

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Jindřich Nečas

Současný stav a perspektivy nelineární analýzy v ČSFR

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 35 (1990), No. 5, 250--255

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/139365>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1990

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Současný stav a perspektivy nelineární analýzy v ČSFR

Jindřich Nečas, Praha

1. Úvod

Nelineární analýza reprezentuje jeden z perspektivních oborů matematiky. Ačkoli její kořeny jsou v matematické analýze, zasahuje do jiných matematických směrů jako je diferenciální geometrie, globální analýza, algebraická topologie, homologická algebra, numerické metody a je v úzké interakci s fyzikálními směry, jako je kvantová mechanika, geofyzika.

Fyzikální nelineární jevy, jako jsou silové a energetické interakce, ovlivňují matematické modely nelineární analýzy. Zaměření nelineární analýzy k technickým vědám se výrazněji projevuje při modelování turbulentního proudění, studiu okolozvukového proudění nebo elastoplastického chování materiálů. Tyto interakce jsou ovšem myslitelné pouze při využití nejmodernější výpočetní techniky.

Je zřejmé, že vymezení nelineární analýzy je snadné pouze v triviálním pohledu na předměty zkoumání charakteristické nelineárními konstitučními vztahy. Některé otázky se řeší a vždy se budou řešit užitím lineárních tečných popisů; v současné době se stávají jádrem nelineární analýzy jevy vznikající pouze nelineárními interakcemi. Zdá se dokonce, že řada fundamentálních chování neživé i živé přírody má takový charakter. Příkladem toho je deterministický chaos.

Nelineární analýza se začala rozvíjet v ČSFR až po r. 1945. Nelze ovšem opomenout fundamentální výsledky E. Čecha a jeho školy v diferenciální geometrii a homologické algebře, úzce související s problematikou nelineární analýzy. Hlavním impulsem k rozvoji nelineární analýzy byl rozvoj naší vědecké základny v poválečném období, charakteristický založením ČSAV a SAV a na novém stupni obnovou vědecké práce na vysokých školách univerzitních a technických. Problémy nelineární analýzy vstoupily výrazně do popředí nástupem nelineární funkcionální analýzy. Vznikly otázky řešitelnosti nelineárních operátorů, nové uplatnění našly při zkoumání těchto otázek metody variační a topologické. To dalo impuls k numerickému řešení nelineárních úloh a vzrůstal počet fyzikálních, biologických a chemických modelů s nelineární strukturou. Typickým příkladem je bouřlivý rozvoj zkoumání rovnice pro proudění kapalin, rovnice Navierovy-Stokesovy, která je relativně přesným popisem skutečnosti, obsahuje velmi nepříjemnou kvadratickou nelinearitu a je dodnes tvrdým oříškem specialistů v diferenciálních rovnicích, v matematickém modelování a v numerických metodách.

2. Současný stav i bezprostřední perspektivy bádání v nelineární analýze lze popsat naplní některých hlavních úkolů státního plánu základního výzkumu:

Tento text byl schválen a předložen k publikaci vědeckým kolegiem matematiky ČSAV.

Údaje o autorovi: Prof. RNDr. JINDŘICH NEČAS, DrSc., vedoucí vědecký pracovník matematicko-fyzikální fakulty UK v Praze.

Hlavní úkol I-1-3 „Geometrické struktury“ souvisí s nelineární analýzou řadou dílčích úkolů. Perspektivně se nelineární metody projeví ve studiu Riemannovy geometrie, nehmotných polí v teoretické fyzice, při studiu Einsteinových a Yangových-Millsových rovnic. Diferenciálních rovnic a variačního počtu se týká studium minimálních ploch se singularitami. Rovněž studium přirozených diferenciálně geometrických funktořů a operátoreů je důležitě. Samozřejmě poroste význam globálního variačního počtu a geometrické teorie systémeů diferenciálních rovnic.

V rámci hlavního úkolu I-2-2 „Reálná a funkcionální analýza“ je nelineární analýze věnován dílčí úkol 02 „Nelineární zobrazení, operátorevé rovnice a geometrické struktury Banachových prostoreů“. V této problematice dosáhla československá matematika významných úspěchů. Nelineární zobrazení typu gradientů konvexních funkcionálů byla předmětem řady význačných prací. Studiu geometrické struktury Banachových prostoreů bude i v budoucnosti věnována pozornost. Předchozí problematika úzce souvisí se studiem řešitelnosti nelineárních rovnic v abstraktních prostorech, která navazuje na teorii monotónních operátoreů. Perspektivně je užitečné se soustředit v této oblasti na ergodicou teorii nelineárních zobrazení, nelineární pologrupy, spektrální teorii nelineárních zobrazení i studium nelineárních zobrazení v polouspořádaných Banachových prostorech.

V hlavním úkolu I-2-1 „Diferenciální a integrální rovnice“ je jedním ze stěžejních problémů studium asymptotického chování řešení. Vedle tradičních otázek oscilatoričnosti a regulace takových systémeů, rozložení nodálních bodů apod. přechází tento úkol na obecné studium dynamických systémeů, na studium bifurkačí řešení, na studium struktury atraktoreů. Zvláštní pozornost se věnuje dynamickým systémeům speciálního typu, např. monotónním systémeům nebo systémeům s různými druhy symetrie. Poslední výsledky o existenci a hladkosti inerciálních variet umožňují v mnoha případech silně redukovat dimenzi zkoumaného problémeu, převést otázky o atraktoreu evolučních parciálních diferenciálních rovnic na konečněrozměrný dynamický systém. Tím přecházíme do problematiky parciálních diferenciálních rovnic, úzce spjaté s vyšetřováním elektromagnetického pole, pružně plastických kmitů, dynamické termopružnosti, kinetiky reakce a difúze a se studiem newtonovských i newtonovských kapalin. Současná móda fraktálů se postupně stává fundamentální charakteristikou atraktoreů evolučních rovnic. Bude se dále rozvíjet teorie potenciálu, kde právě nelineární problematika má velkou budoucnost. Funkční prostory (u nás se obzvlášť pěstují váhové Sobolevovy prostory) se studují a budou studovat nelineárními metodami. V současné době dozívá problematika regularity řešení elipticko-parabolických rovnic. Protože stále nejsou řešeny některé fundamentální otázky pro třídímenzionální prostorové oblasti, může tato problematika projít obdobím renesance. Perspektivní je rovněž problematika asymptotiky neinvertibilních operátoreů, u jejíhož zrodu stála československá nelineární analýza.

Nelineární analýza zasahuje rovněž do hlavního úkolu I-2-4 „Numerické metody“. Teoreticky se numerická matematika opírá o výsledky nelineární funkcionální analýzy a dalších disciplín, jako je teorie katastrof apod. Díky vhodnému softwarovému zabezpečení může přispět vlastními hypotézami, získanými počítačovou simulací a experimentováním. Význam numerických výsledků při studiu nelineárních úloh poroste a vhodné numerické metody spolu s novou generací počítačů ovlivní v budoucnosti

ještě význačněji celou nelineární analýzu. V současné době není ještě v silách nejmodernějších počítačů numericky zpracovat asymptotické chování některých nelineárních rovnic jako již zmíněných rovnic Navierových-Stokesových. Lze bez nadsázky říci, že dosažení tohoto výsledku bude znamenat kvalitativní skok v numerické matematice. I když jde o perspektivní úkol, současný i perspektivní stav výpočetní techniky, kterou mají naši českoslovenští matematici k dispozici, nevzbuzuje naději, že by se československá nelineární analýza mohla podílet na tomto vývoji. V rámci tohoto hlavního úkolu se plní dílčí úkol 03 „Matematický software a jeho použití pro řešení úloh matematické fyziky“. Současným i perspektivním cílem tohoto úkolu je vytvářet programy a soubory programů pro široké použití. Takové programy musí spolehlivě pracovat se širokým spektrem vstupních dat a jejich kvalita nesmí být ovlivněna použitým kompilátorem, operačním systémem nebo typem počítače. Pro uživatele je třeba přesně specifikovat způsob práce s programy. Programy navíc musí být schopny detekovat a napravit abnormální situace nebo o nich přinejmenším podat uživateli zprávu. Vytváření matematického software tak vyžaduje detailní analýzu a plánování, extenzivní testování a rozsáhlou dokumentaci. Toto vše – spolu s distribucí a údržbou hotového matematického software – jsou neobyčejně náročné a nákladné úlohy.

Z dalších hlavních výzkumných úkolů zasahuje svou problematikou do nelineární analýzy úkol I-2-5 „Metody aplikované matematiky v inženýrských problémech“. Dílčí úkol I-2-5/1 se týká proudění v proudových strojích a jeho význam v budoucnosti ještě poroste. Problematika týkající se vazkého proudění se bude dále rozvíjet a je naděje, že otázky transsonického proudění, při nichž byl potvrzen zásadní význam entropie, budou nadále rozvíjeny. Dílčí úkol I-2-5/2 přinesl podrobné zpracování metody časové diskretizace, která přináší důležité výsledky v teoretické oblasti i při numerické realizaci. Obzvláště perspektivní jsou úlohy termoelasticity, hlavně dynamické. Dílčí úkol I-2-5/3 je věnován problému optimalizace a inverzním úlohám, zejména v kontaktních problémech. Tato perspektivní problematika se dočká v budoucnosti velkého rozvoje v diagnostice strojových systémů, kde obzvlášť problémy spolehlivosti a bezpečnosti provozu jaderných zařízení budou v centru pozornosti. Podobné problematice je věnován dílčí úkol I-2-5/4, kde se studují úlohy optimálního řízení systémů popsaných von Kármánovými rovnicemi. Viskoelasticitě je věnován dílčí úkol I-2-5/5. Tato problematika je velmi perspektivní hlavně v souvislosti se studiem geometrických nelinearit a rovněž nelokálností jak časových, tak prostorových. Dílčí úkol I-2-5/6 je věnován problému transsonického proudění, kde obzvlášť metoda vazkosti sleduje perspektivní zkoumání přechodu dynamických systémů od silně disipativních k vlnovým. V rámci tohoto úkolu byly řešeny kontaktní úlohy pro konečnou pružnost. Tato problematika je velmi perspektivní a teoreticky – stejně jako metoda vazkosti – souvisí s novou teorií kompenzované kompaktnosti. Vynikající výsledky přináší řešení dílčího úkolu I-2-5/11. Jde zde o problémy bifurkace především periodických řešení nelineárních dynamických systémů a o nalezení a realizaci vhodných numerických metod k určení bodu bifurkace. Závažná a perspektivní je problematika dílčího úkolu I-2-5/12, zaměřená na studium problematiky polovodičů. Její význam pro elektronizaci výroby, vědy, řízení a informačního systému je zřejmý.

3. Souvislost s mezinárodními trendy

Při zkoumání celkového zaměření československé nelineární analýzy je nutno se zamyslet nad trendy, kterými se ubírá nelineární analýza v zahraničí. Při tomto rozboru se budeme opírat o zprávu *Obnova matematiky Spojených států*, připravenou komisí pod vedením E. E. Davida (v dalším stručně *Zpráva*). I když *Zpráva* je poněkud poplatná americkému hledisku (možná z přirozeného důvodu, že jde o americkou matematiku a že Američanům je americká matematika bližší než evropská – je zde snad i trochu domýšlivosti), domníváme se, že velmi dobře odráží světové trendy v celé matematice, a tedy i v nelineární analýze. Tím si ovšem komplikujeme náš úkol, neboť rozbor trendů nelineární analýzy musíme zarámovat rozbořem těch trendů v matematice, které (a to už bylo patrné v úvodu) rozvoj nelineární analýzy spolupodmiňují. Podobně jako v materiálu *Úloha a postavení československé matematiky v socialistické společnosti* (v dalším stručně *Rozbor*) je nutno vycházet ze skutečnosti, že matematika je teoretickým nástrojem i základem technického, vědeckého i společenského pokroku a její charakteristické rysy jsou univerzálnost, propojenost disciplín a zprostředkovanost uplatnění jejích výsledků v praxi. Matematika a matematické metody se staly součástí vědy, techniky, obchodu i každodenního života. Ve *Zprávě* se dokonce praví, že žijeme v matematickém věku, že naše kultura byla matematizovaná. To je pochopitelně v první řadě zásluhou výpočetní techniky. Zde bohužel ve velké technice zatím beznadějně zaostáváme. Předmětem tohoto rozboru není zkoumání vztahu matematiky a jejího technického uplatnění. V každém případě platí to, co se píše v *Rozboru*: nelze matematiku tříštit, prosazovat izolovaný výzkum jen v některých disciplínách a žádat od ní jenom (dodáno autorem) bezprostřední odpověď na problémy reálného světa. Na to, proč čistá matematika je tak fantasticky efektivní v přírodních vědách, odpovídá A. Gleason ve *Zprávě*: „Matematika je věda o uspořádání“ a dále „reálný svět je velký epitom komplikovaných situací, v nichž uspořádanost převažuje“.

V každém případě matematický výzkum musí být z hlavní části základním výzkumem s dlouhodobými úkoly.

4. Výhledy

Není pochyb, že základním pilířem konkrétního užití matematiky v praxi je samočinný počítač. Naše úvahy se již nejednou dotkly této skutečnosti a není ji třeba v tomto okamžiku více rozvádět. Přes obrovský rozvoj počítačů i programů je přesto nutno zdůraznit, že se dosud nepodařilo vytvořit ani matematický model, ani počítač a numerickou metodu, které by zvládly některé časoprostorové nelineární úlohy, např. problémy proudění stlačitelných plynů s nízkou vazkostí. Zde nelineární analýza začíná chápat, že některé numerické potíže jsou principiální a souvisí s exponenciální nestabilitou některých dynamických úloh. Domníváme se, že tomuto směru rozvoje dynamických systémů se věnuje v ČSFR pozornost. Náš handicap spočívá opět v nevybavenosti počítači: Tato situace neumožňuje nahrazovat rozsáhlé a nákladné experimenty počítačovou simulací.

Významným jevem současnosti je opětovné srůstání teoretické fyziky a matematiky. Jedním z krásných příkladů je studium celkové energie vesmíru vycházející z teorie relativity. Matematická formulace tohoto problému vede k úloze o minimálních plochách a harmonických zobrazeních pro nelineární eliptické systémy. K podobným problémům vede studium tekutých krystalů. Zde je nutno podotknout, že některá harmonická zobrazení jsou nutně singulární. To opět oživuje problém regularity řešení nelineárních eliptických systémů, problém, jehož zkoumání má v ČSFR tradici.

Jak jsme se již zmínili, dochází k novým interakcím mezi nelineární analýzou a technickými vědami. Problémy chemických reaktorů, teorie hoření, proudění kapalin, magnetohydrodynamika, elasto-plasticita jsou toho příklady. Rovnice pracující s extrémními teplotami, napětími, tlaky jsou nelineární. Problémy nespočívají pouze v řešení jednotlivých případů, ale v optimálním navrhování. Např. se optimalizuje cenový funkcionál ve třídě funkcí vyhovujících nelineárním stavovým rovnicím nebo nerovnicím. Připomeňme, že problémy konvexní analýzy, charakterizované nerovnicemi, třebaže lineárními, vedou na nelineární úlohu. Tento směr se sleduje s úspěchem v ČSFR a je perspektivní.

Důležité jsou problémy rozvětvení řešení pro rovnice i nerovnice. Tato problematika nabývá v současné době nového rozměru při studiu asymptotického chování řešení dynamických systémů, kdy postupnou bifurkací přes zdvojování frekvence řešení dochází k chaotickému chování.

Studium bifurkací je založeno na variačních nebo topologických metodách. Připomeňme zde vynikající teorii Ljusternikovu-Schnirelmannovu, nelineární zobecnění principu Courantova-Weinsteinova. Teorii bifurkace v sobě v jistém smyslu zahrnuje teorie katastrof a singularit. Poslední teorie výrazným způsobem užívá teorie funkcí více komplexních proměnných.

Studium dynamického chování materiálů při „velké geometrii“ je stále otevřeným problémem. V současné době nabývá na významu modelování disipace energie, která modelům dává charakter parabolických rovnic. Nejsou zatím vůbec vyjasněny poměry mezi silnou disipací, slabou disipací a materiálovou pamětí. Jako již mnohdy v minulosti zde dochází ke stírání rozdílů v chování neživé a živé přírody. Problémy singularit vedou k hypotéze o vzniku trhlin. Dynamika šíření trhlin je stále obestřena tajemstvím.

V teorii proudění je stále zásadní problém turbulence. V současné době je zřetelný posun od chápání turbulence jako statistického jevu k chápání deterministickému. Jedna z příčin stálých obtíží je velikost Reynoldsova čísla: pro velká Reynoldsova čísla (velké rychlosti, malé vazkosti) jsou kontinuální modely citlivé na typ interakce mezi částicemi.

Při celkovém posuzování perspektiv nelineární analýzy jsou patrné některé nedostatky současného stavu. Předně je třeba věnovat více pozornosti algebraické topologii a geometrizaci nelineární analýzy. Je rovněž patrné, že stěžejní problémy teoretické fyziky, jako je např. inverzní metoda rozptylu, ovlivňují méně československou nelineární analýzu než vědy technické. Tato skutečnost celkem odpovídá možnostem i tradicím fyzikálního a technického výzkumu v ČSSR. Nicméně pozornost úlohám moderní teoretické fyziky je třeba zvýšit.

5. Závěr

Pokusme se na závěr vytypovat některé hlavní směry v nelineární analýze, jimž je třeba se v budoucnosti věnovat. Soustavnou pozornost si zaslouží:

1. studium dynamických systémů pro obyčejné a parciální diferenciální rovnice, a to s důrazem na asymptotické chování řešení;
2. teorie singularit (bifurkace, katastrofy);
3. geometrizace nelineární analýzy;
4. účinné numerické metody řešení nelineárních úloh.

Otázky kádrového a hmotného zabezpečení rozvoje nelineární analýzy spadají do širší problematiky zabezpečení rozvoje matematiky jako celku. Nebudeme se zabývat podrobně touto otázkou a odkazujeme na *Rozbor*. Přestavba naší společnosti, pokud chce dosáhnout krátkodobých a dlouhodobých úspěchů, musí se týkat vědecko-technického výzkumu a zajistit jeho kvantitativní a kvalitativní rozvoj. Řešení nemá alternativ: nebude-li v ČSFR efektivní vědecko-technický výzkum, úzce spjatý s problémy reprodukce naší společnosti, nemůže mít přestavba úspěch. Chce to vytvořit na vysokých školách a výzkumných ústavech tvůrčí atmosféru, založenou na důvěře na jedné straně a na vysoké náročnosti, vyžadující pouze výsledky světové úrovně, na straně druhé.

Materiál byl vypracován na podnět vědeckého kolegia matematiky ČSAV a bylo přitom využita zpráva komise ad hoc pod vedením Edwarda E. Davida, kterou vydalo National Academy Press, Washington, D. C., v roce 1984 pod názvem „Renewing U.S. Mathematics. Critical Resource for the Future“, dále materiál „Úloha a postavení čs. matematiky v socialistické společnosti“, který byl vypracován pro Radu programu I SPZV, a konečně podkladové materiály o úkolech SPZV, který ochotně poskytli K. Rektorys, O. Kowalski, J. Kolomý, I. Vrkoč, I. Marek, R. Kodnár, P. Přikryl a J. Král. Významnou pomoc při zpracování poskytli P. Brunovský a A. Kufner, kterým upřímně děkuji.

Článek byl zpracován před 17. listopadem 1989.