,$$

což jsme měli dokázat.

Zbývá dokázat pomocnou větu 6.



Obr. 10.



Obr. 11.

Předpokládejme, že tato věta neplatí, to jest že přímka m neprotíná křivku S. Přímka m dělí rovinu na dvě části. Nazveme tu část, do níž patří bod A, levou částí, tu část, v níž leží bod B, pravou částí roviny. Podle naší definice křivky existuje interval (úsečka) $\langle t_1, t_2 \rangle$ osy t takový, že každému bodu t odpovídá bod $P(t)$ křivky. Bod $P(t_1) = A$ leží vlevo od přímky m, bod $P(t_2) = B$ vpravo od přímky m. Uvažujme všechny hodnoty t intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$, pro které odpovídající jim body $P(t)$ leží vlevo od přímky m. Všechny tyto hodnoty leží vlevo od t_2, tedy podle věty I má množina všech těchto hodnot supremum. Označme je t^*. Uvažujme bod $P(t^*)$. Bod $P(t^*)$ leží na přímce m. Kdyby totiž na ní neležel, ležel by v nějaké vzdálenosti $\varepsilon > 0$ od ní. Kdyby ležel vlevo od přímky m, pak, vzhledem k tomu, že t^* je supremum bodů t, pro které $P(t)$ leží vlevo od m, by pro libovolný bod t, ležící vpravo od t^*, ležel odpovídající bod $P(t)$ vpravo od přímky m a tedy vzdálenost $P(t)$ a $P(t^*)$ by byla větší než ε, ať by t bylo jakkoli blízko t^*. To však odporuje definici křivky. Kdyby $P(t^*)$ ležel vpravo od přímky m, pak — podle definice suprema — v libovolné blízkosti bodu t^* by ležely body t, pro něž $P(t)$ leží vlevo od přímky m, což zase vede ke sporu s definicí křivky. Pomocná věta 6 je tím dokázána.

Přesvědčili jsme se, že je jeden jediný rozumný způsob, jak zavést délku křivky. Je zajímavé, že pro obsah (plošný) tomu tak již není. Existují různé způsoby, jak definovat obsah, vedoucí k různým hodnotám pro některé plochy. To ukazuje, že naše úvahy nebyly triviální.

Omezili jsme se na prosté oblouky. Všechny výše uvedené úvahy lze však bez obtíží rozšířit na jakékoli spojité křivky.

Přeložil dr. Josef Veselka