Věda o významných formách

*Ian Stewart, Coventry**)

Ian Stewart pracuje na fakultě univerzity ve Warwicku od r. 1969, kdy získal doktorát. Jeho disertační práce o podideálech Lieových algeber vznikla pod vedením Briana Hartleye. Od té doby se jeho matematické zájmy rozšířily od Lieových algeber na teorii singularit a na „zkázonosnou" činnost jako je teorie katastrof. Kniha „Catastrofe theory and its Applications", kterou napsal s Timem Postonem, byla vybrána časopisem Choice mezi Vynikající akademické publikace roku 1978. Otevřený problém, o kterém rád hovoří, může některým lidem rovněž připadat zkázonosný: doufá, že nestandardní analýza může být použita k něčemu dostatečně pozoruhodnému, aby ji to začlenilo do hlavního proudu matematiky.
(Z redakční poznámky MI)

Jaký je vztah mezi matematikou a jejími aplikacemi? Jaký by měl být? *Intelligencer* nám představil dva názory, a to Kacův [12] a Hermannův [10]. Jak se zdá, oba se shodují v tom, že zde existuje jistá průrva, kterou je třeba překlenout, i když se neshodují na přesném postupu vedoucím k nápravě. Rád bych předložil třetí názor, který vyjadřuje nesouhlas s oběma předešlými. Kac volá po „diskusi nebo dokonce konfrontaci". Já bych dal přednost diskusi.

Téma je ovšem rozsáhlé a názor každého matematika je omezen jeho vlastním vzděláním a zájmy. Je důležité pochopit hned od začátku, že téma je *tak* široké, že žádný jednotlivec nemá vlastně naději obsáhnout celý problém. Samotná matematika je již příliš velká, ale zde diskutujeme o jejím vztahu *k vědě jako celku*. Každý osobní pohled (včetně mého) je nutně zaujatý a nedokonalý.

Jádro matematiky

Hermann tvrdí, že aplikace matematiky nevznikají „pouhou náhodou", a říká:

„Pro matematiky se zdá být velice pohodlné věřit, že aplikace vznikají náhodně jako Poissonův proces. Já si to nemyslím." Krátká odpověď na to je, že autor si natolik zjednodušil názor, který si přeje napadnout, že jeho vyvracení už ani nestojí za tu námahu. Ale dříve než dojdeme k tomu, co pokládám za rozumnější stanovisko, dovolte mi připomenout tři případy z historie. Snadno bychom našli tucet dalších.

---

*) I. STEWART: *The Science of Significant Form.* The Mathematical Intelligencer, Vol. 3, No. 2, 1981, pp. 50—58. Přeložil OLDŘICH KOWALSKI.

Teorie čísel se všeobecně považuje za jeden z „nejčistších" oborů čisté matematiky (ať již za čistou matematiku pokládáme cokoliv). Pravděpodobně neprávem: srovnejme Mackeyův historický přehled [14], ve kterém autor rozebírá vliv teorie čísel na vývoj fyziky, vliv, který v podstatě nepostřehli ani číselní teoretici ani fyzikové, protože se prosazoval prostřednictvím harmonické analýzy a prostřednictvím analogie spojitého a diskrétního. Ale pokračujme dále. Podívejme se na Fermatovu větu – nikoliv „velkou" ale „malou":

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$$

Kdyby někdo před deseti lety předpověděl *vojenské* aplikace této věty, pochybuji, že by byl brán vážně. Ale vzorec je základem jednoho z prvních kódů „typu padacích dveří"*). Kód tohoto typu má jednoduchý šifrovací algoritmus, k němuž příslušný dešifrovací algoritmus je neobyčejně složitý (pokud neznáme malé množství „klíčové" informace); má tu udivující vlastnost, že šifrovací algoritmus lze zveřejnit. Aplikace měla dostatečný vojenský význam pro Pentagon, aby se pokusil z bezpečnostních důvodů zabránit její publikaci. (Mimochodem je to pádný důkaz toho, že sami vojáci předem nepředpokládali zmíněnou aplikaci a ovšem ani aplikaci žádného z těch odvětví kombinatorické matematiky, kterých zde bylo využito).

Dále: Obecná relativita. Je dobře dokumentováno, že Einstein veden převážně estetickými a filozofickými hledisky (založenými ovšem na několika klíčových experimentech) nejprve určil, jaký druh matematiky potřebuje znát, aby mohl vybudovat svou teorii. Potom se šel poradit s diferenciálními geometry, aby se tuto matematiku naučil – a zjistil, že to není snadné. Avšak tato matematika již *existovala.* Teorie diferenciálních invariantů vznikla zčásti jako přirozené rozšíření teorie *algebraických* invariantů, pocházející od Cayleye, Sylvestra, Gordana a dalších; tyto teorie byly vybudovány jako zajímavé hříčky bez zřejmého praktického použití. Souvislost mezi diferenciální geometrií a teorií gravitace nebyla všeobecně očekávána, ačkoliv je zde několik pozoruhodných předpovědí jako například u Clifforda [5].

Za třetí: Matice. Když Cayley dokázal jejich vlastnosti, napsal (někde – nenašel jsem odkaz), že „zde je konečně něco, co nebude mít praktické aplikace". A ovšem lineární algebra se nevyučovala mimo matematické katedry až do začátku tohoto století.

To jsou tři neočekávané aplikace matematiky, která byla vybudována pro zcela jiný účel: nejméně ve dvou případech očividně pro pouhou zábavnost celé věci.

Zde máme sémě pro vyšlenku, že aplikace jsou „náhodné". Ale takové odvážné tvrzení zkresluje zmíněné historické poselství. Zkušenost *neukazuje*, že by každá jednotlivá část matematiky měla stejnou šanci jako kterákoliv jiná stát se aplikovatelnou, pokud budeme čekat dosti dlouho. Je téměř jisté, že velká část dnes studované matematiky nikdy nenajde užitečné aplikace. Háček je v tom, že se nezdá být možné předem rozhodnout, které kousky matematiky ji najdou. Obzvláště nespolehlivým ukazatelem je aplikovatelnost teorie *v okamžiku jejího dokončení.*

Fyzik Freeman Dyson cituje v [6] rozhovor z počátku století mezi Jeansem a Veblenem o teorii grup (včetně konečných a Lieových grup). „Můžeme stejně dobře teorii

*) V originále „trapdoor code" (pozn. překl.)

grup vynechat", řekl Jeans. „Je to obor, který nebude nikdy užitečný ve fyzice". Je dobře, že věda neuposlechla Jeansovy rady: kdyby jí byla uposlechla, dodnes by neexistovala větší část fyziky částic. Věc však není v tom, že by Jeans byl omezený a předpojatý hlupák bez fantazie. Jeho názor byl *ortodoxní*, respektovaný názor fyziků tohoto období. Dyson [6] říká: „Velmi málo lidí v té době mělo sebemenší zdání o tom, jak plodným by se mohlo stát spojení fyziky a teorie grup."

Také by nemělo být *nutné* pokoušet se předem rozhodnout, které oblasti matematiky asi budou aplikovatelné v dlouhodobé perspektivě, *dokonce i když* to pro ně přijmeme jako kritérium, zdali jsou hodny podpory nebo následování (což zde předpokládám, abych se vyhnul debatě zcela jiného druhu). A důvodem je něco, co neberou dostatečně v úvahu Hermann ani Kac. Je to jednota matematiky.

Existuje určité spektrum typů matematiky. Na jednom konci jsou partie, které mají okamžité a zřejmé aplikace: řekněme numerické předpovídání počasí. Na druhé straně jsou záležitosti, jejichž aplikační možnosti jsou nejisté a v žádném případě nejsou viditelné: vysušení sloni, v Kacově barvité terminologii. (Ale podívejte se na Postonův článek [16], pokud jste sloní fanoušek.) Někde mezi nimi jsou věci jako p-adické algebraické grupy (citované Hermannem s příchutí skepticismu) nebo vlastní hodnoty laplasiánu (s důležitým teoretickým využitím a tedy „praktičtější") nebo křivost grup difeomorfismů.

Ale — a to je něco, co snad „čistý" matematik pociťuje silněji než tradiční „aplikovaný" matematik — celé toto spektrum je jedna jediná struktura. Nechci to zveličovat: předně, v libovolně zvoleném okamžiku je tato struktura nehotová a ne všechny stránky jednoty jsou zjevné; za druhé, kolem dokola je pěkná dávka odpadu, který je na první pohled triviální nebo bezvýznamný a nemůže hrát žádnou roli. Ale podkladová struktura významných součástí, hlavní proud, který Steen v [20] nazývá „jádrem", je jediný organický celek. A proto aplikace kterékoliv části této struktury směřuje k ospravedlnění celku.

Rozhodujícím činitelem je ovšem *významnost*. Je těžké ji definovat a stejně obtížné je předem rozhodnout, zda se daná myšlenka někdy ukáže být aplikovatelnou v přírodních vědách; ale každý matematik, který za něco stojí, by měl uznat, že existuje (ačkoliv jeho skutečný úsudek o tom, co je v konkrétním případě významné, může být brán v pochybnost mimo oblast jeho kompetence). Matematická myšlenka je významná, jestliže propůjčuje novou sílu matematickému aparátu, jestliže přispívá nebo slibuje, že by v budoucnu mohla významně přispět k hlavnímu proudu.

Fermatova věta, Riemannovy variety, lineární algebra jsou vesměs významnými součástmi matematiky a jako takové je matematikové vyučovali — někdy po celá staletí před tím, než byly nalezeny jejich aplikace.

Jednota matematiky si naléhavě žádá, aby významnost *nebyla* posuzována podle toho, „co *mi* to *teď* může dát". Hermann říká:

> „Nic mi nemůže být lhostejnější než určení počtu stromů v nějakém grafu nebo nový algoritmus pro numerickou analýzu užívající n místo $2n$ násobení, *dokud nevidím souvislost s aplikacemi, které mě zajímají.*"

Myslím, že Hermann má plné právo posuzovat věci, kterými se sám hodlá zabývat, podle takového kritéria; ale nedoporučuji to jako pravidlo platné pro každého. (Osobně se nijak nezastávám počítání stromů ani puntičkářského zlepšování odhadů; je to ovšem třeba posuzovat podle toho, zda to má nebo nemá skutečný význam pro matematiku a ne podle míry užitečnosti pro Roberta Hermanna...)

Dobří, kompetentní, užiteční matematikové většinou významně přispívají k jádru matematiky. Přitom současně vzniká i řada bezvýznamných výsledků: velké množství doktorských disertací obsahuje jen takové výsledky, které by kterýkoliv znalec oboru nalezl a dokázal během týdne – ale musíme vědecké pracovníky v matematice *nějak* připravovat. Je obrovská škoda, že množství tohoto materiálu je *publikováno* – ale k tomu nás nutí univerzitní představitelé, kteří trvají na četných publikacích, když rozhodují o povyšování nebo přijímání do zaměstnání; není to vnitřní vada samotné matematiky.

Špatní, nekompetentní matematikové nebo matematikové bez fantazie nevytvářejí významné příspěvky. Mohli bychom šetřit lesy tím, že bychom jim zabránili publikovat; ale je klamné myslet si, že je můžeme nějak predisponovat do užitečnějších vědeckých oblastí, protože většinou i v novém oboru zůstanou špatnými, nekompetentními a bez fantazie – a navíc budou nespokojení, protože si práci v novém oboru sami nevybrali.

Mezi těmito dvěma extrémy je velký počet kompetentních matematiků, v jádru zdravých, ale bez vnitřní inspirace; vytvářejí určité příspěvky, zřídkakdy velké, zřídkakdy zásadní, ale někdy jejich nahromaděním může vzniknout určitá hodnota. Ani ty byste příliš nezměnili převedením na jiné pole působnosti: nemůžete vytvořit skvělé vědecké pracovníky z ničeho. A tito lidé plní velmi důležitou úlohu: pomáhají udržovat matematiku živou. Kdyby se každý student musel učit jen ze skript, obor by pomalu zcela odumřel – až na geniální jednotlivce. A v naší dnešní společnosti si nemůžeme dovolit, aby se tak stalo.

Technik versus tvůrce

V tomto odstavečku mi dovolte hrát roli ďáblova advokáta. Pokud jde o náš případ s kódy typu padacích dveří, kryptografové by v případě zjevné potřeby byli nepochybně sami objevili Fermatovu větu, pokud by tato věta ještě neexistovala. (Ačkoliv je těžké si představit civilizaci, která by vyvinula elektronické počítače, aniž by si předtím povšimla Fermatovy věty.) A aplikaci objevili proto, *že to byli kryptografové.*

Dobrá. Nezáleží příliš na tom, který druh vědce *našel* aplikaci, nicméně aplikace *byla* nalezena. Nemyslím, že by někdo vážně navrhoval, že to budou matematikové, kteří budou nacházet neočekávané aplikace: jejich úkolem je tvořit matematiku. A zůstává zde fakt, že Fermatova věta a různé kombinatorické triky, které byly postupně shromážděny, byly objeveny předtím, než začali svůj problém studovat kryptografové a že tak vzniklo správné prostředí pro jejich uvažování.

Ale jedna malá připomínka: ve skutečnosti to nebyli žádní kryptografové. Jeden z nich byl elektroinženýr a druhý pracoval v oboru umělé inteligence. Začali se zajímat o kryptologii, to je jisté; ale co umožnilo jejich objev, byla skutečnost, že jejich speciální nadání, vypěstovaná ke zcela jiným účelům, se setkala v pravý okamžik. Kac tvrdí, že fyzikové, kteří přispěli svými výsledky v biologii, byli úspěšní proto, že se *stali biology*, ale já si myslím, že je mnohem důležitější si uvědomit, že kdyby *byli* biology od samého začátku, nikdy by nedosáhli těchto výsledků, protože by neznali k tomu potřebnou fyziku.

Je samozřejmé, že k *vybudování* aplikací na obor X je třeba se o oboru X něco naučit; ale tato tautologie vůbec nic neříká o jediné skutečné záhadě: proč se čas od času stává, že velký průlom do oboru X přichází z oblastí zcela odlehlých. Například nedávný vývoj v teorii turbulence silně závisel na dvou věcech nijak nesouvisejících s dynamikou tekutin, které byly vymyšleny bez jakéhokoliv záměru aplikovat je na problém turbulence: byly to „podivné atraktory" v topologické dynamice (viz např. Ruelle a Takens [19]) a laser jako experimentální nástroj (Swinney, Fenstermacher a Gollub [2]). Laser byl ve svých počátcích často charakterizován jako „řešení hledající si problém" a vědci, kteří to mysleli docela dobře, pokládali celou věc za ztrátu času: výsledek ukázal, že jejich názor byl neobyčejně netvůrčí a škodlivý. Aplikovaní matematikové se pokud jde o podivné atraktory a chaotickou dynamiku zachovali úplně stejně k průkopnické práci Lorenzově [13] vzniklé na základě numerického předpovídání počasí: zjevně neprojevili o tuto práci ani nejmenší zájem, dokud Smaleova škola (která zpočátku také neznala Lorenzovou práci) neodhalila nesmírný význam této myšlenky. (Tu můžeme ovšem vystopovat už u Poincarého, který ji však nikdy prakticky nepoužil: pouze nad ní vyjádřil své zděšení.)

Ještě více překvapí takový průlom, který v žádném smyslu *neřeší* známý problém. Zřejmým příkladem je obecná relativita*). Dyson [6] připomíná:

> „Obecná relativita je prvním příkladem fyzikální teorie založené na matematickém „skoku do tmy". Mohla zůstat neobjevena ještě celé století, kdyby nebyl žil člověk s Einsteinovou zvláštní představivostí."

Potíže, které měl Einstein se studiem diferenciální geometrie, nám napovídají, že kdyby v jeho době nebyla již k dispozici potřebná matematika, asi by ji sám *nebyl* dokázal vybudovat (ačkoliv, když jde o Einsteina, kdo může vědět?). Je ovšem naprosto přijatelné argumentovat tím, že *důvody* pro samotnou existenci diferenciální geometrie mohou být nalezeny ve fyzice: ve fyzikální intuici Riemannově a v Gaussově díle z oboru geodézie. Ale vyjadřovací prostředky pro Riemannovu práci o varietách byly obsaženy v jeho habilitační přednášce: *O hypotézách, které leží v základech geometrie.* Základní myšlenkou je čistě matematický reflex: zobecněte Gausse ze 2 do n dimenzí. Byl to Riemannův smysl pro matematickou formu, který vedl jeho myšlenky, třebaže Riemann měl také určitou fyzikální intuici. Solidní aplikace musela čekat na Einsteina.

Geometrie je ovšem založena na prostorové intuici, má tedy fyzikální původ. Ale sledovat „aplikovaný" aspekt tak daleko do minulosti je určitě totéž, jako se vykroutit z celé otázky: téměř celá matematika je založena na geometrii nebo na číslech, a je tedy v jistém smyslu „zakotvena v realitě".

Einstein dává dobrý protipříklad ke Kacovu názoru (který shledávám sterilním a de-

---

*) Je pochybné, zdali si astronomové skutečně kdy *dělali starosti* s precesí perihélia Merkura: později to posloužilo jako pěkný důkaz pro novou teorii, ale nebyl to hlavní problém jejich oboru.

primujícím) na roli matematiky ve vědeckém objevu. Je to názor představující „matematika jako technika" nebo snad vyjádřený úslovím

„Otázku proč můžeme pominout,
jde o to dělat nebo zahynout."

Konkrétně:

„Zdá se být samozřejmé, že matematika toho pravděpodobně příliš nezmůže při odhalování přírodních zákonů."

Potud Kac [12]. Toto uvádí opět Dyson, [6]:

„Jedním činitelem, který zůstává stálý přes všechny peripetie dějin fyzikálních věd, je rozhodující význam matematické obrazotvornosti ... v každém století, ve kterém bylo dosaženo většího pokroku, byl růst fyzikálního porozumění umožněn kombinací empirického pozorování a čistě matematické intuice. Pro fyzika není matematika jen prostředkem k propočítávání jevů; je to hlavní zdroj pojmů a principů, pomocí nichž mohou být vytvořeny nové teorie."

Hlediska obou autorů nejsou od sebe tak vzdálena, jak se možná zdá, protože Kac se v každém případě vyjádřil nepřesně. *Tvrdí*, že matematika toho příliš nezmůže při odhalování fyzikálních zákonů; ale *myslí* tím, že matematikové toho mnoho nezmohou. Část jeho argumentace lze ignorovat: jeho důkaz z definice, že pokud mají být matematikové úspěšní, budou se muset stát fyziky a ne matematiky. Toto vodítko neposkytuje ani pomoc ani informaci. Ale to, co chce podle mne Kac říci, záleží v tom, že matematikové nepřinesou mnoho užitku ve vlastním procesu objevování nových teorií o přírodě. (Vyhýbám se termínu „přírodní zákony".) Míní se tedy nikoliv matematická příprava objevu, ale sám objev.

To znamená: Einstein objevil obecnou teorii relativity, protože byl fyzikem.

To je pravděpodobně pravda. Ale je spravedlivé tvrdit, že Riemannův přínos nebo příspěvek italských geometrů „příliš nepomohl" k tomuto objevu? *Matematikové přispívají k objevování nových teorií o přírodě tím, že dodávají nové matematické koncepce nutné k formulaci těchto teorií.* Kde by byl Kepler, kdyby starověcí Řekové nestudovali elipsy? Jak by mohla být ve fyzice částic objevena symetrie vzhledem ke grupě $SU(3)$, kdyby se nikdo předtím ani nesetkal s nějakou grupou? (Aplikovaní matematikové používali ideu „symetrie" po celá staletí, aniž by v ní kdy viděli něco více než užitečný trik: bylo to teprve systematické studium tohoto pojmu samo o sobě, zdůvodněné tím, že se zdál být významným, které mu dodalo potřebnou sílu. Aplikovaní matematikové stále ještě nedovedou získat dostatečné množství esence z myšlenky symetrie, protože se nikdy nic nenaučili o reprezentacích grup. Fyzikové se to naučili a také toho dobře využili.) Jak daleko by se dostala rovinná dynamika tekutin bez komplexní analýzy? Nebo elektrotechnika bez komplexních čísel? Jak by mohli fyzikové rozpoznat v podstatě topologickou strukturu solitonů bez topologie? Jak by mohl kdokoliv doufat ve zvládnutí problému turbulence nebo nelineárních jevů vůbec bez topologické dynamiky?

Je tu také druhá strana mince. Newton vytvořil svou matematiku kvůli fyzice (a bylo mu to velmi vytýkáno: viz Hallovu práci [8]).Komplexní analýza dostala stejnou pomoc od dynamiky tekutin, jako tomu bylo obráceně. Proces probíhá *oběma* směry: proti čemu mám námitky je domněnka, že na úrovni pojmů aplikovatelných na přírodu probíhá tento proces jen *jedním* směrem, od fyziky k matematice.

Dyson také varuje:

„V procesu budování teorií je matematická intuice nepostradatelná, protože „vyhnutí se zbytečnému přemýšlení" dává větší volnost fantazii; matematická intuice je však také nebezpečná, protože mnohé vědy si vyžadují ke svému pochopení nikoliv vyhýbání se myšlení, ale myšlení."

Do jisté míry se zde Kac a Dyson shodují: *dobudovat* teorii na úroveň úspěšné techniky vyžaduje podrobnou znalost přemětu. Bylo by arogantní tvrdit opak. Ale je zde i rozdíl mezi Kacem a Dysonem. Kac uvažuje pouze o dalším vývoji něčeho již v rozumné míře rozvinutého, zatímco Dyson se zajímá také o zrod nové myšlenky. Kac chce, aby matematikové nepřekračovali hranice přírodních věd, protože jejich obrazotvornost je nebezpečná; Dyson si přeje, aby dali volné pole své obrazotvornosti za předpokladu, že ostatní rozpoznají potenciální nebezpečí, kdyby se obrazotvornost vydala nesprávným směrem. Kac chce postupovat bezpečně v tradičním rámci a *rozvíjet*; Dyson chce přijmout intelektuální rizika a *tvořit*

Věda ovšem potřebuje obojí; a pravděpodobně 99 % času stráví rozvíjením známého. *Potřebujeme* matematiky, kteří se budou řídit Kacovou radou.

Ale dobrý bože, ne *všechny*.

Jiná věc, kterou Kac pominul, je fakt, že původní matematická myšlenka, která rozněcuje nový vývoj, *nevyžaduje* nutně rozsáhlou znalost oboru aplikace. Například skutečně nový a silný výsledek o řešení nelineární vlnové rovnice *nutně bude mít* aplikace v mechanice tekutin a v technice, a není třeba mnoho vědět o těchto oborech, abychom si to uvědomili.

Zajímavý případ nastane, když matematik pozná na první pohled možnou souvislost s aplikacemi, ale chybí mu praktická odbornost k tomu, aby ji dále sledoval; a na druhé straně odborníci v příslušné oblasti jsou příliš málo obeznámeni s matematikou, než aby tuto souvislost nalezli sami. Co má matematik dělat? Jestliže budu interpretovat Kacova slova v jejich skutečném významu, *neměl* by se matematik do této situace vůbec dostat, ale pokud se už do ní dostane, musí „dodržovat pravidla", tj. přijmout za své standard myšlení specifický pro příslušný aplikovaný obor. Jestliže je jeho myšlenka skutečně nová, znamená to, že musí umlknout. Nenazval bych to zrovna receptem na pokrok.

V současné době se stala aktuální aplikace teorie singularit na teorii bifurkací. Dalo to deset let úsilí přesvědčit většinou antipaticky naladěné odborníky v teorii bifurkací (s čestnými výjimkami, viz např. [4]), že účinné metody diferenciální topologie mohou být užitečné v jejich oboru (viz Marsden [15]). Nedávám vinu odborníkům v teorii bifurkací: ve své odborné přípravě se nesetkali s ničím, co by jim umožňovalo ocenit teorii singularit, pokud jde o její *potenciální možnosti* — jsou schopni hodnotit pouze *výsledky*. Nakonec se jiní matematikové museli sami naučit teorii bifurkací, aby *dostali* takové výsledky, tj. museli vykonat práci za druhé. Naštěstí svou věc uhájili, přes odpor ze strany teorie bifurkací a leckde přes vyslovené nepřátelství.

Protože ne každý bude souhlasit, že to je vhodný příklad, dovolte mi uvést dva další: kvůli úplné jistotě je vyberu z článků Kace a Hermanna.

Hermann uvádí, že se díval na „lineární systémy“ a vidí některé oblasti pro další práci:

„Systematická matematika neexistuje, ale věřím, že by mohla být vytvořena – založena na algebraické geometrii, která se obvykle pokládá na nejabstraktnější a „nejméně užitečnou část matematiky.“

Je-li tomu tak, raději by se měl rovnou pustit do práce: existuje sakramentsky málo inženýrů vzdělaných v algebraické geometrii. (Mimochodem, jak může sladit tento příklad se svým tvrzením, že významné aplikace matematiky vznikají jen z takové matematiky, která byla vybudována se zřetelem k aplikacím? Nevzpomínám si, že by toho byl Grothendieck napsal mnoho o elektronice.)

Kac říká:

„Asi tak v loňském roce ... jsme byli svědky nového, slibného a vzrušujícího splynutí matematických a fyzikálních idejí. Hovořím ovšem o moderní diferenciální geometrii a o teorii kalibračních polí. Ať se to zdá jakkoli zázračné, fibrované prostory, homotopie a Chernovy třídy se dostávají ve stejné míře do fyzikální terminologie, jako se instantony, kalibrační pole a lagrangiány dostávají do terminologie matematické“.

Toto „zázračné“ splynutí nenastalo tak, že by matematikové vyčkávali, až se jich fyzikové zeptají na Chernovy třídy. Matematické prostředky byly již zcela připraveny, *nikoliv* kvůli očekávaným aplikacím na teorii kalibračních polí, ale protože se jevily jako významné matematikům.

Ani to nebylo tak, že by fyzikové seděli a čekali, až jim někdo řekne o nové matematické metodě pro studium instantonů. Chtělo to, aby se obě strany setkaly, aby si uvědomily možnost plodného vzájemného působení a aby velmi tvrdě pracovaly na vytvoření společného jazyka.

Nic takového by nemohlo nastat, kdyby si obě strany nebyly již vybudovaly základy takového společného jazyka ve svých vlastních oborech. Je to, jako když dva tančí tango.

Jedním z využití celé této práce, jak fyzikové *doufají*, bude přeformulování kvantové mechaniky – vskutku pozoruhodný cíl, jestliže „matematika toho pravděpodobně příliš nezmůže při odhalování přírodních zákonů“.

Co dělá matematiku užitečnou?

Zmínil jsem se již o jednotě matematiky: Steen v článku [20] dochází k podobnému stanovisku:

„Jádro matematiky je věda zkoumající významné formy. Je živena stejně tak vnitřní energií ... jako novými podněty z vnějších vrstev, které jsou v těsnějším kontaktu s problémy lidstva. Vrstvy blízké jádru přejímají rafinované techniky, aby sloužily vnějším cílům. Teorie ve vnějších vrstvách jsou zaměřeny více k řešení problémů než k odhalování základní formy. Vrstvy vzdálené od jádra používají matematiku spíše jako metaforu než jako teorii: aplikace se prolínají s technikami tak dokonale, že vzniká zcela odlišná disciplína. Teorie a problémy prosakují skrze vágně definované hranice mezi těmito vrstvami, přičemž každá stránka obohacuje druhou a vznikají tak podněty jak pro matematiku, tak pro přírodní vědy.

Jedním z důvodů, proč má jádro matematiky takovou moc je, že je to jakýsi stroj na zmocňování se významných faktů a na generování významných důsledků. Liší se od praktičtěji zaměřených disciplín svou pojmovou hloubkou a šířkou a — což považuji za velmi důležitý rys — svou schopností generalizovat na základě jediného „typického" příkladu. Jestliže se aplikovaný matematik, řekněme inženýr, setká s maticí tvaru $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ a podívá se na prvek a, co uvidí? Hádal bych, že pravděpodobně vlastní hodnotu. Překvapilo by mě, kdyby v tom rozpoznal charakter Borelovy podgrupy. Ale u mnoha problémů je to právě uchopení dané struktury v hloubce na úrovni charakterů Borelových podgrup, které otevírá skutečně plodné směry náporu — například nám to zpřístupní celou techniku teorie reprezentací.

Docela pěkný příklad — máte-li dost fantazie, abyste jej ocenili — podává Arnol'd ([1], str. 34). Týká se odhadu časového údobí, v němž je možná dlouhodobá dynamická předpověď počasí. Připomeňme, že numerické předpovídání počasí stojí na zcela „praktickém" konci našeho spektra matematiky.

Přeformulováním celého problému jej Arnol'd přeměnil na problém určení křivosti (nekonečně dimenzionální Lieovy) grupy všech difeomorfismů kulové plochy zachovávajících plošné obsahy. Je tu analogie s konečně dimenzionálním případem: zde negativní křivost způsobuje exponenciální nestabilitu geodetických křivek. Totéž by mělo platit i v nekonečně mnoha dimenzích; a geodetiky na grupě difeomorfismů popisují v jiné formě proudění ideální tekutiny.

Bylo by těžké najít někoho z odborníků zabývajících se numerickým předpovídáním počasí, který vůbec kdy slyšel o grupě S_0 Diff S^2, neřku-li, že by se ještě zajímal o její křivost. Pokud byste jim objasnili, jak se dá takto přeformulovat proudění tekutiny, s největší pravděpodobností by celou věc jednou provždy zařadili do kategorie uměle vymyšlených formulací (ve smyslu Kacovy klasifikace) jako sterilní a neužitečnou.

Ovšem Arnol'd ji používá k důkazu, že k předpovídání počasí na dva měsíce dopředu, potřebujeme údaje o pět řádů přesnější, než bude požadovaná přesnost předpovědi. To se rovná prakticky nemožnosti. (Při svých výpočtech musel nahradit kulatou Zemi anuloidem; to proto, že umí zatím vypočítat jen grupu S_0 Diff T^2 a ne proto, že by byl naprostým ignorantem, pokud jde o tvar Země, takže přesný odhad může být nesprávný. Ale — a to neříkám jen ironicky — kolik odborníků na numerické předpovídání počasí si uvědomí, že budoucnost celého jejich oboru závisí na křivosti grupy S_0 Diff S^2?)

Jiným příkladem ze zcela nedávné doby je práce Golubitzkého a Langforda [7] o degenerovaných Hopfových bifurkacích. Původní Hopfova věta dává podmínky, při nichž dynamický systém bude bifurkovat od jednobodového atraktoru na limitní cyklus. Podstatně „dynamická" povaha této bifurkace se zdá být zcela odlišná od „statických" bifurkací v elementární teorii katastrof nebo teorii singularit. Cituji Smalea, [18]:

„Odborníci v teorii katastrof často mluví tak, jako kdyby teorie katastrof... byla prvním důležitým nebo systematickým ... studiem nespojitých jevů pomocí diferenciálního počtu. Můj názor je zcela opačný a ve skutečnosti věřím, že například Hopfova bifurkace (1942) je hlubším výsledkem než teorie katastrof.

Golubitzky a Langford ukazují, že nejenže se Hopfova věta dá redukovat na teorii singularit a dokázat v jejím rámci: může být navíc zobecněna tak, že dostaneme teorii rozvinutí degenerovaných Hopfových bifurkací. Příslušná technika používá jen o málo více než Ljapunovův-Schmidtův proces redukce (název, který používají aplikovaní matematikové pro jistou verzi věty o implicitní funkci) a ekvivariantní verzi elementární teorie katastrof vzhledem k cyklické grupě Z_2 řádu 2. To znamená, že Hopfova věta skutečně není hlubší, a dokonce je snad i *méně* hluboká než teorie katastrof, a že je přímým důsledkem této teorie.

Poučení: dokonce experti se mohou mýlit; a matematická myšlenka může být aplikována více než jedním způsobem.

Je užitečné formulovat problém několika způsoby, protože každé jeho přeformulování jej činí přístupným jiným částem matematického „stroje". Je jisté, že toto řemeslo bylo v některých obdobích až příliš rozšířeno. Carathéodoryho přeformulování termodynamiky je, jak tvrdí Kac, v podstatě nepotřebné, ale ne kvůli nějakému rozdílu mezi „božím" a „lidským" dílem: je nepotřebné, protože neotvírá žádnou novou cestu, která by umožňovala uplatnění účinné techniky. Souhlasím s tím, že výsledky tohoto druhu jsou zbytečné, ale jde vždy o to, jaké nové přístupy budou otevřeny pomocí přeformulování, ne o to, jak „přirozená" je nová formulace. (Termodynamika přímo volá po tom, aby byla formulována *rozumně* a *konzistentně*, alespoň v té míře, aby v literatuře přestaly spory kvůli potížím plynoucím ze špatné formulace. Velmi by pomohly diferenciální formy: Jauch [1] začal s takovým přeformulováním. Jazyk diferenciálních forem je jednou z *matematických* struktur, z nichž mnohé nemají žádnou rozumnou fyzikální interpretaci.)

V ideálním světě, kde by každý bral vážně svůj přívlastek, by úlohou aplikovaných matematiků mělo být vytvářet spojení mezi čistými matematiky (výrobci nástrojů) a fyziky (uživateli nástrojů). To znamená, že by měli zjistit u fyziků, o jaké problémy jde, a sdělit je (čistým) matematikům, aby mohli přemýšlet o jejich řešení; nebo vzít metodu, kterou (čistí) matematikové již vybudovali, případně ji poněkud přibrousit, přizpůsobit ji zkoumanému problému a pak ji předat fyzikům. Nemíním to ve smyslu nějakého posluhování, ale je zcela jisté, že úlohou aplikovaného matematika by mělo být *aplikovat matematiku*. A úlohou čistého matematika by mělo být tvořit matematiku, *která je, mohla by být nebo bude potřebná, a přitom brát v úvahu vnitřní potřeby související s vytvářením nástrojů, jakož i problémy, k jejichž řešení mají nástroje sloužit.*

Nemyslím, že věci vždy takto fungují zčásti proto, že *aplikovaní* matematikové neplní dobře svou komunikační funkci. Hermann prohlašuje, že stále rostoucí počet inženýrů a přírodovědců vůbec matematiku obchází, i když spíše pro krátkodobé, pragmatické potřeby. A je zde nyní zcela určitý trend, že fyzikové a „čistí" matematikové spolu hovoří přímo a obcházejí „aplikované" společenství. Jsou k tomu nuceni: „aplikovaní" matematikové se nevyzbrojili ani potřebnými technikami a pojmy, ani znalostí fyziky.

Některé etapy vývoje v teorii kalibračních polí sledují právě tento trend. Málokteří z více tradičních aplikovaných matematiků rozumějí teorii kalibračních polí nebo topologii: jejich matematický a fyzikální obzor je pevně svázán s devatenáctým stoletím.

Následující bod je ovšem snažší diskutovat ex post; ale já nepovažuji vůbec za „zázračné“, že se fibrované prostory nebo Chernovy třídy objevují ve fyzice. Jsem udiven jen přesným *místem*, kde se objevily; ale topologie tvoří asi tak třetinu celého matematického výzkumu*) a důvodem pro toto úsilí není pouhá akademická hra, ale velice jasné uvědomění si důležitosti topologie pro hlavní proud. Matematikové dnes studují topologii, protože se bez ní nemohou obejít při práci ve svém oboru. Topologie má navíc svůj původ ve fyzikálních problémech a v jistém smyslu na to tento obor nikdo nezapomněl, i když někteří jeho pracovníci možná ano. Topologii to stálo nějakých padesát let tvrdého zápasu, než si vyřešila vnitřní problémy svého vývoje do té míry, aby se stala *použitelnou*. Stěží nás může překvapit, že nyní, když bylo dosaženo této úrovně, začínají se objevovat aplikace.

Hermann by jistě argumentoval tím, že objevení se fibrovaných prostorů ve fyzikálních teoriích je projevem nesmrtelného génia Élie Cartana. Také jsem si jist, že je. Ale Cartan přemýšlel o relativitě: co měl společného s kvantovou teorií pole? Je to Cartanův *matematický* génius, kterému musíme děkovat – a také genialitě těch, kteří se chopili jeho spíše intuitivních a ne dobře definovaných myšlenek a kteří zformulovali pojmy jako jsou fibrované prostory tak jasně, že si teď již můžeme být jisti tím, že Cartanovy důkazy skutečně *byly* důkazy. A s velkým podezřením pohlížím na argumenty jako: „jestliže to bylo vytvořeno kvůli jedné aplikaci, není vůbec překvapující, že to najde aplikaci ještě někde jinde“. Která z níže uvedených skutečností je záhadnější?

(a) Myšlenka inspirovaná obecnou teorií relativity se ukazuje být užitečnou v kvantové teorii pole, ačkoliv mezi těmito dvěma obory není žádná fyzikální souvislost.

(b) Účinná matematická technika, vybudovaná k řešení problémů inspirovaných obecnou relativitou, se ukazuje být užitečná ještě někde jinde.

Můj pocit je: (a) je nevysvětlitelné, (b) zní rozumně. Ale jestliže (b) zní rozumně, co je pak překvapujícího na tom, když

(c) účinná matematická technika, vybudovaná k řešení důležitých vnitřních problémů matematiky, se ukáže být užitečnou ještě někde jinde?

Podobně Gaussovy myšlenky o plochách inspirovaly Riemannovu teorii variet.

---

*) Pro bližší objasnění: podle AMS (MOS) klasifikace lze *zařadit* do topologie tyto součásti matematiky: 22 — Topologické grupy a Lieovy grupy, 32 — Funkce více komplexních proměnných a analytické prostory (z větší části), 54 — Obecná topologie, 55 — Algebraická topologie, 57 — Variety a buněčné komplexy, 58 — Globální analýza a analýza na varietách. Dále se *topologické partie* objevují v těchto dalších disciplínách: 02 — Logika a základy matematiky, 04 — Teorie množin, 05 — Kombinatorika, 12 — Algebraická teorie čísel, teorie těles a polynomy, 13 — Komutativní okruhy a algebry, 14 — Algebraická geometrie, 30 — Funkce komplexní proměnné, 34 — Obyčejné diferenciální rovnice, 43 — Abstraktní harmonická analýza, 46 — Funkcionální analýza, 49 — Variační počet a optimalizace, 53 — Diferenciální geometrie, 60 — Teorie pravděpodobnosti a stochastické procesy. Pokud jde o *topologické metody*, zdá se, že pronikly do všech partií matematiky bez rozdílu. (Poznámka překladatele.)

Zatímco nevidím žádnou rozumnou souvislost mezi geodézií a teorií gravitace – což činí celý vývoj nevysvětlitelným na úrovni „co *mi* to *teď* dá?" – je zde bezprostřední strukturální a pojmové spojení mezi dvojrozměrnými a n-rozměrnými varietami a skutečnost, že Gauss našel použití pro první pojem, napovídá, že druhý z nich, pokud bude *matematicky významný*, ukáže se být také užitečným. A nakonec se jako užitečný ukázal. (A jeho významnost byla oceněna matematiky dávno předtím.)

Nevěřím v nějaký „zákon zachování aplikovatelnosti". Jestliže není překvapující, že trik vynalezený kvůli teorii relativity se využije v kvantové teorii pole, pak již nepřekvapí ani to, že najde uplatnění také věc vymyšlená kvůli teorii homotopie.

Nebo dokonce p-adické grupy.

Matematika a přírodní vědy

Z jednoty matematiky plynou důsledky pro její vztah k přírodním vědám, který je podle mne mnohem jemnější, než by nám chtěli vsugerovat Kac nebo Hermann. Hermannův recept je, že každý jednotlivý matematik by se měl sám sebe zeptat „Jaký praktický užitek bude mít práce, kterou se právě zabývám?", a jestliže na to nemůže dát určitou odpověď, měl by s tím přestat a najít si místo toho něco, co bude mít bezprostřední užitek. Naproti tomu Kac nezachází tak daleko: nemá žádné námitky proti matematikům, kteří dělají to, co se jim zachce, pokud se ale nesnaží přenášet své výsledky do oborů, se kterými se do hloubky neseznámili.

Nedávno jsem strávil několik dní na Bristolské univerzitě a mluvil jsem tam s některými fyziky. Mezi materiály, které jsem si odvezl, byly dva separáty [3, 9]. Jeden z nich aplikoval Weierstrassovu spojitou funkci bez derivace na kvantovou mechaniku, druhý použil Jacobiho symboly a Gaussovy součty ke studiu jistých vlastností difrakčních mřížek. Naštěstí Weierstrass, Jacobi ani Gauss se neřídili Hermannovou radou.

Výměna myšlenek probíhá i opačným směrem. Výpočet Wignerových funkcí v kvantové optice přivedl Berryho a Balasze [2] ke studiu iterací *křivky* vzhledem k obecné transformaci kruhu zachovávající plošné obsahy. To je po stránce matematické fascinující problém – zatímco odborníci v topologické dynamice studovali široce iterace *bodů*, zdá se, že přehlédli toto zobecnění, které vypadá velice zajímavě. Má potenciální aplikace i jinde: triviálním příkladem jsou obrazce, které se utvoří na hladině čaje v šálku, když zamícháme lžičkou.

Podstata věci je v tom, že zatímco množství této výměny myšlenek se dá dobře předvídat a má rutinní charakter, stejně často tomu tak není. Nikoho nepřekvapí, když nová věta o vlnové rovnici má aplikace ve vlnové teorii nebo když nové experimentální pozorování chování vln má důsledky pro vlnovou rovnici. Ale překvapuje mě, že nám Gaussovy součty nebo Jacobiho symboly něco řeknou o difrakčních mřížkách, nebo že fyzikovy pokusy o výpočet něčeho, o čem jsem v životě neslyšel, nás přivedou k hlubokým a krásným problémům v topologické dynamice.

Nemyslím, že Kacovy nebo Hermannovy recepty jsou obzvlášť *nebezpečné*, ledaže by některý z nich získal dostatek politického vlivu a pokusil se přinutit například Národní vědeckou nadaci (NSF), aby postupovala podle jeho kritérií při posuzování navrhovaných výzkumných programů. Nepředstavují nebezpečí přesně vzato proto, že vzniká velké množství prací, které *nejsou* podřízeny úzkým nebo dokonce ani jasně definovaným cílům. Ale — a to je důležité — jestliže by v minulosti byla organizace vědy jiná než opravdu byla, a kdyby se řídila směrnicemi, které navrhují autoři, samotná věda by byla jen velmi ubohým stínem svého dnešního stavu. A co je v jistém smyslu ještě horší, pravděpodobně bychom si gratulovali k tomu, jakou jsme vytvořili překrásnou a uspokojivou strukturu, neboť bychom si vůbec neuvědomovali, oč jsme přišli.

Doufám, že to nezní jako sebeuspokojení, protože tak jsem to nemínil. Bylo by snadné zneužít toho, co jsem řekl, jako výmluvy pro vyzvedávání bezcenných nesmyslů. Ale to by se mohlo stát pouze tehdy, kdyby přírodní vědy a matematika ztratily *kolektivní* smysl pro dobrý úsudek. Mínění jednotlivce nebo i nátlakové skupiny znamenají v dlouhodobé perspektivě vědy velmi málo: úspěch vědy jako druhu činnosti závisí na tom, do jaké míry si vybudovala ochranné mechanismy schopné vzdorovat některým horším stránkám lidské povahy: hlásání emocionálních hesel, vytváření impérií, podřizování myšlení přáním, nedostatek fantazie, přílišné fantazírování, předsudky, konzervatismus, samoúčelné inovace... Všechny tyto stránky jsou v každém okamžiku a do jisté míry přítomny v některých částech této struktury, ale zatím se jim nepodařilo narušit celé dílo.

Ani v nejmenším nedbám o to, zdali se některý určitý matematik snaží nebo nesnaží zaměřit svou práci prakticky nebo směrem k reálnému světu. Pokládám za podstatné, že *matematika jako celek*, kolektivní hlavní proud udržuje správnou, dvojsměrnou výměnu idejí s přírodními vědami, protože historická zkušenost říká, že tato výměna se zasloužila o zdravý rozvoj obou oblastí.

Mám dojem, že se v současné době „čistí" matematikové fakticky stále více zaměřují na aplikace. Jeden důvod pro to není příliš chvályhodný: brání tímto způsobem své postavení v době, kdy společnost stále více požaduje okamžitý praktický efekt. Ale druhým důvodem je, že za posledních sto let „čistá" matematika vyvinula některé velmi účinné postupy s velkým potenciálem pro aplikace — a tyto postupy přece jen aplikaci nenalezly, protože pracovníci aplikovaných oborů nevědí o jejich existenci. Je zde komunikační bariéra. Nenazval bych ji komunikační závadou, protože to by vzbuzovalo dojem, že ji někdo *zavinil*, ale tak to není. Věc je v tom, že řekněme teoretický inženýr studující řešení von Kármánovy rovnice prohnuté desky pro dvojnásobnou vlastní hodnotu, tím klade matematickou otázku, pro niž příslušná odpověď (viz [17]) závisí na hlubokých výsledcích o tom, jak okruh invariantních germů (pro grupu $Z_2 \times Z_2$ operující na R^2) operuje na modulu ekvivariantních germů. To nejsou pojmy, se kterými se setkáme v obvyklém kursu pro inženýry. Ale také to nejsou neužitečné abstrakce, které do inženýrských věd importovali topologové bránící se nezaměstnanosti: je to přirozená cesta, kterou se uvedený matematický problém „chce" ubírat za současného stavu našich znalostí. Je nesmírně důležité, aby komunikační přehrady tohoto typu byly překlenuty: to chce pohovořit si s lidmi na druhé straně, a to *i když nejsou ochotní naslouchat*. Je jisté, že napětí se ještě zvýší, když takový *Newsweek* se snaží do věcí vměšovat a vše neúměrně nafoukne; to je však stěží dostatečný důvod pro popření celého procesu. Nebo ke stínání hlav těch, kteří se snaží o dorozumění, jen za to, že se odvážili vstoupit na cizí teritorium, aniž se předtím stali členy klubu a zavázali se dodržovat všechna stará klubovní pravidla.

Tedy zatímco si myslím, že jednotliví matematikové by měli být *povzbuzováni* k tomu, aby pamatovali na souvislosti s přírodními vědami (a v našich přednáškách pro studenty bychom se o to měli více snažit), nevidím žádný zvláštní důvod pro to, abychom na tom *trvali* nebo uvažovali o masívních změnách ve způsobu, jakým je matematika pěstována. Veškerý vědecký výzkum zahrnuje mnoho tápání v oblastech ležících na hranici možností lidského rozumu: mnoho této práce se nakonec může zdát „promarněno", ale to je součást celého procesu a je zde nesmírně optimistická představa, že *redukcí* kritérií pro sledování směru výzkumu vzroste celková efektivnost procesu.

Také není vždy rozumné nechat se svést „přímými" přístupy ke zřejmě praktickým problémům. Nemám představu o tom, kolik peněz a úsilí bylo vynaloženo na *přímé* numerické řešení parciálních diferenciálních rovnic, které by mělo z pozorovaných počátečních údajů vyvodit dlouhodobé předpovědi počasí; ale zdá se jakoby jediným možným přínosem takového projektu byly podružné výsledky, protože nestabilita, která je sledovaným jevům vlastní, pravděpodobně odsoudí všechny takové pokusy k nezdaru. Nepřímé metody jsou snad jiná záležitost.

Abychom shrnuli: Spojení mezi přírodními vědami a matematikou funguje na kolektivní a nikoliv individuální úrovni. Často je nepřímé a nedá se předpovědět, což dokazuje, že některá na pohled zřejmější kritéria významnosti (k čemu je to *nyní* dobré) jsou naivní a zjednodušující. A v šíři moderní matematiky je její síla, nikoliv slabost. Měli bychom čelit všem pokusům, jakkoli dobře míněným, matematiku zúžit a tím ji oslabit.

Literatura

[1] Arnol'd, V. I.: *Mathematical methods of classical mechanics.* Springer, New York, 1978.

[2] Berry, M. V., Balasz, N. L.: *Evolution of semiclassical quantum states in phase space.* J. Phys. A: Math. Gen. *12* (1979), 625—642.

[3] Berry, M. V., Lewis, Z. V.: *On the Weierstrass-Mandelbrot fractal function.* Proc. R. Soc. London *A 370* (1980), 459—484.

[4] Chow, S. - N., Hale, J. K., Mallet-Paret, J.: *Applications of generic bifurcation I, II.* Arch. Rat. Mech. Anal. *59* (1975), 159—188; 62 (1976), 209—236.

[5] Clifford, W. K.: *On the space theory of matter.* Lecture to the Cambridge Philosophical Society 1876, reprinted in The World of Mathematics (ed. J. R. Newman), Vol. I, Simon and Schuster, New York, 1956, 546—547.

[6] Dyson, F. J.: *Mathematics in the physical sciences.* In The Mathematical Sciences, MIT Press, Cambridge, MA, 1969, 97—115.

[7] Golubitsky, M., Langford, W. F.: *Classification and unfoldings of degenerate Hopf bifurcations.* Preprint, Univ. of Warwick, 1980.

[8] Hall, A. R.: *Philosophers at War: the quarell between Newton and Leibniz.* Cambridge Univ. Press, 1980.

[9] Hannay, J. H., Berry, M. V.: *Quantization of linear maps on a torus — Fresnel difraction by a periodic grating.* Preprint, H. H. Wills Physics Laboratory, Univ. of Bristol, 1980.

[10] Hermann, R.: *A view of applied mathematics.* Math. Intelligencer *1* (1978), 135—147.

[11] Jauch, J. M.: *Foundations of modern quantum mechanics.* Addison Wesley, Reading MA, 1968.

[12] Kac, M.: Math. Intelligencer *1* (1978) 97—98.

[13] Lorenz, E. N.: *Deterministic nonperiodic flow.* J. Atoms. Sci *20* (1963), 130—141.

[14] Mackey, G. W.: *Harmonic analysis as exploitation of symmetry — A historical survey.* Bull. Amer. Math. Soc. *3* (1980), 543—698.
[15] Marsden, J. E.: *Review of Treatise on Analysis by Jean Dieudonné.* Bull. Amer. Math. Soc. *3* (1980), 719—724.
[16] Poston, T.: Math. Intelligencer 1 (1978), 249.
[17] Schaeffer, D., Golubitsky, M.: *Boundary conditions and modejumping in the buckling of a rectangular plate.* Commun. Math. Phys. *69* (1979), 209—236.
[18] Smale, S.: *Review of Catastrofe theory: selected papers 1972—1977 by E. C. Zeeman.* Bull. Amer. Math. Soc. 84 (1978), 1360—1368.
[19] Ruelle, D., Takens, F.: *On the nature of turbulence.* Commun. Math. Phys. 20 (1971), 167—192.
[20] Steen, L. A.: *Mathematics Today.* In Mathematics Today —12 informal essays, Springer, New York, 1978, 1—12.
[21] Swinney, H. L., Fenstermacher, P. R., Gollub, J. P.: *Transition of turbulence in a fluid flow.* In Synergetics (ed. H. Haken) Springer, Berlin—Heidelberg—New York, 1977, 60—68.

Univerzální diferenciální rovnice

Lee A. Rubel, Urbana, Illinois, USA

Věnováno památce Waltera Strodta

Věta: *Existuje netriviální algebraická diferenciální rovnice* (dále ADR) *čtvrtého řádu*

$$P(y', y'', y''', y'''') = 0\,, \tag{*}$$

kde P je mnohočlen o čtyřech proměnných s celočíselnými koeficienty, která má tuto vlastnost:

Ke každé spojité funkci φ na R_1 a ke každé kladné spojité funkci ε na R_1 existuje nekonečně hladké řešení y rovnice $(*)$ takové, že

$$|y(t) - \varphi(t)| < \varepsilon(t)$$

pro všechna $t \in R_1$.

Tuto vlastnost má například homogenní rovnice sedmého stupně se sedmi členy

---

Lee A. Rubel: *A Universal Differential Equation*
Reprinted from Bulletin of the AMS, vol. *4*, pages 345—349, by permission of the American Mathematical Society.