Zbyněk Šidák

Současné vývojové směry matematické statistiky

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 18 (1973), No. 3, 116--122

Současné vývojové směry matematické statistiky*)

Zbyněk Šidák, Praha

I. Úvod

Tato přednáška je určena matematikům, kteří snad mají jakousi hrubou představu o obsahu matematické statistiky jakožto vědního oboru, ale kteří nejsou v tomto oboru specialisty; jejím úkolem je podat přehled o některých současných směrech matematické statistiky, ve kterých se v posledním období intenzívně pracuje. Budu se zde snažit vyhmátnout jádro aktuálních idejí a popsat je spíše názorně, aniž bych zabíhal do detailů matematických formulací.

Jako každý vědní obor i matematická statistika se stále prudčeji rozrůstá do šíře i do hloubky, a proto ve svém přehledu směrů zde mohu předložit vlastně jen určitý subjektivní výběr; jiný přednášející by mohl zdůraznit opět jiné směry, které v mém přehledu jsou třeba i zcela opominuty.

I.1. Statistika se odedávna zabývala shromažďováním dat (tj. pozorování) hromadné povahy a jejich popisem (např. data populační, o výrobě atd.). Z ní později vykrystalizovala *matematická statistika*, jejímž charakteristickým rysem je to, že odvozuje své závěry na základě určitého matematického modelu, využívá pokročilejšího matematického aparátu a předmětem jejího studia jsou data (pozorování) náhodného charakteru. Proto také přirozeným základem matematické statistiky je teorie pravděpodobnosti, která se právě zabývá náhodnými jevy a náhodnými veličinami.

Historický vývoj oboru postupoval *od popisu k analýze, rozhodování a predikci*. Bohužel co se však týče všeobecné představy o náplni matematické statistiky, u laiků se ještě dnes setkáváme s tím, že matematickou statistiku zaměňují za starodávnou (100 či 200 let starou) popisnou statistiku, jejíž hlavní náplní bylo počítat průměry a rozptyly či podobně. Takové výpočty jsou však dnes nejvýše jen předběžným krokem naší práce. Hlavní náplní současné matematické statistiky je analýza (např. posouzení velikosti vlivů různých faktorů ve složitých experimentech, podle potřeby využití speciálních metod pro eliminaci vlivu některých faktorů apod.), rozhodování (např. o tom, který z několika technologických postupů při výrobě je nejvýhodnější, či o tom, jak je třeba nastavit určité spojité parametry při výrobním postupu pro optimalizaci výsledku apod.) a predikce (předpovídání s velkou pravděpodobností určitého výsledku a zajištění toho, aby tato pravděpodobnost byla vskutku dostatečně velká podle našeho přání).

I. 2. Ujasněme nyní ještě *rozdíl mezi teorií pravděpodobnosti a matematickou statisti-*

---

*) Přednáška na 8. celostátní konferenci o vyučování matematice na vysokých školách technických, konané 11.—15. 9. 1972 ve Velkých Karlovicích.

kou. Představme si, že X značí náhodnou veličinu (nebo náhodný vektor nebo posloupnost či kontinuum náhodných veličin) a P je její rozložení pravděpodobnosti. Teorie pravděpodobnosti pak odvozuje závěry o vlastnostech X, jestliže je známo P. Naproti tomu v matematické statistice naopak je k dispozici známý náhodný výběr veličin $X_1, \dots, X_n$ (tj. jejich realizací) a z něho se usuzuje na vlastnosti P. V trochu konkrétnější formulaci bývá v tomto případě úkol následující: náhodný výběr $X_1, \dots, X_n$ má nějaké rozložení pravděpodobnosti P_Θ z určitého systému rozložení, které závisí na neznámém parametru Θ; máme-li pak realizaci výběru $X_1, \dots, X_n$, je naším úkolem činit závěry o neznámém Θ.

I. 3. Všimněme si ještě poněkud detailnější formulace některých *základních, klasických problémů matematické statistiky.* V těchto problémech se zpravidla předně předpokládalo, že rozložení P_Θ mají určitou, plně analyticky specifikovanou formu; na příklad pro spojitá rozložení se nejčastěji vycházelo z tzv. normálního rozložení, jehož hustota je dána vzorcem $\varphi(x) = (2\pi)^{-1/2}\,\sigma^{-1}\exp\{(x-\mu)^2/(2\sigma^2)\}$ pro $-\infty < x < \infty$, kde μ, σ jsou parametry (μ je průměr, σ^2 je rozptyl, σ je tzv. směrodatná odchylka). Dále se předpokládalo, že počet pozorování n ve výběru (tzv. rozsah výběru) je pevné, předem zadané číslo a že pozorování $X_1, \dots, X_n$ jsou nezávislá.

Matematická statistika se pak při těchto předpokladech zabývá řešením následujících tří základních úkolů. Jedním úkolem je najít veličinu $\hat{\Theta} = \hat{\Theta}\,(X_1, \dots, X_n)$ která je funkcí pozorování $X_1, \dots, X_n$ a která v nějakém smyslu nejlépe vystihuje neznámou hodnotu Θ či se k ní nejlépe přibližuje; $\hat{\Theta}$ se nazývá bodovým odhadem Θ a je rovněž náhodnou veličinou. Jiným úkolem je najít interval (c, d) na reálné ose (tzv. konfidenční interval neboli interval spolehlivosti) takový, aby pravděpodobnost $P_\gamma = P\{c < \Theta < d\}$ byla veliká, to jest rovna nebo alespoň rovna určitému předem předepsanému číslu γ blízkému k 1; zde c, d jsou opět funkcemi $X_1, \dots, X_n$, a tedy jsou náhodnými veličinami. Hovoříme zde o intervalovém odhadu Θ a reálný smysl spočívá v tom, že s velkou pravděpodobností γ můžeme tvrdit, že neznámý parametr Θ leží v intervalu (c, d). Konečně třetím úkolem je tzv. testování hypotéz; při tomto problému vycházíme z nějaké hypotézy H_0 (tzv. nulové hypotézy), která nás zajímá a která je vyjádřena matematicky prostě tím, že Θ je prvkem nějaké množiny. (Např. nás zajímá, zdali určité dva průměry μ_1, μ_2 jsou si rovny; položíme-li $\Theta = \mu_1 - \mu_2$, je nulová hypotéza H_0 vyjádřena vztahem $\Theta = 0$ čili $\Theta \in \{0\}$. Na základě náhodného výběru $X_1, \dots, X_n$ potom máme s danou velkou pravděpodobností usoudit, zdali H_0 skutečně může být správná nebo zdali je „rozumnější" H_0 zamítnout. (Znovu zdůrazňuji, že v předchozím výkladu se snažím extrahovat jen logické a názorné jádro problémů; při přesné matematické formulaci je samozřejmě nutno definovat, co to znamená „nejlepší vystižení hodnoty Θ", jak se interpretuje pravděpodobnost P_γ, atd.).

Pro budoucí potřebu v dalších paragrafech si nyní všimněme ještě trochu podrobněji testování hypotéz ve formulaci nazývané NEYMANOVOU-PEARSONOVOU podle zakladatelů tohoto směru. Kromě nulové hypotézy H_0 máme zde ještě konkurující, alternativní hypotézu H_1; v zásadě, zamítáme-li H_0, přijímáme H_1 a obráceně. Poněvadž děláme závěry na základě náhodných pozorování $X_1, \dots, X_n$, můžeme se ovšem dopustit chyby v důsledku náhodnosti; jestliže H_0 je správná a přesto ji zamítneme, hovoříme o chybě

I. druhu a její pravděpodobnost označujeme α; jestliže H_1 je správná a přesto přijmeme H_0, jde o chybu II. druhu, jejíž pravděpodobnost označujeme β. Naší snahou by ovšem bylo učinit pravděpodobnosti chyb α i β současně dostatečně malé podle našeho přání. Bohužel však současné splnění obou těchto požadavků je možné jen v jednoduchých, většinou teoretických případech. Potíž spočívá totiž v tom, že popsaný problém je matematicky symetrický vzhledem k H_0 a H_1 jen zdánlivě, jen v obecné teorii, kdežto v prakticky zajímavých úkolech je symetrie velmi silně porušena; H_0 bývá dosti jednoduchá (např. $\Theta = 0$), avšak H_1 zpravidla bývá velmi složitá, skládá se z mnoha bodů (např. $\Theta \neq 0$). Důsledkem toho pak je, že lze učinit α malou, ale z principiálních důvodů nelze učiniti rovněž β malou pro všechny body z H_1. Proto možná rozhodnutí v praktických testovacích procedurách se zpravidla formulují tak, že je pouze možno zamítat H_0, poněvadž při tom máme pravděpodobnost případné chyby α pod kontrolou, umíme ji učiniti malou. Není však možno přijímat H_0, poněvadž tím bychom se mohli dopustit chyby s velikou pravděpodobností β, což by ovšem nebyl rozumný postup; v tomto druhém případě tedy neuděláme žádný závěr a řekneme prostě jen, že procedura „mlčí".

II. Vývoj k přiměřenější analýze reality

Nyní se již začneme zabývat novějšími vývojovými směry matematické statistiky, v nichž se v současné době intenzívně pracuje. V této II. části se zmíníme o několika směrech, o nichž lze říci, že se rozvíjely spíše ze snahy vědců o přiměřenější, dokonalejší analýzu reálného světa. Vývoj tu probíhal zcela podobně jako v ostatních přírodních vědách: v dřívějších, klasických dobách se popisoval a analyzoval svět na základě jednoduchých představ a při matematizaci se užívalo jednoduchých modelů; později se však poznala jejich neadekvátnost a postupně se přecházelo k složitějším představám a modelům, které umožňovaly stále přesnější, jemnější, adekvátnější analýzu přírodních jevů.

II. 1. Tak v některých oblastech matematické statistiky byl *opuštěn klasický předpoklad o tom, že rozložení P_θ mají jednoduchou, plně specifikovanou formu*; speciálně se zjistilo, že normální rozložení není tak „všudypřítomné" a často neodráží tak dobře skutečná rozložení náhodných veličin, jak se dříve myslelo.

Jednou z reakcí matematických statistiků v této situaci bylo, že se začalo připouštět, že k přesné, plně specifikované formě P_θ mohou přistoupit nějaké „poruchy". V dřívějších pracích se předpokládalo zejména, že tyto poruchy mají opět nějaký specifický analytický tvar, že jsou vyjádřeny např. určitými korekčními členy, konečnými úseky asymptotických rozvojů apod. V novějších pracích se však již spíše vychází z předpokladů, že skutečná hustota (resp. distribuční funkce) náhodné veličiny leží v nějakém malém, epsilonovém pruhu okolo teoreticky předpokládané hustoty (resp. distribuční funkce), nebo obecněji že skutečné rozložení leží v malém epsilonovém okolí předpokládaného rozložení ve smyslu nějaké metriky. Je-li nějaká statistická metoda používána pro jiné skutečné rozložení, než pro které byla teoreticky odvozena, její vlastnosti se ovšem méně či více změní nebo tato metoda dokonce vůbec přestane být správná. Studiu takovýchto změn je nyní věnována značná pozornost a ujal se pro ně název „problémy robustnosti".

Statistická metoda se nazývá robustní, jestliže při jejím použití pro málo odlišná rozložení se i její vlastnosti změní jen málo.

Jinou reakcí matematických statistiků na rozpornou situaci zmíněnou na začátku paragrafu bylo to, že se začaly navrhovat statistické metody platné a vhodné pro velmi široké třídy rozložení. Tak vznikly tzv. neparametrické metody, které lze užívat pro libovolné spojité rozložení, aniž bychom znali jeho skutečný analytický tvar. (Název těchto metod pochází z toho, že nejsou založeny na vyšetřování parametrů v klasickém duchu, ale je značně nevhodný; lepší je anglický termín „distribution-free methods", tedy přibližně „metody nezávislé na rozložení", dosud však nikdo nevymyslel stručný a výstižný český ekvivalent tohoto termínu.) Při mnoha těchto metodách se místo samotných pozorování $X_1, \ldots, X_n$ používá jejich pořadí $R_1, \ldots, R_n$, přičemž pořadím R_i hodnoty X_i rozumíme, kolikátá odzdola je X_i mezi všemi $X_1, \ldots, X_n$ uspořádanými podle velikosti. Jestliže např. pozorování $X_1, \ldots, X_k$, $k < n$, leží „spíše" vlevo od ostatních $X_{k+1}, \ldots, X_n$, tj. jsou „spíše" menší, rovněž i jejich pořadí $R_1, \ldots, R_k$ budou „spíše" menší než pořadí $R_{k+1}, \ldots, R_n$; to může zhruba ilustrovat, na jakých myšlenkách jsou založeny neparametrické metody. Snad ještě můžeme podotknout, že tyto metody zpočátku byly vymyšleny jen jako rychlá, snadněji počitatelná, ale hrubá náhražka za klasické metody, avšak postupně se zjistilo, že „síla" těchto metod je jen nepatrně horší a že naopak mají jiné vynikající vlastnosti, které klasické testy postrádají, jako velmi širokou platnost, robustnost a přizpůsobivost.

II. 2. Jako jiný krok k podrobnější analýze jevů a ke složitějším modelům se nyní intenzívně studují *mnohorozměrné problémy*. Jde jednak o to, že pozorování $X_1, \ldots, X_n$ mohou být mnohorozměrné vektory, pro něž se pak např. hledají obdoby klasických jednorozměrných metod, vyšetřují se závislosti mezi jednotlivými souřadnicemi, zjišťuje se, zdali se tato pozorování kumulují do několika málo „shluků" (tzv. „cluster analysis") atd. Za druhé pak jde o to, že parametr Θ může být mnohorozměrný; to nastává běžně v prvém případě vektorových pozorování, ale může nastat i pro jednorozměrná pozorování, když např. tato pozorování pocházejí z více odlišných skupin, z nichž každá má jiné parametry, a úkolem je vzájemně porovnat těchto více parametrů. Z matematického hlediska snad už může být poměrně jasné, jaké nové problémy přináší přechod od jednorozměrného k mnohorozměrnému případu, ale ze statistického hlediska zde navíc vzniká řada dalších velmi závažných problémů zásadního, logického charakteru, spojená např. s tím, že potřebujeme dělat závěry o mnoha parametrech s velkou pravděpodobností současně.

II. 3. Dále se také začalo brát v úvahu a respektovat, že dosti často *pozorování $X_1, \ldots, X_n$ nejsou nezávislá*, což byl opět další krok k přesnější, adekvátnější analýze. Máme-li závislá pozorování $X_1, \ldots, X_n$, hovoříme o náhodném (stochastickém) procesu v diskrétním čase (nebo též o posloupnosti); obdobně můžeme mít kontinum závislých pozorování X_t, kde t probíhá nějaký celý interval číselné osy, a pak hovoříme o náhodném (stochastickém) procesu ve spojitém čase. Závislost pozorování může být ovšem velice různorodá, ale snad nejdůležitější a dosud nejvíce vyšetřované jsou tyto dva typy: za prvé Markovovy procesy charakterizované zhruba tím, že budoucí vývoj pozorování po libovolném časovém okamžiku závisí pouze na pozorování přítomném, nikoliv však na pozorováních minulých; za druhé stacionární procesy charakterizované tím, že rozložení všech veličin procesu je totožné, nemění se v čase. Všechny statistické problémy (resp. jejich zřejmé analogie), o kterých se zmiňujeme v této přednášce, je pak možno studovat i pro různé typy náhodných procesů, což tvoří náplň dalšího aktuálního směru v současnosti velice pěstovaného.

III. Vývoj k lepšímu vyhovění požadavkům praxe

V této III. části na rozdíl od části předchozí si všimneme směrů, jejichž vznik a vývoj je spojen spíše se snahou o lepší vyhovění požadavkům praxe, kde se musí provádět určitá definitivně formulovaná rozhodnutí k nějaké akci. (Rozdělení do části II. a III. je ovšem jen naší přibližnou orientační pomůckou, není nikterak absolutní, směry a důvody jejich vzniku se fakticky prolínají.)

III. 1. Jak jsme viděli na konci paragrafu I. 3, při Neymanově-Pearsonově pojetí testování hypotéz může vzniknout ta prakticky nepříjemná situace, že test založený na výběru $X_1, \ldots, X_n$ určitého rozsahu n neposkytne žádný závěr. Naskýtá se pak docela přirozená myšlenka rozšířit náš výběr o dalších s pozorování $X_{n+1}, \ldots, X_{n+s}$, tím tedy získat více informace a zkusit, zdali příslušný test pro takto rozšířený výběr $X_1, \ldots, X_{n+s}$ by nyní již nedal nějaký závěr. Bohužel však tento postup odporuje logice a etice statistického usuzování: jestliže jsme jednou pro testování použili nějakého výběru $X_1, \ldots, X_n$, nesmíme již tohoto výběru použít takto jednoduše znovu, protože tím by se změnily vlastnosti statistické procedury, speciálně by se mohly nepřípustně zvýšit pravděpodobnosti chyb (kromě některých zvláštních případů, kdy lze dokázat, že to nenastane). Jedině správným přístupem zde je formulovat a vyšetřovat takovouto proceduru vcelku, globálně, jako dvoustupňovou proceduru, jejíž první stupeň je založen na $X_1, \ldots, X_n$, druhý stupeň na $X_1, \ldots, X_{n+s}$. Zřejmým zobecněním vznikají pak vícestupňové procedury a konečně tzv. *sekvenční procedury*, u nichž počet stupňů (kroků) může růst do nekonečna. Sekvenční procedura se tedy provádí tak, že v jejím i-tém kroku ($i = 1, 2, 3, \ldots$) se vezme jedno nebo více pozorování a provede se jakýsi test na základě všech dosavadních pozorování; jestliže test dá nějaký závěr, pozorování se dále už neberou a procedura končí; jestliže však test nedá žádný závěr, přejde se k $(i + 1)$-ému kroku. Samozřejmě sekvenční procedura se opět musí vyšetřovat vcelku a připouštět, že v zásadě počet kroků, tedy tím spíše i pozorování, může být nekonečný. Vidíme tedy, že zde rozsah výběru n je náhodný; u rozumných sekvenčních procedur ovšem s pravděpodobností 1 je n konečné, tj. k nějakému závěru se dospěje po konečném počtu kroků.

III. 2. Zmínili jsme se již dvakrát, že při testech v Neymanově-Pearsonově pojetí leckdy vzniká neuspokojivá situace, že test „mlčí". Pro odstranění této vady založil A. WALD kolem r. 1945 tzv. *teorii rozhodovacích funkcí.* Rozhodovací funkce je vlastně pravidlo, kterým se každému výběru $X_1, \ldots, X_n$ přiřazuje určité rozhodnutí, takže takováto statistická procedura vždy poskytne nějaké rozhodnutí, nikdy „nemlčí". To je ovšem umožněno hlavně tím, že místo dřívějších statistických hypotéz se zde pracuje s jejich různými modifikacemi, např. místo hypotézy $\Theta = 0$ se bere $|\Theta| \leqq a$, místo $\Theta \neq 0$ pak $|\Theta| > a$, kde a je nějaké malé číslo, apod. (Např. při porovnávání dvou průměrů μ_1, μ_2 položíme $\Theta = \mu_1 - \mu_2$ a výzkumník si volí tak malé a, aby při $|\mu_1 - \mu_2| \leqq a$ se oba průměry z praktického hlediska nelišily.) Dále je pro teorii rozhodovacích funkcí charakteristické, že se zde zavádí tzv. ztrátová funkce, vyjadřující číselně naši ztrátu, dopustíme-li se chybného rozhodnutí. Samozřejmě je pak úkolem najít optimální rozhodovací funkce, které v nějakém smyslu minimalizují ztrátu.

Nebudeme však již dále rozvádět tuto teorii obecně, raději si všimneme dvou problémů rozhodovacího typu, kterým je v posledních letech věnována značná pozornost. Představme si, že máme r technologických výrobních postupů a že u i-tého z nich je kvalita konečného výrobku vyjádřena neznámým parametrem Θ_i (např. čím větší je Θ_i, tím je výrobek kvalitnější); na základě náhodných pozorování pak máme učinit nějaký závěr o parametrech $\Theta_1, \ldots, \Theta_r$. Klasické testy však mohou dát nejvýše dosti neurčitý závěr, že třeba neplatí rovnost $\Theta_1 = \ldots = \Theta_r$ mezi všemi parametry nebo neplatí rovnost mezi některými vybranými parametry apod. Praktikové však správně namítali, že takovéhle závěry nejsou to, co oni potřebují. Oni potřebují např. uspořádat výrobní postupy podle velikosti parametrů Θ_i nebo vybrat ten postup (případně několik postupů), pro nějž je Θ_i nejlepší. Jinými slovy, je třeba nalézt rozhodovací pravidlo, jehož rozhodnutími jsou uspořádání parametrů $\Theta_1, \ldots, \Theta_r$ nebo vybrání nejlepších Θ_i; samozřejmě se přitom vyžaduje, aby naše rozhodnutí bylo s velikou pravděpodobností správné. Snad na tomto příkladu je ilustrována základní idea; kromě toho se však vyšetřují různá zobecnění, modifikace či analogie těchto problémů, a to pro nejrůznější rozložení.

IV. Některé základní specifické aktuální problémy

V předcházejících částech jsem se zabýval problémy, jejichž řešení jsou v současnosti rozpracována, kde již dnes aspoň do jakési míry umíme dát odpovědi. V této poslední části si všimnu ještě dalších dvou problémů, které mají podle mého mínění odlišný charakter v tom, že dosud na ně neznáme téměř žádné dobré odpovědi a jsou dnes mnohem více otevřené a velice palčivé; jsou také dosti specifické pro matematickou statistiku na rozdíl od ostatních matematických disciplín.

IV. 1. V matematické statistice stejně jako i v ostatních partiích matematiky se velice využívá asymptotických metod a tyto metody daly množství významných výsledků. Zdá se mi však, že v jiných partiích je již dnes ledacos známo o *chování asymptotických metod pro konečné počty veličin*, např. o rychlostech konvergence apod., kdežto v matematické statistice nevíme v tomto směru téměř nic, v podstatě jsou k disposici téměř jenom některé empirické studie. Proto lze asi očekávat, že v budoucnosti bude značná pozornost věnována vyplnění této mezery.

IV. 2. Nakonec se ještě zmíníme o jedné vskutku zásadní otázce, o *filosoficko-logické otázce koncepce metod matematické statistiky*. V současné době existuje a rozvíjí se vedle sebe několik různých směrů či názorů, jak by měly vypadat matematicko-statistické modely a jakým způsobem by se měly vyvozovat a interpretovat závěry z náhodných pozorování, aby to odpovídalo co nejlépe reálnému životu. Z těchto směrů nyní uvedeme tři nejdůležitější: Za prvé je to směr Neymanův-Pearsonův, který je založen na testování hypotéz a na intervalech spolehlivosti a který jsme poměrně podrobně popsali v paragrafu I. 3. (Aby snad nevznikl nesprávný dojem, zbývá ještě dodat toto: ačkoliv jsme v předchozím několikrát kriticky poukázali na nedostatky tohoto směru, neznamená to ani v nejmenším, že by snad šlo o směr dnes překonaný či zastaralý, poněvadž má na druhé straně opět řadu předností před jinými směry.) Za druhé jmenujme Waldův směr založený na rozhodovacích funkcích, o kterém také již byla řeč v paragrafu III. 2. Konečně za třetí uveďme směr Bayesův, který je založen zhruba na této myšlence: parametr Θ se zde pokládá za náhodnou veličinu, která má před pokusem nějaké, tzv. apriorní, rozložení; pozorování při pokusu nám přinesou určitou informaci, takže potom musíme svou představu o parametru Θ „zrevidovat", přesněji řečeno dostaneme jakési nové, tzv. aposteriorní rozložení Θ, pomocí něhož potom můžeme dělat nějaké závěry o Θ. (Kromě uvedených tří existují ještě i další směry, které však již nejsou tak důležité a nebudeme je popisovat, jako např. směry založené na fiduciálních pravděpodobnostech nebo na subjektivních pravděpodobnostech.)

Řekl bych, že koexistence těchto různých směrů je pro matematickou statistiku vskutku specifická. V ostatních částech matematiky sice také existují různé filosoficko-logické směry (namátkou jmenujme třeba konstruktivismus či intuicionismus), ale převážná většina matematiků se o ně nestará a pracuje na svých konkrétních problémech. Naproti tomu v matematické statistice lze jen dosti výjimečně pracovat v „indiferentním" duchu, a to jen značně teoreticky; pro každého matematického statistika ve vlastním slova smyslu, tj. zabývajícího se odvozováním závěrů z náhodných pozorování, je příslušnost k nějakému směru opravdu životní otázkou, které se nelze vyhnout, každý se musí chtě nechtě rozhodnout, v jakém duchu zaměří práci, ať teoretickou nebo praktickou. Kdybych byl nyní nucen sám se vyjádřit k tomuto problému, vyslovil bych svou zcela subjektivní domněnku, že koexistence různých směrů v matematické statistice je do značné míry oprávněná proto, že každý směr má svou určitou sféru aplikability; zdá se mi proto, že v budoucnosti žádný směr nějak absolutně nezvítězí, ale že i nadále budou různé směry existovat a rozvíjet se vedle sebe, jenom snad nám budoucí vývoj přinese lepší rozpoznání a vymezení příslušných sfér vhodné aplikability pro jednotlivé směry.

Niekedy hovoríme, že nevieme, čo si máme myslieť pri pojme, ktorý bol utvorený. Pri pojme si netreba myslieť nič viac ako sám pojem. Zmyslom tohoto výroku je však túžba po známej, už bežnej predstave. Vedomie sa cíti, akoby mu bola s predstavou odňatá pôda, na ktorej ináč pevne stojí a na ktorej je pevne zdomácnené. Keď sa ocitne v čistej oblasti pojmov, nevie sa orientovať. Preto sa za najzrozumiteľnejších považujú spisovatelia, kazatelia, rečníci, atď., predkladajúci svojim čitateľom alebo poslucháčom také veci, ktoré vedia už spamäti, sú im bežné a samozrejmé.

Čím menej je niekto vzdelaný, čím menej pozná určité vzťahy predmetov, ktoré skúma, tým má väčší sklon k úvahám o prázdných možnostiach, ... *A. W. F. Hegel*
