

# Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

---

Matematika — jednotící prvek vědy

*Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, Vol. 34 (1989), No. 3, 129--142

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/139190>

## Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1989

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

# Matematika - jednotící prvek vědy

**Redakční poznámka:** Při příležitosti Celostátního týdne vědy uspořádalo Kolegium matematických věd Státní rady pro výzkum 12. května 1986 v Národní akademii věd (USA) sympozium. Jeho účelem bylo ukázat na souvislost matematiky s ostatními vědami. Program zahájil Phillip A. Griffiths, předseda Kolegia matematických věd. Po něm následovala vystoupení tři nositelů Nobelovy ceny: Allana M. Cormacka (Nobelova cena za medicínu 1979), Herberta A. Hauptmana (Nobelova cena za chemii 1985) a Stevena Weinberga (Nobelova cena za fyziku 1979). Každý řečník byl uveden Isadorem M. Singerem. Následující článek zachycuje sympozium včetně dotazů a odpovědí, které provázely přednášky, a je ponechán v bezprostředním stylu mluveného projevu zachovávajícím neformální a spontánní charakter.

**Děkan Griffiths:** Jsem rád, že vás všechny mohu přivítat na sympoziu „Matematika — jednotící prvek vědy“ a děkuji vám, že jste přijeli, mnozí z velké dálky.

Jmenuji se Phillip Griffiths, jsem matematik, předseda Kolegia matematických věd a také děkan na Duke University. Především bych chtěl upozornit na jev, který jsem shledal velmi nápadným v uplynulém jeden a půl roce, kdy jsem byl děkanem a který není bez zajímavosti pro toto sympozium. Byl jsem šokován všudypřítomností matematiky na univerzitě. Je tomu tak na Duke University a myslím, že je to stejné i jinde. Je samozřejmé, že se dá očekávat zájem o matematiku na katedře počítačů a ve fyzikálních a inženýrských oborech, které se dají považovat za tradiční oblasti jejího uplatnění. Setkáte se s ní ale i v biologických vědách — ve vývojové biologii, v biomechanice, v populační biologii, ve společenských vědách — matematické ekonomii, ekonometrii a demografii a kvantitativně orientované odborníky naleznete i v politických vědách a sociologii, v praktické politice, ve všech těchto oblastech. Dokonce i na naší ekonomické škole je velká skupina lidí zabývajících se výzkumem rozhodování, který v podstatě modeluje způsob rozhodování v neúplně určených podmínkách užitím bayesovské statistiky. Při studiích životního prostředí se vytvářejí modely vodních a jiných zdrojů a v lékařském centru je velká skupina lidí zabývajících se aplikacemi matematiky v různých oblastech, matematickým modelováním různých fyziologických procesů a podobnými záležitostmi.

Domnívám se tedy, že právě z univerzitní perspektivy lze dobře vidět matematiku jako sjednocující prvek. Toto téma bude důkladně probráno na dnešním sympoziu a já bych rád bez dalších okolků představil profesora Isadora M. Singera, profesora matematiky na MIT, který bude řídit diskusi.

---

*Mathematics: The Unifying Thread in Science.* Notices of the AMS, Vol. 33, No. 5, pp. 716—733.  
Copyright © 1986 by National Research Council, 2101 Constitution Avenue, Washington, D. C. 20418.

Přeložil LADISLAV HLAVATÝ.

**Profesor Singer:** Vítám vás. Předpokládám, že jako předsedající diskusi mám za úkol vás na začátku trochu rozehrát, a proto vám povím vtip či přesněji hádanku. Chlapík vyskočí padákem z letadla, přistane na stromě a ptá se muže, který jde okolo: „Řekněte mi, kamaráde, kde to jsem.“ Ten k němu vzhledne a odpoví: „Jste na dubu a pohupujete se na padáku tři a půl metru nad zemí.“ Hádanka zní, kdo je onen „kamarád“. Odpověď je, že je to matematik, a to ze tří důvodů. Jeho odpověď je za prvé stručná, za druhé přesná a za třetí zcela irelevantní.

Trochu se mi ulevilo, že jste se tomu vtipu zasmáli, ale zároveň mne to deprimuje, neboť je to problém, kterému musí matematika čelit. Zdá se totiž, že převládá mínění, že matematika není k ničemu. Účelem tohoto sympozia je ukázat, že ve skutečnosti je tomu naopak.

Byl jsem na obědě s našimi přednášejícími a mohu vám proto slíbit duchovní hody. Bude to velmi vzrušující. Každý student matematiky se při studiu klasické analýzy dříve či později setká s překrásnou teorií Radonovy transformace. Nikdy jsme netušili, jak důležité budou její aplikace. Tušil to jen doktor Allan Cormack a lidstvo mu za to bude navěky vděčné. Je profesorem na Tufts University a nositelem Nobelovy ceny za medicínu a fyziologii v roce 1979 a vysvětlí nám užití Radonovy transformace v tomografii a její varianty v plánování radioterapie.

**Profesor Cormack:** Pane profesore, dámy a pánové, především bych chtěl říci, že nejsem matematik, matematiku jsem nestudoval, ale mám ji rád a jsem tu, abych jí nabídl své služby, pokud to dokážu.

To, o čem dnes hodlám mluvit, není žádná vysoká matematika. Je to oblast skutečně klasické analýzy stará aspoň osmdesát let a chtěl bych vám předvést, jak často se některé myšlenky v matematice, fyzice i ostatních vědách objevují, upadají v zapomnění a opět vyplouvají na povrch. Myslím, že mé téma je pěknou ilustrací této skutečnosti a ukazuje, jak i starý klasický problém může stále mít důležité neřešené detaily. Svě vystoupení chci zakončit problémem určeným profesoru Singerovi a jeho kolegům matematikům, zejména těm, kteří se zabývají analýzou.

Napřed bych měl lépe vysvětlit, co nazývám Radonovým problémem. Předpokládejme, že máte oblast roviny a v ní definovanou proměnnou veličinu  $F$ , což může být hustota, absorpční koeficient, statistické rozdělení nebo cokoli jiného, a dejme tomu, že si namalujete přímku  $L$  procházející touto oblastí. Nyní označme  $\hat{F}$  střední hodnotu  $F$  na této přímce  $L$ , což znamená, že prostě změříme  $F$  v různých jejích bodech a určíme průměr. Udělejme to pro několik přímek, může jich být více nebo méně. Otázka je: Známe-li  $\hat{F}$  pro mnoho různých přímek  $L$ , můžeme z toho odvodit proměnnou veličinu  $F$ ? To je Radonův problém.

Řečeno poněkud matematictější formulací: nechť přímkou  $L$  je určena polárními souřadnicemi  $p$  a  $\phi$  toho svého bodu, který je nejbližší počátku, a nechť známe integrál veličiny  $F$  podél každé takové přímky (což je něco jako střední hodnota  $F$ ). Takto se obdrží funkce dvou proměnných  $p$  a  $\phi$ . Ptáme se, zdali odtud můžeme nalézt původní funkci  $F$  vyjádřenou v polárních souřadnicích  $r$  a  $\theta$ ? Odpověď je kladná a dokonce je několik způsobů, jak to udělat, já se však nebudu pouštět do podrobností.

Předmětem dalšího výkladu je přehled různých aplikací řešení Radonova problému.

Jediné aplikace, které si dosud získaly pozornost veřejnosti spadají do lékařství. Týkají se počítačové axiální tomografie, pozitron-elektronové tomografie (PET) a v poslední době i snímkování pomocí jaderné magnetické rezonance (NMR scanning). Na těchto příkladech vám ukážu, kde se objeví zmíněné přímky, jak je lze využít k řešení některých problémů. Pak přejdu k některým nelékařským aplikacím a k dalším zobecněním Radonova problému.

Snímkování pomocí počítačové axiální tomografie, PET a jaderné magnetické rezonance jsou samozřejmě velmi drahé lékařské metody a myslím, že vás pobavím, když se zmíním o malém tomografu, který jsem používal v roce 1963. Stál sto dolarů, což i v té době bylo málo peněz. Měl dva kolimátory pro vytvoření úzkého paprsku rentgenového záření. Udělal jsem si model hlavy a umisťoval kolimátory tak, aby paprsky přicházely z různých směrů. V každém z nich můžete měřit průměrnou absorpci a z toho rekonstruovat model hlavy. V roce 1963 jsem potřeboval dva dny na získání 256 údajů, které jsem potřeboval k rekonstrukci, zatímco moderní a mnohem dražší zařízení zpracuje asi milión údajů za 5 sekund a poskytne vám samozřejmě mnohem lepší a velmi kvalitní snímek.

Nyní bych vám chtěl říci něco o nález, který je v antropologii znám pod názvem slečna Pless. Žila asi před 2,9 milióny let a je to naše praprababička či prapatetička či něco takového. Antropologové stále revidují naše pokrevní předky, takže si nejsem zcela jist, kam přesně patří. Nicméně, důležité na ní a ostatních nálezech jako Australopitěkovi či Afrikánovi je, že můžete udělat jejich podrobný tomografový snímek. Okouzluje mne, že v dnešní době můžeme podrobně zkoumat anatomii tři milióny let starých vykopávek. Tomografový snímek ucha slečny Pless ukázal vertikální orientaci ušních polokruhových kanálek a tato informace potvrdila to, co bylo určeno jinými metodami, totiž, že toto stvoření se pohybovalo vzpřímeně.

Absorpce rentgenového záření je známa od minulého století a ve dvou či třech aplikacích, o kterých budu mluvit později, postoupíme od roku 1890, kdy bylo záření objeveno, do roku 1930, kdy byly objeveny pozitrony. Lze vytvořit radioizotopy produkující pozitrony, které při anihilaci s elektrony vyzařují fotony rozlétaající se v opačných směrech. Pokud elektrony a pozitrony anihilují v klidu, je jejich hybnost nulová a základní fyzikální zákony zachování nám říkají, že celková hybnost musí zůstat nulová. Proto musí vylétávat dva fotony, nikoli pouze jeden a ty musí mít stejné, avšak opačně orientované hybnosti. Vylétají proto přesně v opačných směrech. To je základem pozitron-elektronové tomografie. Vylétající fotony určují přímku a vhodným zařízením, které nebude popisovat, se dá zjistit, jak je látka vyzařující pozitrony rozložena v nějakém objektu. Příslušný výpočet je opět založen na Radonově transformaci.

Dříve než řeknu více o PET, chci poznamenat, že elektrony látky, do které byl radioizotop vpraven, mají obecně nějakou hybnost právě tak jako pozitrony, takže proces anihilace nezačíná úplně v klidu. Znamená to, že fotony nevylétávají v přesně opačných směrech, ale malý úhel  $\theta$  mezi jejich drahami vypovídá o hybnosti systému. Jde o velmi malý úhel, který z hlediska PET scanningu může být zcela zanedbán, ale z hlediska dalších aplikací, o kterých se zmíním, je nenulovost tohoto úhlu klíčovým faktem. Z něho lze odvodit něco o hybnosti elektronu látky, ve které probíhá anihilace.

Jednou z prvních aplikací této metody je sledování absorpce glukózy v lidském těle.

Při tomto vyšetření pacient dostává glukózu obsahující fluór 19, který vyzářuje pozitrony a soubor fotodetektorů pak zachycuje vyzářené fotony. Z toho pak lze odvodit rozdělení úrovní metabolické činnosti v těle pacienta a série takových snímků ukazuje, jak se tato činnost mění s časem. Je to velmi mocná metoda, neboť spoustu látek lze sloučit s izotopy, které vyzářují pozitrony. Už jen samotný uhlík nám dává široké spektrum sloučenin, s kterými můžeme pracovat, takže obrovské množství fyziologických výzkumů lze provádět pomocí PET scanningu. Jsou zde však i omezení. První záležitostí v množství radioaktivního izotopu, které lze vpravit do těla pacienta, což omezuje rozsah statistických souborů dat, a proto nemůžete nikdy získat taková rozlišení jako při počítačové tomografii. Na druhé straně při použití řekněme zhruba desetitisíců detektorů by to byl účinný výzkumný prostředek, nicméně se domnívám, že PET se nikdy nestane takovým diagnostickým prostředkem, jakým se staly tomografie a snímkování pomocí jaderné magnetické rezonance (NMR scanning).

NMR scanning je poměrně nová technika. Když jsem studoval a začínal svoji vědeckou práci, byla magnetická rezonance zcela nový obor. Pro její studium bylo zapotřebí velmi homogenních magnetických polí, a proto úsilí konstruktérů bylo zaměřeno na získání takových velmi homogenních polí. Až v roce 1972 Paul Lauterbur navrhl: „Přidejme k tomuto magnetickému poli nějaký gradient, který nám vymezí rovinu.“ Přidáním dvou takových gradientů, které se protínají, dostaneme přímkou a podél ní lze izolovat příslušný signál NMR. Řešením Radonova problému opět získáme žádaný snímek. Lékař pak může využít snímky několika rovinných řezů pacientova těla. Fyzikální podstata pro nás opět není důležitá a já se nyní budu věnovat nelékařským aplikacím.

Skupina oceánografů z Woods Hole v MIT, ze Scripps Institute a ze dvou nebo tří dalších míst použila v podstatě tomografických prostředků k stanovení teplot oceánu. Tradiční metoda určování teplot v oblasti, řekněme, 300 čtverečních kilometrů je hodit teploměr přes palubu lodi a jezdit tam a zpět přes zkoumanou oblast. Když se dostanete na jeden konec, rádi byste věděli, zda se něco změnilo na druhém konci, a někdy tomu tak opravdu je. Postup použitý zmíněnou skupinou porovnává údaje získané tradičními metodami s údaji naměřenými tomografickou metodou. Ta spočívá v tom, že máte zdroj a detektor a měříte čas, který potřebuje proudový impuls k překonání vzdálenosti mezi nimi. To, co tedy měříte v měnícím se prostředí, je integrál neboli střední hodnota převrácených hodnot rychlosti a provedete-li to pro více zdrojů a detektorů dostáváte různé přímkou. Opět jste u Radonova problému, můžete určit rozložení rychlosti a z rychlosti odvodit teplotu. Kdybyste chtěli získat stejný obraz za stejnou dobu tradiční metodou, potřebovali byste patrně loď s rychlostí 2700 uzlů. Takže nová metoda je značně výhodnější a navíc dává větší záruku, že se nic nezměnilo během měření.

Asi v r. 1956, právě v době, kdy jsem začínal v Jižní Africe přemýšlet o počítačové tomografii, vypracoval australský astronom Ron Bracewell obraz rozdělení jasnosti Měsíce. Uvědomte si, že nešlo o moderní astronomii s obrovskými anténami a podobnými věcmi. Měli pouze sérii radarových parabol, které mohli namířit vzhůru a zaměřit tak, že napodobili cylindrickou čočku. Tak dostanete velmi dobré rozlišení v jednom směru, ale velmi špatné v ostatních. Ve skutečnosti vlastně dostanete jen průměr přes všechny ostatní směry. Aplikací Radonovy transformace na tento případ můžete jako Bracewell určit rozdělení jasnosti měsíce.

Historie Radonova problému sahá dál než do roku 1905; nejsem si však zcela jist, jak daleko. Pro mne má v každém případě příchut problémů 19. století. Myslel jsem, že ho někdy ve slabé chvílce vysypal z rukávu Cauchy, Riemann nebo někdo takový, ale první reference, kterou jsem zjistil, je datována rokem 1905 a zmiňuje se o dřívější práci H. A. Lorentze, který z neznámých důvodů přemýšlel o tomto problému ve třech rozměrech, kde nás zajímají průměry ne přes přímky v rovině, ale přes plochy v třírozměrné oblasti. Integruje se čili průměruje přes různé řezy této oblasti. Otázka je: Jsou-li známy tyto průměry, můžeme najít původní veličinu? Zajisté, zní odpověď a ve skutečnosti je to mnohem snadnější ve třech rozměrech než ve dvou. Dá se to samozřejmě zobecnit na libovolný počet dimenzí, avšak pro lichý počet dimenzí je to velmi prosté, kdežto pro sudý složitější. Ne příliš složité, ale složitější. To vše vymyslel Lorentz, ale nikdy to nepublikoval a víme o tom pouze z článku jednoho jeho studenta z roku 1905, který mluví o tom, že tento problém byl vyřešen Lorentzem a udává řešení. Práce se týká šíření světla v krystalech a pravděpodobně má něco společného s parciálními diferenciálními rovnicemi – oblastí, ve které Radonova transformace našla pravděpodobně lepší uplatnění než v ostatních oblastech matematiky.

Mohl bych uvést dlouhý seznam případů, kde se od té doby Radonův problém objevil. Zmíním se pouze o několika nejpěknějších. Radonův problém byl znovu objeven a zobecněn na libovolnou dimenzi Georgem Uhlenbeckem v r. 1925. Jeho článek je otištěn v tom čísle časopisu *Physica*, ve kterém je slavný Uhlenbeckův a Goldschmidtův článek o spinu elektronu. Ani Uhlenbeck nepíše, proč se tím zabýval, avšak říká, že mu tento problém zadal Paul Ehrenfest, a proto se domnívám, že když vám v té době v Holandsku školitel zadal nějaký problém, tak jste šel a vyřešil ho. Byl první, kdo objevil fourierovský přístup – dosti zřejmý způsob, jak na problém pohlížet. V r. 1936 byl Radonův problém znovu objeven ve Stockholmu jako statistický problém, ve kterém funkce  $F$ , o které jsem hovořil, byla statistickou distribucí. Ve statistice je Radonův problém znám jako Cramerova-Woldova věta. Zdá se, že statistici mají pro známé věci vždy jiná jména než my ostatní, ale je to jejich právo.

V blízkosti Slunce je mnoho hvězd a zajímavý problém je určení jejich rychlostního rozdělení. Je v tom jeden háček. Je velmi snadné měřit jejich radiální rychlosti, neboť ty mohou být určeny z Dopplerova posuvu spektra. Obtížné je určit to, co astronomové nazývají vlastní pohyb, což je rychlost hvězd kolmá ke směru našeho pohledu a je měřitelná jen pro několik málo blízkých a rychle se pohybujících hvězd. Problém teď je, jak určit rozdělení rychlostí hvězd z pouhé znalosti jejich radiálních složek. Tento problém byl formulován Eddingtonem v r. 1936. Vyřešil jej arménský astronom Ambarcumjan ve stejném roce a řešení se opírá o Radonovu transformaci v třírozměrném prostoru rychlostí. Znázornil rozdělení rychlostí asi pěti set hvězd a jeho práce popírá tvrzení, že nelze dělat počítačovou tomografii bez počítačů. Ambarcumjan popisuje, jak lze užít klasické metody numerické integrace malováním sinusovek na milimetrový papír a počítání hvězd v jednotlivých oblastech atd. Bylo to první skutečné použití Radonovy transformace na experimentální data, kterou znám.

Poslední aplikací, kterou chci připomenout, se vracím k tomu, co jsem říkal o pozitronové anihilaci a o tom, že ve skutečnosti je mezi drahami fotonů malý úhel určený rozdělením hybností pozitronů a elektronů. Rozdělení hybností elektronů v pevných látkách

je předmětem velkého zájmu fyziků zabývajících se pevnými látkami i ostatních. Existuje především tzv. Fermiho plocha v prostoru hybností elektronu. Tato plocha se dříve určovala z výpočtu pásové struktury, ale studiem malých úhlů, o kterých jsem mluvil, je možno určit Fermiho plochu přímo. Fyzikové z ženevské skupiny i jinde se nyní aktivně zabývají touto oblastí výzkumu.

Stručně jsem shrnul Radonův problém a další část svého vystoupení bych chtěl věnovat některým jeho zobecněním. Myšlenka, která mne napadla kdysi dávno v r. 1956 nebo 1957, když jsem o tom poprvé začal přemýšlet, byla: „Když se to dá udělat pro přímky, nešlo by to udělat pro jiné křivky? A jak takovou křivku zadat?“ Předpokládejme, že máme kružnici procházející počátkem souřadnic a určenou polárními souřadnicemi toho bodu kružnice, který je středově souměrný s počátkem. Je možné pro ni řešit Radonův problém? Provedl jsem stejný postup jako pro přímky a s překvapením jsem zjistil, že řešení jsou pozoruhodně podobná.

O mnoho později, koncem 70. let, jsem zjistil, že Radonův problém pro kružnice je úzce spojen s problémem pro přímky způsobem, který jsem si dříve neuvědomoval. Příslušná transformace se ve skutečnosti nazývá sdružená s obyčejnou Radonovou transformací. Kromě toho, že jsem publikoval formální řešení, což byl vedlejší výsledek, jsem se tím dál nezabýval. Až v nedávné době mne napadlo, proč se omezovat jen na kružnice a přímky? Určitě musí existovat jiné podobné křivky. A nedávno jsem zjistil, že ve skutečnosti existuje celý soubor takovýchto křivek. Přímkový problém lze zobecnit změnami jistého parametru  $\alpha$  většího než nula a menšího než nekonečno, avšak jinak libovolného. Pro  $\alpha = 2$ , dostanete pravoúhlou hyperbolu a pro  $\alpha = 1/2$ , dostanete parabolu. Pro  $\alpha < 1/2$  se křivky začnou jednou a vícekrát protínat, ale důležité je, že nakonec jdou do nekonečna. Ve zobecnění případu kružnic se mění jiný parametr  $\beta$ , který dává tzv.  $\beta$ -křivky, jak je nazývám, a dochází k obdobným jevům. Všechny procházejí počátkem.  $\beta = 1$ , odpovídá kružnici,  $\beta = 2$  dává myslím Bernoulliho lemniskátu,  $\beta = 1/2$  je kardioida atd. Zabýval jsem se tím v eukleidovském prostoru a skuteční matematici zobecnili celý problém na mnohem komplikovanější prostory, o kterých vím velmi málo. Nerozumím jejich článkům, nicméně vím, že dospěli k některým zajímavým výsledkům.

Problém kružnic, o kterém jsem se zmínil, se nedávno objevil ve zcela jiné souvislosti, o které jsem nepřemýšlel, i když při troše štěstí mne mohly napadnout už v roce 1956. Týká se léčení rentgenovými paprsky, které je v dnešní době nejužívanějším typem radioterapie. Použití těžkých iontů je sice lepší, ale málokterí pacienti se dostanou k zařízením, která je používají. Znamená to, že většina lidí, kteří jsou léčeni radioterapií, je léčena rentgenovými paprsky a otázka je, jak správně dávkovat toto záření. Dejte tomu, že jste lékař a potřebujete ozářit nádor v těle pacienta, který je v blízkosti plic a páteře. Plice a páteř tímto zářením velmi trpí, takže při každém plánovaném zákroku by se lékař měl snažit omezit dávky do těchto částí na minimum a přitom ozářit nádor tak silně, jak si přeje. Problémem je, jak ozářit silnou dávkou nádor a ušetřit plíce a páteř? Znázorníte-li ideální rozdělení, dostanete plnou dávku v oblasti nádoru a nulu všude jinde. Rentgenové záření má však dosti neostré rozdělení, které bude zasahovati mimo nádor. Ozáříte-li silně nádor, zasáhnete i okolí. To značně omezuje vaše možnosti zákroku.

Nyní předpokládejme, že použijete tzv. rotační terapii. Pro ni se používá zdroj rentgenových paprsků v jednom směru s proměnnou intenzitou, kterou upravujete rozmístěním olověných stinidel atd. Abyste ozářili určitý bod  $P$ , otáčíte rentgenovou lampou kolem pacienta. Berete ovšem v úvahu jen ty paprsky nebo přímky, které procházejí bodem  $P$ , a ty budou všechny na kružnici procházející bodem  $P$ .\*) Takto se dostávají kružnice do našich úvah.

Nechť  $G$  je funkce popisující pole záření. Dávka tohoto záření je integrál  $\hat{F}$  z  $G$  přes zmíněnou kružnici. Specifický Radonův problém, který se zde objevuje, záleží v tom, jak přejít od žádoucího rozdělení  $\hat{F}$  k radiačnímu poli  $G$ , které může radioterapeut regulovat. V jistém přiblížení, které jsem výpracoval již před delší dobou, lze tento problém řešit. Zadáte-li libovolné rozdělení dávky záření, pak můžete skutečně spočítat funkci  $G$ . Je tu však jeden velký problém.

Obecně vzato, zvolíte-li libovolně  $\hat{F}$ , pak pro takové rozdělení dávek dostanete i záporné hodnoty  $G$  a jak každý, kdo pracuje ve vědě ví, ve zlomyslné přírodě nic takového jako záporná intenzita záření neexistuje. Kdyby tomu tak bylo, život by byl mnohem snazší. Je zde tedy čistě matematický problém z analýzy: Jak získat užitečnou charakterizaci rozdělení  $\hat{F}$ , tzn. rozdělení ozáření, které zaručuje, že  $G$  je nezáporné. Pokud vím, odpověď není známa. Máme zde tedy starý problém klasické analýzy čekající na vyřešení a je to problém, jehož řešení potřebujeme právě v současné době.

Zemřelý profesor George Birkhoff uveřejnil v r. 1940 kresbu z přímek v článku nazvaném *O konstrukcích vytvořených z přímek*. Kresba ukazuje, jaké složité věci můžete vytvořit a co je problém rentgenologie. Každou přímku můžete považovat za tenký rentgenový paprsek produkující dávku ozáření. V místě, kde se sčítají, je ozáření velmi silné. Objevil jsem tento článek asi před rokem. Birkhoff říká: „Můžete samozřejmě vytvořit libovolně složitý obrázek.“ Ponechává si ale možnost, kterou má každý umělec, totiž vymazávání, což je však totéž jako připustit záporné intenzity záření. Je to hezký příklad oblasti matematiky, která byla v jisté době objevena v nějakém kontextu, pak zapomenuta a nyní, o čtyřicet let později, se vynořila v kontextu úplně jiném.

Děkuji vám za pozornost.

**Profesor Singer:** Děkuji vám za velmi krásnou a pro matematiky inspirující přednášku.

Dr. Herbert Hauptman získal doktorát z matematiky na univerzitě státu Maryland po prodloužené vojenské službě učitele u letectva a pak v Námořní výzkumné laboratoři (Naval Research Laboratory). On a Jerome Karle získali Nobelovu cenu za chemii v r. 1985 za společnou práci v rentgenové krystalografii. Tato práce byla vykonána v padesátých letech a použití počítačů ji učinilo nejefektivnější přímou metodou pro rychlé určování třírozměrných modelů molekul.

Dr. Hauptman je profesorem biofyzikálních věd na univerzitě státu New York v Buffalu a předsedou a vědeckým ředitelem Lékařské nadace v Buffalu. Popíše nám svoji přímou metodu a její četné aplikace v chemii, lékařství a biologii. Pane doktore, prosím.

\*) Přes dobrou snahu překladatele i redakce zůstává smysl tohoto místa textu nejasný.



**Dr. Hauptmann:** Kráčím ve šlépějích profesora Cormacka a myslím, že bude vhodné na začátku říci, že mé veškeré chemické vzdělání spočívá v jediném kursu základů chemie absolvovaného před padesáti lety. Znamená to především, že nejsem chemik. Nejsem si ani jist, že jsem matematik, ale veškeré mé vzdělání je matematické včetně doktorátu.

Před zhruba 2400 lety řecký filozof Demokritos předpověděl existenci molekul jako nejmenších částíček hmoty. Uhodl rovněž, že molekuly samotné se skládají z ještě menších částí nazývaných atomy, jejichž povaha a uspořádání určuje fyzikální a chemické vlastnosti látek. Dodejme, že to byl pozoruhodný odhad. Pokud mohu posoudit nebylo pro něj žádné odůvodnění, které bychom shledali dnes přijatelným, takže si myslím, že měl prostě štěstí a škoda, že se to nestává všem filozofům.

Ještě v úvodu bych rád řekl, že Demokritova hypotéza byla potvrzena až v tomto století, a to pomocí rentgenové krystalografie neboli ohybu rentgenových paprsků krystaly.

Molekulární struktura může být jednoduše definována jako geometrické uspořádání atomů a určením souřadnic atomů v molekule vzhledem k libovolnému souřadnému systému; tím máme problém určení molekulární struktury vyřešen. Krystaly mají obvykle dobře určené povrchové plochy, které jsou makroskopickým projevem vnitřního uspořádání. Běžná velikost krystalů vhodných pro rentgenovou difrakci je několik desetin milimetru.

Pokusím se velmi stručně vysvětlit, jak se krystal matematicky popisuje. Jsem tady koneckonců k vůli tomu, abych mluvil o použití matematiky při vývoji metod užívaných pro rutinní způsob určování molekulárních struktur, a je tedy především nutné říci matematickým jazykem, co nazýváme krystalem. Nejsnazší bude začít se dvěma rozměry, abychom se nemuseli zabývat hned třemi, které nás ve skutečnosti zajímají. Popíšu tedy, jak lze rovinu pokrýt kongruentními rovnoběžníky. Je to velmi prostá konstrukce. Máme dvě množiny rovnoběžných čar a v každé z nich jsou vzdálenosti mezi čarami stejné. Tyto čáry rozkládají celou rovinu do množiny kongruentních rovnoběžníků majících tu vlastnost, že mezi nimi není žádné místo, takže tímto způsobem je pokryta celá rovina.

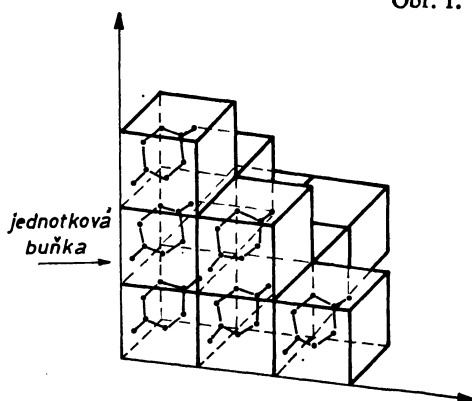
Abychom došli k definici dvourozměrného krystalu, představme si, že do každého rovnoběžníku umístíme několik bodů a spojíme je úsečkami tak, že tvoří mnohoúhelník. Tyto body jsou umístěny naprosto stejným způsobem ve všech rovnoběžnicích, takže všechny rovnoběžníky i v nich obsažené obrazce jsou přesně stejné. Považujeme-li nyní zvolené body za polohy středů atomů, pak tímto způsobem definujeme nejen dvourozměrný periodický soubor bodů, ale i něco, co nazýváme funkce elektronové hustoty. Tato funkce je ve dvourozměrném případě funkcí polohy, která nám v každém bodě dává počet elektronů na jednotku plochy. Je zřejmé, že je funkcí s dvojitou periodou. Opakuje se a její dvě periody odpovídají dvěma rozměrům rovnoběžníku.

Nyní patrně můžeme přejít k opravdovým krystalům, které jsou třírozměrným analogem toho, co jsem právě popsal. Místo dláždění roviny kongruentními rovnoběžníky budeme vyplňovat prostor kongruentními rovnoběžnostěny. Musíme si představit, že obecně každá tzv. „jednotková buňka“ nebo základní jednotka krystalu je rovnoběžnostěn. Opět umístíme do každého rovnoběžnostěnu množinu bodů a spojíme je úsečkami tak, jak je ukázáno na obr. 1.

Představujeme-li si opět, že každý bod je atom, pak okolí každého atomu je opět

vyplněno elektrony určujícími funkci elektronové hustoty. Ze způsobu konstrukce vyplývá, že tato funkce elektronové hustoty, kterou budeme značit  $\rho(\mathbf{r})$  (je totiž pouze funkcí polohy), je trojně periodická. Kromě toho je třeba objasnit souvislost krystalu, o kterém jsem právě mluvil, s rentgenovou difrakcí. Dopadá-li proud rentgenových paprsků na krystal, je rozptylován do mnoha směrů. Tento jev, který se nazývá ohyb neboli rozptyl rentgenových paprsků na krystalu, byl objeven dvěma německými fyziky okolo r. 1912. Von Laue, jakož i otec a syn Braggové vystihli, že intenzity paprsků a směry, do kterých jsou rozptýleny, závisejí na molekulární struktuře rozptylujících krystalů. Umístíme-li fotografickou desku tak, že na ni dopadají rozptýlené paprsky, je její zčernání závislé na jejich intenzitě. Rozptýlených paprsků mohou být tisíce. V oněch dávných dobách bylo dokázáno nejen to, že intenzity a směry rozptýlených paprsků jsou krystalem nebo molekulovou strukturou určeny jednoznačně, ale že molekulární strukturou jsou určeny i fáze těchto paprsků.

Obr. 1.



Co jsou to fáze? Předpokládám, že všichni z vás chápou, že rentgenové paprsky, podobně jako obyčejné viditelné záření, je vlnění a vlny, jak všichni víme, mají vedle intenzity a amplitudy také fázi. Grafy sinusových vln mohou mít stejnou frekvenci a amplitudu a lišit se fází, což znamená, že procházejí nulou v různých bodech, a to různých bodech v čase i v prostoru. Vzájemný rozdíl, měřený např. ve stupních, je fázový rozdíl těchto dvou vln. Brzy po objevení ohybu rentgenových paprsků krystaly se přišlo na to, že veškerá podstata tzv. difrakčních obrazců (což je řečneme rozložení rozptýlených paprsků a souhrn jejich relativních intenzit a relativních fází) je jednoznačně určena molekulární strukturou. Brzy bylo též jasné, že platí i obrácené tvrzení, které je bezprostředním důsledkem třírozměrné periodičnosti funkce hustoty.

Ještě jednou bych chtěl připomenout, že z matematického hlediska krystal není nic jiného než funkce polohy periodická ve třech směrech. Považuji za důležité zde to zdůraznit, neboť účelem tohoto setkání je ukázat, co může matematika říci o fyzikálních vědách. Je jasné, že jak už bylo řečeno, matematika je jazykem vědy a samozřejmě nejprostší a nejelegantnější způsob, jak popsat třírozměrnou periodičnost funkce elektronové hustoty, je rozvinout ji do fourierovské řady.

Každá periodická funkce může být reprezentována fourierovskou řadou. Trojně periodická funkce hustoty  $\varrho(\mathbf{r})$  je reprezentovatelná třírozměrnou neboli trojnou Fourierovou řadou

$$\varrho(\mathbf{r}) = V^{-1} \sum_{\mathbf{H}} F_{\mathbf{H}} \exp(-2\pi i \mathbf{H} \cdot \mathbf{r}),$$

kde  $\mathbf{r}$  je vektor polohy,  $V$  je objem jednotkové buňky krystalu a komponenty vektoru  $\mathbf{H}$  probíhají celá čísla. Vektory  $\mathbf{H}$  se nazývají vektory reciproké mřížky a označují různé rozptýlené paprsky.

Koeficienty  $F_{\mathbf{H}}$  této řady (strukturní faktory) jsou komplexní čísla a jak brzy uvidíme, mohou být určeny pomocí  $\varrho(\mathbf{r})$ . Velikosti těchto strukturních faktorů lze dostat přímo z měřených intenzit, takže v celém dalším výkladu mohou být pokládány za známé veličiny. Máme tedy rovnici s mnoha proměnnými, ale jediné neznámé jsou tzv. fáze  $\phi_{\mathbf{H}}$  strukturních faktorů definované formulí

$$F_{\mathbf{H}} = |F_{\mathbf{H}}| \exp(i\phi_{\mathbf{H}}).$$

Tyto fáze nelze měřit, jsou nám nedostupné. Pro určení struktury krystalu z rozptylového experimentu jsou však nutné. Ukazuje se, že intenzity rozptýlených paprsků v difrakčních experimentech měřit lze. Jsou prostě úměrné zčernání fotografické desky, jak jsem se zmínil před chvílí. Intenzity tedy měřit lze, fáze však nikoli. Ztrácíme tedy polovinu informací potřebných k odvození krystalové struktury z difrakčního experimentu.

Za starých časů, což je tak asi před rokem 1950, krystalografové argumentovali tímto způsobem: Vzhledem k tomu, že fáze nelze v difrakčním experimentu určit, můžeme je zvolit libovolně a dostat tak téměř libovolnou funkci hustoty, která by odpovídala naměřeným intenzitám. Proto tvrdili, že difrakční experiment z principiálních důvodů nemůže určit krystalovou a molekulární strukturu.

Jejich argument je však klamný, i když dříve, tj. před rokem 1950, mu všichni věřili. Háček je v tom, že zvolíme-li fáze libovolně, dostaneme obecně funkci hustoty  $\varrho(\mathbf{r})$ , která neodpovídá tomu, co o ní víme. Např. tomu, že  $\varrho(\mathbf{r})$  musí být všude nezáporná. Konec konců jde o hustotu a to je počet elektronů v jednotkovém objemu. Vezmeme-li libovolné fáze, obvykle dostaneme funkci, která je někde záporná. Znamená to tedy, že fáze nelze vybrat libovolně!

Ukazuje se, že požadavek nezápornosti silně omezuje možné hodnoty fází, avšak nestačí k jejich jednoznačnému určení.

Je třeba mnohem silnější podmínky a taková zde opravdu je, neboť víme, že atomy v molekule lze považovat přibližně za body. V oblastech bezprostředního okolí středů atomů nabývá  $\varrho(\mathbf{r})$  dosti velkých pozitivních hodnot, ale v prostoru mezi nimi hustota silně klesá. Použijeme-li tedy podmínku atomičnosti, tj. oddělenosti atomů v molekule, dostaneme velmi silná omezení tím spíše, že dokonce známe i počet atomů v molekule. Ukazuje se, že s využitím těchto předběžných strukturálních znalostí jsou ve skutečnosti fáze určeny pozorovanými absolutními hodnotami. Tedy krystalové a molekulové struktury jsou jednoznačně určeny pozorovanými veličinami, tj. samotnými intenzitami, a to navzdory tomu, že není k dispozici to, co se zprvu zdá být potřebné — neměřitelné

fáze. K výpočtu Fourierových koeficientů – strukturních faktorů – pomocí  $\varrho(\mathbf{r})$  potřebujeme integrál

$$F_H = \int_V \varrho(\mathbf{r}) \exp(2\pi i \mathbf{H} \cdot \mathbf{r}) dV,$$

což není jednoduchý, ale trojný integrál, neboť pracujeme ve třech rozměrech. Integraci provádíme přes objem základního rovnoběžnostěnu a odtud dostáváme výslednou rovnici, která udává vztah mezi strukturními faktory, jejichž velikosti odpovídají měřitelným intenzitám  $\varrho(\mathbf{r})$  v difrakčním experimentu.

Přejdeme-li do extrému a nahradíme skutečný krystal ideálním, ve kterém atomy považujeme za bodové, přejde tento integrál na součet přes  $N$  atomů v jednotkové buňce krystalu. Dostaneme

$$(*) \quad E_H = \sigma_2^{-1/2} \sum_{j=1}^N Z_j \exp(2\pi i \mathbf{H} \cdot \mathbf{r}_j),$$

kde  $Z_j$  je atomové číslo  $j$ -tého atomu,  $\mathbf{r}_j$  je jeho polohový vektor a  $\sigma_2$  je škálovací konstanta, která nás nemusí zajímat. Strukturní faktor je nyní nahrazen normalizovaným strukturním faktorem  $E_H$ , což je rovněž komplexní číslo. Rovnice určující fáze má nyní tvar

$$E_H = |E_H| \exp(i\phi_H).$$

Chtěl bych pohovořit o rovnici (\*) poněkud podrobněji, takže mi pravděpodobně zbude málo času na mnohé další věci, ale na tom příliš nazáleží. Ve skutečnosti jde o systém rovnic, neboť dostáváme jednu rovnici pro každý rozptýlený paprsek, jehož směr je určen vektorem reciproké mřížky – trojrozměrným vektorem s celočíselnými složkami.

Předpokládejme, že nás zajímají absolutní hodnoty obou stran rovnice (\*). Na levé straně máme velikost normalizovaného strukturního faktoru, kterou určíme z našich difrakčních experimentů měřením intenzit rozptýlených paprsků. Na pravé straně máme součet přes všechny atomy v jednotkové buňce. Jediné neznámé na pravé straně jsou polohové vektory  $\mathbf{r}_j$ , které popisují krystalovou a molekulární strukturu. Uvažujme, kolik rovnic takto dostaneme. Počet rovnic je roven počtu velikostí, pro které jsme naměřili intenzity. V typickém případě jich mohou být tisíce, pět, šest, sedm tisíc a počet atomů v molekule je obvykle dosti malý. Šedesát, osmdesát, možná sto nebo tak nějak. Každý polohový vektor má tři složky, a proto můžeme hovořit o dvou nebo třech stech neznámých v pěti, šesti, sedmi tisících rovnic. Co nám to říká? Že polohové vektory jsou obecně přeuročeny tím, co můžeme měřit. Nejen tedy, že není pravda to, čemu se věřilo do padesátých let, totiž že pozorované intenzity nepostačují k jednoznačnému určení krystalových struktur, ale ukazuje se, že tento problém je silně přeuročen.

Je pravda, že chceme mnohem méně, než chtěli krystalografové původně. Původně se mluvilo o určení hustotní funkce  $\varrho(\mathbf{r})$ . Nepředstíráme, že určíme právě ji. Tvrdíme pouze, že můžeme určit polohu atomů, což je samozřejmě slabší informace než skutečná hustotní funkce, ale obvykle je to vše, co nás zajímá.

Mimořádně, jde o velmi komplikovaný systém rovnic a ani s největší dávkou fantazie jej nelze považovat např. za systém lineárních rovnic, neboť jde o lineární kombinace exponent a neznámé jsou v jejich mocninách. Mimo to porovnáváme absolutní

hodnoty obou stran a to náš problém ještě více komplikuje. Představme si nicméně, že je vyřešen a že zmíněné polohové vektory jsou nyní známy. Jsou tedy určeny nadbytečným systémem rovnic.

Máme tedy takovou molekulární strukturu, že intenzity jí rozptýlených paprsků souhlasí s tím, co bylo naměřeno. Dosáhli jsme však víc. Známe-li  $r_j$ , můžeme ve skutečnosti vypočítat celé komplexní číslo  $E_H$ , nejen jeho velikost. Znamená to, že jsme vypočítali fáze  $\phi_H$ , které nemohou být měřeny, jak jsem předtím zdůrazňoval. Nelze je žádným způsobem přímo měřit, ale jediná informace, kterou jsme vložili do systému rovnic jsou naměřené velikosti. O čem to vypovídá? Říká to, že naměřené intenzity, tedy velikosti  $|E_H|$  ve skutečnosti obsahují informaci o fázích, která je experimentálně nedostupná. Jediný problém, který zůstává – a když říkám jediný, je to poněkud ne-japný vtíp – je, jak získat informaci o fázích, která je obsažena v naměřených intenzitách.

Důvod, proč jsem s tím strávil tak mnoho času, tkví v tom, že chci zdůraznit, že odvození uvedených závěrů nevyžadovalo zvlášť hlubokou matematiku, nicméně matematika je pro ně podstatná a závěry, které jsme právě učinili, byly před rokem 1950 považovány za směšné. Nikdo nám v té době nevěřil. Byli jsme myslím považováni trochu za blázný plýtvající časem na pokusy o řešení problému, o kterém panovalo přesvědčení, že je v principu neřešitelný.

Molekulární a krystalová struktura neurčuje hodnoty fází jednoznačně z toho důvodu, že polohové vektory nezávisí pouze na molekulární struktuře, ale také na výběru počátku. My však můžeme polohu počátku libovolně měnit, neboť v krystalu není nic, co by nám prikazovalo, že počátek musí být v tom či onom bodě, protože žádný bod se neliší od ostatních. Tedy změníme-li počátek, změníme i polohové vektory  $r_j$  a hodnoty fází. Znamená to, že jednotlivé fáze nejsou krystalovou strukturou určeny. Je jasné, že nemáme naději na získání informace o fázích pouze z pozorovaných intenzit. Není to možné a to také vysvětluje, proč je informace o fázích v difrakčních experimentech nedostupná. Chceme-li si zachovat naději na určení hodnot jednotlivých fází z měřených intenzit, musíme tím nebo oním způsobem určit, kde by měl být náš počátek.

To však přináší jisté nesnáze, které lze nejlépe překonat tím, že se soustředíme nikoli na jednotlivé fáze, ale na některé jejich lineární kombinace, jejichž hodnoty jsou jednoznačně určeny strukturou a jsou nezávislé na volbě počátku. Tento program lze úspěšně dovést do konce. Věnujme několik následujících minut definici strukturních invariantů.

Ukazuje se, že lineární kombinace tří fází je strukturní invariant, pokud součet vektorů jejich reciproké mříže je nulový. To dává dosti širokou třídu strukturních invariantů. Můžeme se pokusit odhadnout tyto speciální lineární kombinace fází pouze z pozorovaných intenzit. Z časových důvodů zde mohu promluvit pouze o malé podmnožině strukturních invariantů, totiž o třífázových strukturních invariantech definovaných jako

$$\psi_3 = \phi_H + \phi_K + \phi_L, \quad \text{kde } \mathbf{H} + \mathbf{K} + \mathbf{L} = \mathbf{0}$$

a  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{K}$  a  $\mathbf{L}$  jsou vektory reciproké mříže. Pokud odhadneme hodnoty dostatečně velkého množství těchto lineárních kombinací a máme určen počátek, máme naději na vyhodnocení samotných fází.

Strukturní invarianty hrají důležitou roli vazeb mezi pozorovanými velikostmi a fázemi. Máme-li odhady dosti velkého množství strukturních invariantů, můžeme nějakým vhodným způsobem stanovit počátek, což není pro další vysvětlení tak důležité. Z těchto odhadů pak lze zrekonstruovat fáze.

Důležitý krok je to, co lze nazvat principem souseda. Ukazuje se, že pro odhad hodnot strukturních invariantů nemusíme obecně používat celou množinu naměřených hodnot. V tzv. příznivých případech, které za chvíli popíšeme, stačí k určení libovolného strukturního invariantu malá podmnožina naměřených intenzit. Tato idea je neobyčejně důležitá, protože znamená, že k odhadu strukturního invariantu nám stačí vzít jen několik málo velikostí nebo intenzit. Těchto pár intenzit nebo velikostí nazýváme okolím strukturního invariantu. První okolí třífázového strukturního invariantu je složeno ze tří velikostí  $|E_H|$ ,  $|E_K|$ ,  $|E_L|$ , takže z jejich znalosti můžeme v příznivých případech odhadnout ony speciální lineární kombinace fází. Hodnota těchto strukturních invariantů velmi málo závisí na hodnotách tisíců dalších naměřených intenzit. Dovoďte mi, abych vám velmi stručně popsal strategii řešení, tj. jak se takový odhad provádí. To, o co se snažíme, je vyloučit neznámé polohové vektory, které jsou zdrojem potíží. Metoda, kterou jsme přijali, je založena na předpokladu, že všechny možné hodnoty polohových vektorů jsou stejně pravděpodobné. Řečeno jazykem matematické teorie pravděpodobnosti, činíme předpoklad, že polohové vektory jsou stejnoměrně a nezávisle rozložené náhodné veličiny. Normalizovaný strukturní faktor je proto rovněž náhodnou veličinou a za předpokladu, že základní náhodné proměnné jsou stejnoměrně a nezávisle rozloženy, můžeme zjistit pravděpodobnostní rozdělení strukturního faktoru. Můžeme dokonce nalézt rozdělení podmíněné pravděpodobnosti libovolného strukturního invariantu, když tři velikosti v prvním okolí považujeme za známé. Celý tento postup lze provést metodami, které z hlediska vývoje teorie pravděpodobnosti zhruba v posledních sto letech jsou považovány za standardní.

V případě třífázových strukturních invariantů je rozdělení podmíněné pravděpodobnosti dáno jednoduchým výrazem

$$P \approx \kappa^{-1} \exp(A \cos \psi),$$

kde

$$A = 2\sigma_3\sigma_2^{-(3/2)}|E_H||E_K||E_L|, \quad \sigma_n = \sum_{j=1}^n z_j^n$$

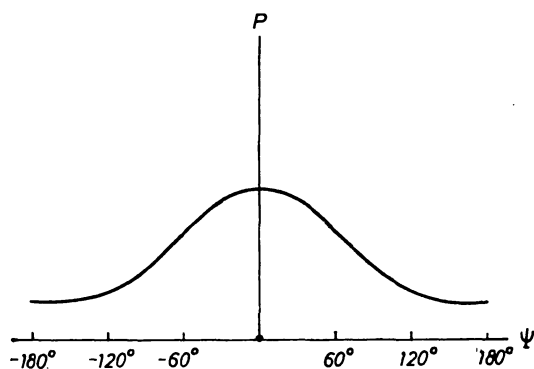
a  $\kappa$  je normalizační konstanta, která nás nyní nemusí zajímat. Velikosti vystupující ve výrazu pro  $A$  jsou známé veličiny a stejně tak i  $\sigma_3$  a  $\sigma_2$ .

Toto rozdělení se nejlépe znázorní obrázkem. Pro  $A$  dosti malé, např. okolo 0,7, vypadá jako na obr. 2.

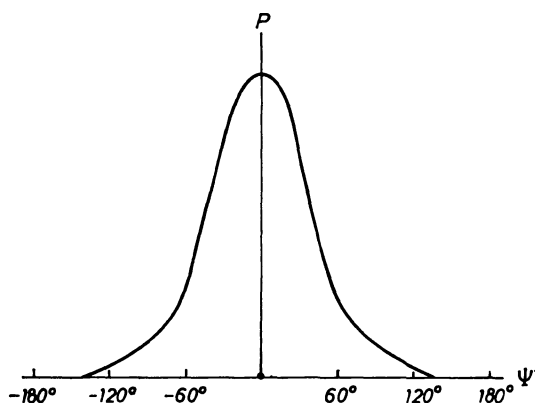
Nejpravděpodobnější hodnota třífázového invariantu je nula, ale odhad v tomto případě není snadný, neboť rozdělení je poměrně ploché a má velkou varianci, takže odhad není spolehlivý.

Pro velké hodnoty  $A$ , např.  $A = 2,3$  je rozdělení znázorněno na obr. 3. Opět vidíme, že nejpravděpodobnější hodnota je nula, odhad je však nyní snadný, neboť máme rozdělení s velmi malou variancí.

Můj čas již vypršel, proto shrnu výsledky tím, že řeknu, že v příznivých případech



Obr. 2.



Obr. 3.

ony tři velikosti jsou velké a zjišťujeme, že odhad třífázových strukturních invariantů je nula. Jak jsme již viděli, díky schopnosti odhadnout hodnoty strukturních invariantů, můžeme přejít od pozorovaných velikostí nebo měřených intenzit k invariantům, které nám zase umožňují celkem běžným postupem odhadnout hodnoty individuálních fází z měřených intenzit a jak už jsem předvedl, máme-li naměřené intenzity a fáze, které umíme spočítat, můžeme přímo odvodit krystalovou a molekulární strukturu.

**Profesor Singer:** Děkuji dr. Hauptmanovi za jeho výstižnou přednášku, jakož i za větu z Fourierovy analýzy.

*Druhou část diskuse otiskneme v příštím čísle*