Jaroslav Milota; Ivan Netuka
V. Mezinárodní matematická soutěž vysokoškoláků

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 25 (1980), No. 1, 40--43

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139247

[2] HILTON P.: *Zdánlivé protiklady ve vyučování matematice.* PMFA, roč. *XXI* (1976), č. 6, str. 340–450.
[3] HILTON P.: *Co je moderní matematika?* PMFA, roč. *XXII* (1977), č. 3, str. 151–164.
[4] HILTON P.: *Teaching and Research: A False Dichotomy, A Response to Morris Kline.* The Mathematical Intelligencer, vol. *1*, No 2/1978.
[5] KLINE M.: *Mathematical Thought from Ancient to Modern Time.* N. Y. Oxford University Press, 1972.
[6] KLINE M.: *Mathematics and the Physical World.* Thomas Y. Crowell Company, New York, 1956.

V. Mezinárodní matematická soutěž vysokoškoláků

Jaroslav Milota, Ivan Netuka, Praha

Pobočka Socialistického svazu mládeže Jugoslávie na přírodovědecké fakultě bělehradské univerzity spolu s touto fakultou uspořádala 1. 4. 1979 již pátý ročník mezinárodní matematické soutěže vysokoškoláků (ISTAM 1979), tentokráte v krásném prostředí přímořské Poreče. Soutěž byla organizována stejným způsobem jako v předcházejícím ročníku, o němž jsme čtenáře informovali (PMFA *24* (1979), 44–46). Účastnilo se jí 18 družstev: ČSSR (2), Holandsko (1), Jugoslávie (10), Maďarsko (2), Polsko (1), Rakousko (2). Soutěž skončila velkým úspěchem ČSSR, kterou reprezentovaly studenti matematické analýzy MFF UK.

V soutěži družstev bylo následující pořadí:
1. MFF UK Praha I (J. MALÝ, J. NAVRÁTIL, A. VENCOVSKÁ) 221 bodů
2. Univerzita Budapešť (vítěz posledních dvou ročníků) 218 bodů
3. Univerzita Ljubljana 200 bodů
⋮
7. MFF UK Praha II (J. BÁZLER, M. ČADEK, P. QUITTNER) 146 bodů

Z jednotlivců:

I. kategorie (studenti 1. a 2. ročníku):
1.–2. J. NAVRÁTIL, M. BESTVINA (Záhřeb) maximální počet bodů 100 bodů
5. P. QUITTNER 75 bodů

II. kategorie (studenti 3.–5. ročníku):
1. N. SIMANYI (Budapešť) 93 bodů
2.–3. J. MALÝ, F. FORSTNEROVIČ (Ljubljana) 90 bodů

Úspěch našich studentů vzbudil velkou pozornost a byl vysoce oceněn pořadateli a vedoucími ostatních družstev. Řada z nich se v závěru pobytu velmi zajímala o výuku na MFF UK a někteří si vyžádali i studijní materiály.

Úlohy V. ročníku ISTAM

1. kategorie (1.–2. ročník studia):

1. Nechť pro reálnou funkci $f \in C^4\langle 0, 1\rangle$ platí $|f^{(4)}| \leqq M$ a $f(0) = f(1) = f'(0) = f'(1) = 0$. Dokažte, že

$$\int_0^1 f \leqq M/720 .$$

2. Nechť $f: \langle -1, 1\rangle \to R$ je spojitá funkce, pro niž $f(0) \neq 0$. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho různých trojic navzájem různých čísel a, b, c takových, že

$$|a| \leqq 1, \quad |b| \leqq 1, \quad |c| \leqq 1$$

a

$$(a + b + c)[f(a) + f(b) + f(c)] = af(a) + bf(b) + cf(c) .$$

3. Nechť a, b jsou generátory grupy G a nechť platí

$$a^4 = b^4 = abab = e\,.$$

Dokažte, že podgrupa H generovaná prvky a^3b, ba^3 je normální podgrupa grupy G.

4. Nechť $f: (a, b) \to R$ je diferencovatelná funkce taková, že

$$\lim_{x \to a+} f(x) = +\infty\,,$$

$$\lim_{x \to b-} f(x) = -\infty$$

a

$$f'(x) + [f(x)]^2 + 1 \geqq 0\,,$$

kdykoli $x \in (a, b)$. Dokažte, že $b - a \geqq \pi$.

2. KATEGORIE (3.–5. ročník studia):

Funkcionální analýza:

1. Nechť $f_n : \langle 0, 1\rangle \to \langle 0, \infty)$ je posloupnost lebesgueovsky měřitelných funkcí takových, že pro každé $n = 1, 2, \ldots$ platí $\operatorname{ess\,sup} f_n = \infty$. Rozhodněte, zda existuje (konečná) míra μ na $\langle 0, 1\rangle$ taková, že

$$\int_0^1 f_n \,d\mu = \infty\,, \quad n = 1, 2, \ldots$$

2. Nechť X je Banachův prostor, Y je normovaný lineární prostor a $T: X \to Y$ je omezený lineární operátor. Předpokládejme, že existují reálná čísla α, β tak, že $\beta < 1$ a platí tato podmínka:

Pro každý prvek $y \in Y$, pro který $\|y\| = 1$, existuje $x \in X$ tak, že $\|x\| \leqq \alpha$ a $\|y - Tx\| \leqq \beta$.

Potom pro každé $y \in Y$ existuje $x \in X$ tak, že $y = Tx$ a $\|x\| \leqq \alpha(1 - \beta)^{-1}\,\|y\|$.

Analýza v komplexním oboru:

1. Nechť $\mathcal{U}$ je otevřená podmnožina komplexní roviny C, $A(\mathcal{U})$ je množina všech funkcí holomorfních na $\mathcal{U}$. Nechť $L : A(\mathcal{U}) \to C$ je multiplikativní lineární funkcionál na $A(\mathcal{U})$ (tj. $L(af + bg) = aL(f) + bL(g)$, $L(fg) = L(f)\,L(g)$ pro všechna $a, b \in C, f, g \in A(\mathcal{U})$). Jestliže funkcionál L není identicky roven nule, pak existuje $z_0 \in \mathcal{U}$ tak, že platí $L(f) = f(z_0)$, kdykoli $f \in A(\mathcal{U})$.

Dokažte.

2. Nechť $\mathcal{U} \subset C$ je otevřená a $C(\mathcal{U})$ je prostor všech spojitých funkcí na $\mathcal{U}$ s topologií lokálně stejnoměrné konvergence. Nechť $D \subset \mathcal{U}$ je uzavřený kruh a A je množina všech $f \in C(\mathcal{U})$, pro něž $|f| \leqq 1$ na $\mathcal{U}$, $f = 0$ na $\mathcal{U} \setminus D$.

Dokažte, že A je uzavřená a omezená podmnožina $C(\mathcal{U})$, která není kompaktní.

Diferenciální rovnice:

1. Nechť $\varphi \in C^\infty\langle -1/4, 1/4\rangle$. Rozhodněte, zda rovnice

$$y''(x) + x^2 y(x) + y'(x + 1) = 0$$

má řešení definované na R, které se shoduje s funkcí φ na $\langle -1/4, 1/4\rangle$.

2. Nechť φ a ψ jsou reálné, spojité, omezené a monotónní funkce na R. Nechť všude platí $\varphi \geqq \psi$.

Rozhodněte, zda rovnice

$$y'(x) = [y(x) - \varphi(x)]\,[y(x) - \psi(x)]$$

má řešení definované na některém intervalu nekonečné délky.

Programování:

1. Definice: Gramatika je čtveřice $G = (N, \Sigma, P, S)$, kde

(1) N je konečná množina neterminálních symbolů,

(2) Σ je konečná množina terminálních symbolů,

(3) P je konečná množina pravidel,

(4) S je počáteční neterminální symbol.

Uvažujme tuto gramatiku G_b:

N = {⟨constant⟩, ⟨integer⟩, ⟨real⟩, ⟨sign⟩, ⟨number⟩, ⟨digit⟩, ⟨basic real⟩}

Σ = {+, −, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, E, .}

P = {⟨constant⟩ ::=
= ⟨integer⟩ | ⟨real⟩
⟨integer⟩ ::=
= {⟨sign⟩}$_0^1$ ⟨number⟩
⟨sign⟩ ::= + | −
⟨number⟩ ::= {⟨digit⟩}$_1$
⟨digit⟩ ::= 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | 6 | 7 | 8 | 9
⟨real⟩ ::= ⟨basic real⟩ | | (⟨basic real⟩ | ⟨integer⟩) E⟨integer⟩
⟨basic real⟩ ::= {⟨sign⟩}$_0^1$ (⟨number⟩ . | ⟨number⟩ . . ⟨number⟩ | . ⟨number⟩)

S = ⟨constant⟩

Jazyk $L_b(G_b)$ je zřejmě množinou konstant typu REAL a INTEGER v programovacím jazyce FORTRAN.

a) Nakreslete stavový diagram (transition graph) konečného automatu akceptujícího jazyk $L_b(G_b)$.

b) Sestavte příslušnou tabulku stavových přechodů.

c) Napište program ve FORTRANu, který používá tuto tabulku k rozpoznávání, k syntaktické kontrole a k výpočtu hodnoty takových konstant.

2. Napište program, který počítá hodnotu čísla e s přesností na 100 desetinných míst.

Algebra:

1. Nechť $q \geqq 3$ je prvočíslo. Dokažte, že množina všech prvočísel p takových, že každá grupa řádu pq je cyklická, je nekonečná.

2. Nechť $(L, \leqq, ^-)$ je De Morganův svaz, tj. distributivní svaz vzhledem k $\leqq$ takový, že platí:

1° $\bar{\bar{x}} = x$ pro každé $x \in L$;
2° $x \leqq y$ implikuje $\bar{y} \leqq \bar{x}$, kdykoli $x, y \in L$;
3° $x \neq \bar{x}$ pro každé $x \in L$.

Definujme $T_0 = \{x \in L; x = x \vee \bar{x}\}$.

Dokažte:

(a) Podmínka 3° je ekvivalentní s negací výroku

$$(\exists x \in L)(\bar{x} \in T_0 \wedge (\exists x_1, \ldots, x_n \in T_0)(x = x_1 \wedge \ldots \wedge x_n)).$$

(b) Filtr $F(T_0)$ generovaný T_0 splňuje podmínku
$\neg(\exists x \in L)(x \in F(T_0) \wedge \bar{x} \in F(T_0))$.

(c) Existuje filtr F tak, že
$(\forall x \in L)(x \in F \Leftrightarrow \bar{x} \notin F)$.

Topologie:

1. Rozhodněte, zda platí: Existuje spočetný kompaktní T_1-prostor, který nemá spočetnou bázi.

2. Dokažte, že v každém spočetném kompaktním metrickém prostoru existují izolované body.

Geometrie:

1. Nechť ABC je trojúhelník v S^2 a M je jeho vnitřní bod. Je-li BC nejkratší strana trojúhelníka ABC, potom

$$MA + MB + MC < AB + AC.$$

Dokažte.

2. Nechť O_{abc} je konvexní trojhran v S^3 a nechť všechny jeho úhly jsou ostré. Nechť a', b', c' jsou pořadě kolmé průměty polopřímek a, b, c do roviny O_{bc}, O_{ca}, O_{ab}.

Dokažte, že $O_{aa'}$, $O_{bb'}$, $O_{cc'}$ jsou roviny souměrnosti úhlů trojhranu $O_{a'b'c'}$.

Pravděpodobnost:

1. Nechť $\Omega = N = \{1, 2, \ldots\}$, $\mathscr{A} = \{A; A \subset N\}, P(\{n\}) = 2^{-n}, n = 1, 2, \ldots$ Nechť $X: \Omega \to R$ je náhodná veličina s touto vlastností: pro každé $\omega \in \Omega$ je $X(\omega) \in \{1, 2, 3\}$ a platí $\omega \equiv X(\omega)$ (mod 3). Nechť Y je náhodná veličina taková, že X a Y jsou nezávislé.

Rozhodněte, zda je zobrazení $Y: \Omega \to R$ jednoznačně určeno distribuční funkcí náhodné veličiny Y.

2. Nechť X, X_n jsou náhodné veličiny definované na stejném pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathscr{F}, P)$. Nechť F je distribuční funkce náhodné veličiny X a předpokládejme, že F je absolutně spojitá.

Potom $X_n \to X$ skoro jistě, právě když pro každé reálné x platí

$$\lim_{n\to\infty} P[\bigcup_{k \geq n} ([X_k < x] \triangle [X < x]) = 0.$$

Přednášíte-li, pamatujte na to, že vy sice říkáte totéž posté, vše je vám jasné, ale to neznamená, že posluchačům je vše jasné. Každou přednášku musíte vykonat se zaujetím. Nudíte-li se při přednášce, nudí se posluchači desetkrát více.

Co je emoce, víte. Je to stav, který se musí uplatnit v celé přednášce. Abyste mi lépe rozuměli, řekl bych, že v každém díle, například v dramatu, existuje vždycky určitá emoční křivka. Víte, že se v minulosti požadovalo, aby v třetím dějství byla emoce maximální... V každé přednášce lze najít emoční křivku a svůj přednes založit na jejím sledování.

Slavný Gaspard Monge byl neobyčejně zajímavým lektorem. ... Když zestárl, přestal přednášet, ačkoliv byl zcela zdráv. Říkal: „Nemohu už tak gestikulovat jako dříve, ztratil jsem svou gestikulaci.“ (A to přednášel o plochách!) Tak ohromný význam přikládal G. Monge gestikulaci, že raději přestal přednášet.

Leonhard Euler říkával: „Když řeší úlohu někdo jiný, všechno je jasné, když řešíš sám, nic tě nenapadá.“ To vědí všichni, proto je třeba hlavní úsilí zaměřit na to, aby studenti samostatně řešili úlohy.

A. P. Minakov nikdy nezahajoval přednášku ihned, jak se říká „od dveří“. Nejprve kladl nějaké málo významné otázky, žertoval, zlepšoval náladu posluchačů, „atmosféru posluchárny“, a teprve pak pronesl první větu přednášky. Často bývala velmi nečekaná.

A. P. Minakov přikládal velký význam režii přednášky...

Jakmile jste si zhruba připravili celou přednášku [obsah, emoční křivku, náčrtky, příklady, důkazy], uvědomte si, ve které posluchárně a na jaké tabuli budete psát. První věcí je *režie rozvržení textu na tabuli.* Musíte vědět, jaké rozměry má tabule, kde začnete psát, kde začnete kreslit atd.

Druhou důležitou věcí je *režie vstupu do posluchárny*.... Doma je třeba promyslet, jak vejdete, kde se budete pohybovat, co řeknete. ... To do značné míry podbarví vaši přednášku.

Třetím závažným momentem je *režie gest.* Je třeba zavčas se zamyslet, zda lze pochopení látky napomoci gestikulací. Každou větu je třeba promyslet i z hlediska její ilustrace gesty.

Po režii gestikulace zbývá ještě řešit otázku *intonace*, která je nerozlučně spojena s výkladem. Je třeba se rozhodnout, jakou intonací budete mluvit v jednotlivých místech své přednášky, kde položíte důraz a jak. Intonace je velmi důležitá, vždyť pomocí ní můžete dopřát posluchačům i odpočinek během lekce.