Lee A. Rubel

Univerzální diferenciální rovnice (Věnováno památce Waltera Strodta)

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 28 (1983), No. 4, 209--213

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139182

[14] MACKEY, G. W.: *Harmonic analysis as exploitation of symmetry — A historical survey.* Bull. Amer. Math. Soc. *3* (1980), 543—698.
[15] MARSDEN, J. E.: *Review of Treatise on Analysis by Jean Dieudonné.* Bull. Amer. Math. Soc. *3* (1980), 719—724.
[16] POSTON, T.: Math. Intelligencer 1 (1978), 249.
[17] SCHAEFFER, D., GOLUBITSKY, M.: *Boundary conditions and modejumping in the buckling of a rectangular plate.* Commun. Math. Phys. *69* (1979), 209—236.
[18] SMALE, S.: *Review of Catastrofe theory: selected papers 1972—1977 by E. C. Zeeman.* Bull. Amer. Math. Soc. 84 (1978), 1360—1368.
[19] RUELLE, D., TAKENS, F.: *On the nature of turbulence.* Commun. Math. Phys. 20 (1971), 167—192.
[20] STEEN, L. A.: *Mathematics Today.* In Mathematics Today — 12 informal essays, Springer, New York, 1978, 1—12.
[21] SWINNEY, H. L., FENSTERMACHER, P. R., GOLLUB, J. P.: *Transition of turbulence in a fluid flow.* In Synergetics (ed. H. Haken) Springer, Berlin—Heidelberg—New York, 1977, 60—68.

Univerzální diferenciální rovnice

Lee A. Rubel, Urbana, Illinois, USA

Věnováno památce Waltera Strodta

Věta: *Existuje netriviální algebraická diferenciální rovnice* (dále ADR) *čtvrtého řádu*

$$(*) \qquad P(y', y'', y''', y'''') = 0\,,$$

kde P je mnohočlen o čtyřech proměnných s celočíselnými koeficienty, která má tuto vlastnost:

Ke každé spojité funkci φ na R_1 a ke každé kladné spojité funkci ε na R_1 existuje nekonečně hladké řešení y rovnice $(*)$ *takové, že*

$$|y(t) - \varphi(t)| < \varepsilon(t)$$

pro všechna $t \in R_1$.

Tuto vlastnost má například homogenní rovnice sedmého stupně se sedmi členy

---

LEE A. RUBEL: *A Universal Differential Equation*
Reprinted from Bulletin of the AMS, vol. *4*, pages 345—349, by permission of the American Mathematical Society.

$$(**)\qquad \begin{aligned} &3y'^4y''y''''^2 - 4y'^4y'''^2y'''' + 6y'^3y''^2y'''y'''' + \\ &+ 24y'^2y''^4y'''' - 12y'^3y''y'''^3 - 29y'^2y''^3y'''^2 + 12y''^7 = 0\,. \end{aligned}$$

Poznámka 1: Z důkazu bude vidět, že pro libovolnou prostou posloupnost $\{t_j\}$ reálných čísel takovou, že $t_j \to \infty$ pro $j \to \infty$ lze sestrojit řešení, které navíc splňuje podmínky

$$y(t_j) = \varphi(t_j)\,, \quad j = 1, 2, \ldots$$

Poznámka 2: Kromě toho lze dosáhnout, že řešení y je monotónní, pokud je monotónní funkce φ.

Poznámka 3: Jsou-li funkce φ a ε definovány na otevřeném intervalu I (místo na celém R_1), má naše rovnice řešení y definované na I a takové, že nerovnost

$$|y(t) - \varphi(t)| < \varepsilon(t)$$

platí pro všechna $t \in I$.

Nazveme stejnoměrné limity posloupností řešení rovnice jejími slabými řešeními. Důsledkem naší věty je, že každá spojitá funkce je slabým řešením rovnice (**).

(V tomto smyslu je funkce $y(t) = |t|$ slabým řešením rovnice $y \,.\, y' - t = 0$, neboť je to stejnoměrná limita funkcí $y_\varepsilon(t) = (t^2 + \varepsilon^2)^{1/2}$ pro $\varepsilon \to 0$).

Uvedená věta se dá interpretovat jako obdoba univerzálního Turingova stroje pro analogové počítače (viz [R], str. 23), a to na základě Shannonovy věty (viz [S], věta II), která identifikuje výstupy analogového počítače s řešeními algebraických diferenciálních rovnic.

Starší článek Pour-Elův požaduje jistou jednoznačnost řešení diferenciálních rovnic a je otevřeným problémem, zda v naší větě můžeme žádat, aby řešení y rovnice (*), které aproximuje φ, bylo jediným řešením při odpovídajících počátečních podmínkách. Podobně bychom mohli klást otázku, zda lze funkce φ aproximovat analytickými řešeními vhodných algebraických diferenciálních rovnic. K naší problematice se váže rovněž článek [J], kde jsou popsány jisté univerzální diofantické rovnice.

Podívejme se krátce na historii uvedené věty. V roce 1899 Borel nalezl společnou majorantu pro všechna řešení všech algebraických diferenciálních rovnic prvního řádu v okolí bodu v nekonečnu (viz [BO]). Tvrdil, že podobná majoranta existuje pro rovnice n-tého řádu, avšak v jeho důkazu byla mezera.

V článcích [BBV] a [V] z let 1932 a 1937 Vijaraghavan a jeho kolegové zkonstruovali algebraickou diferenciální rovnici druhého řádu s řešeními, která nemají a priori žádnou majorantu. V roce 1973 Babakhanian ukázal, že „věž" z n exponenciál splňuje ADR řádu n, ale není řešením žádné ADR nižšího řádu. Tedy ke každé ADR $P(t, \boldsymbol{u}) = 0$ existuje řešení u některé ADR $Q(t, \boldsymbol{u}) = 0$, které není řešením rovnice $P(t, \boldsymbol{u}) = 0$. (Symbol $\boldsymbol{u}$ užíváme pro vektor $(u, u', u'', \ldots, u^{(n)})$). V roce 1975 Bank (Viz [BA], Theorem 4) pozměnil příklad v článku [BBV] a použil ho ke konstrukci rostoucího řešení ADR třetího řádu, které nemá apriorní majorantu. Otevřeným problémem zůstává existence apriorních hranic pro ta řešení ADR v komplexní rovině, která jsou celými funkcemi. Tato otázka a některé příbuzné problémy jsou diskutovány v práci [BA].

Máme volné pole k úvahám na téma, zda řád 4 je v naší větě nejlepší možný.

Děkujeme Michaelu Filasetovi a C. Wardu Hensonovi za pomoc při strojových výpočtech. Vyjadřujeme své zvláštní uznání Lawrenci C. Brownovi, který poukázal na to, že tyto výpočty byly možné jen díky tomu, že mnoho členů se během výpočtu vyrušilo.

Důkaz věty: Vyjádříme polynom P v explicitním tvaru. Nechť

$$g(t) = e^{-1/(1-t^2)} \quad \text{pro} \quad -1 < t < 1$$
$$g(t) = 0 \quad \text{pro} \quad t \in R \setminus (-1, 1)$$

a nechť

$$f(t) = \int_{-\infty}^{t} g(s)\, ds\,,$$

Nazveme funkci f „primitivním S-modulem". Nyní g splňuje ADR

$$g'/g = -\frac{2t}{(1-t^2)^2}\,.$$

Odtud plyne, že funkce f a všechny její kombinace $af + b$, kde a, b jsou konstanty, splňují ADR druhého řádu

$$f''(t)\,.\,(1-t^2)^2 + f'(t)\,.\,2t = 0\,.$$

Myšlenka nyní záleží v nalezení (pomocí derivování a eliminací) algebraické diferenciální rovnice čtvrtého řádu, které vyhovuje jakákoliv funkce tvaru $y(t) = Af(\alpha t + \beta) + B.(A, B, \alpha, \beta$ jsou konstanty).

Naše původní metoda vedla k rovnici dvanáctého stupně, Lawrence G. Brown nalezl jednoduchý způsob, který vedl k rovnici sedmého stupně. S jeho laskavým svolením jej zde uvedeme:

Položíme-li $y = Af(\alpha t + \beta) + B$, dostáváme:

(1) $\quad y' = A\alpha f'$

(2) $\quad y'' = A\alpha^2 f''$

(3) $\quad y''' = A\alpha^3 f'''$

(4) $\quad y'''' = A\alpha^4 f''''$ pro $|s| < 1$

(i) $\quad f'(s) = e^{-1/(1-s^2)}$

(ii) $\quad f''(s) = -\dfrac{2s}{(1-s^2)^2}\,.\,e^{-1/(1-s^2)}$

(iii) $\quad f'''(s) = \dfrac{6s^4 - 2}{(1-s^2)^4}\,.\,e^{-1/(1-s^2)}$

(iv) $\quad f''''(s) = \dfrac{-24s^7 - 12s^5 + 40s^3 - 12s}{(1-s^2)^6}\,.\,e^{-1/(1-s^2)}\,.$

Mohli bychom nyní vyjádřit A, α, β prostřednictvím y', y'', y''' a t a dosadit do výrazu pro y''''. Místo toho však položíme $s = \alpha t + \beta$, $\tilde{A} = A\,.\,\exp\left(-1/(1-s^2)\right)$ a vyjádříme $\tilde{A}$, α a s. Vyruší se přitom překvapivě velké množství členů, takže vzniklá ADR je jednodušší, než bychom původně očekávali. Výpočty však nejsou příliš zábavné.

V novém označení má vzorec (1) tvar $\tilde{A}\alpha = y'$, takže formule (2) přejde ve

(2') $$y'' = \alpha y'(-2s/(1-s^2)^2)$$

a formule (3) ve

(3′) $$y''' = \alpha^2 y'((6s^4 - 2)/(1 - s^2)^4)\,.$$

Z (2′) vypočteme

$$\alpha = \frac{-y''}{y'} \cdot \frac{(1 - s^2)^2}{2s}\,,$$

což po dosazení dává

$$y''' = \frac{y''^2}{y'} \cdot \frac{3s^4 - 1}{2s^2}\,.$$

Odtud je

$$3y''s^4 - 2y'y'''s^2 - y''^2 = 0\,,$$

tedy

$$s^2 = \frac{y'y''' + \sqrt{(y'^2y'''^2 + 3y''^4)}}{3y''^2}\,.$$

Dosazením do (4) obdržíme

$$y'''' = -\frac{y''^3}{y'^2} \cdot \frac{-6s^6 - 3s^4 + 10s^2 - 3}{2s^2}\,.$$

Dosadíme do tohoto výrazu za s^2 a upravíme jmenovatele. Dostaneme

$$y'''' = \frac{1}{3y'^2y''}\left[2y'^2 \,.\, y'''^2 - 12y''^4 - 3y'y''^2y''' - {} \right.$$
$$\left. {} + (6y''^2 + 2y'y''')\sqrt{(y'^2y'''^2 + 3y''^4)}\right]\,.$$

Po odstranění zlomků a odmocniny dostaneme ADR osmého stupně, dělitelnou výrazem $3y''$, a to

$$3y'^4y''y''''^2 - 4y'^4y'''^2y'''' + 6y'^3y''^2y'''y'''' + 24y'^2y''^3y'''' -$$
$$-12y'^3y''y'''^3 - 29y'^2y''^3y'''^2 + 12y''^7 = 0\,.$$

Vydělením výrazem $3y''$ získáme hledanou rovnici (**).

Zbývá dokázat že řešení třídy C^∞ rovnice (**) aproximují danou spojitou funkci φ s přesností $\varepsilon(t)$. Protože spojitá funkce může být stejnoměrně aproximována po částech lineární funkcí, nevznikne nebezpečí, budeme-li brát samu funkci φ po částech lineární.

Nazveme „S-modulem" každou funkci tvaru $F(t) = af(\alpha t + \beta) + b$ na uzavřeném intervalu J; taková funkce je zřejmě konstantní v okolí koncových bodů intervalu J. Jestliže $J = [a, b]$, potom každý S-modul $\sigma(t)$ je funkce z C^∞, která nabývá nějaké hodnoty A v bodě a a hodnoty B v bodě b. Pro nějaké malé číslo $\delta > 0$ je konstantní na intervalech $[a, a + \delta]$, $[b - \delta, b]$ a je monotónní funkcí pro $a + \delta \leqq t \leqq b - \delta$. Je zřejmé, že každý S-modul splňuje rovnici (**). Kromě toho každý „S-řetězec" je také řešením (3). Zde „S-řetězcem" rozumíme libovolnou funkci třídy C^∞, která vznikne slepením nejvýše spočetně mnoha grafů S-modulů definovaných v sousedních intervalech.

Vezměme libovolný konečný interval K, na kterém je φ lineární. Rozdělíme K na velké množství N stejně dlouhých intervalů (N bude záviset na infimu funkce $\varepsilon(t)$, na K a na směrnici funkce φ na K) a sešijeme k sobě N malých S-modulů které interpolují φ v koncových bodech všech intervalů vzniklých dělením intervalu K. Protože φ je monotónní a protože S-moduly jsou také monotónní, je chyba v každém bodě $t \in K$ menší než $\varepsilon(t)$, pokud N je dosti velké. Nyní pokračujeme s dalšími lineárními „kousky" φ a spojíme všechny takto vzniklé S-moduly v nekonečný S-řetězec. Ten je, jak víme, nekonečně hladkým řešením rovnice (**) a výsledek je dokázán.

Poznámka: Právě jsem byl upozorněn, že R. C. Buck obdržel univerzální parciální algebraickou diferenciální rovnici. Využil přitom Kolmogorovova řešení Hilbertova třináctého problému. Článek R. V. Bucka *Řešení hladké parciální diferenciální rovnice mohou být hustá v $C(J)$* bude publikován v časopise „Journal of Differential Equations". (Během přípravy českého překladu tohoto textu Buckův článek v citovaném časopise skutečně vyšel, a to v čísle 2 svazku 41, ročník 1981).

Přeložil O. John

Literatura:

[BA] S. Bank: *Some results on analytic and meromorphic solutions of algebraic differential equations.* Adv. in Math. *15* (1975), 41—62.

[BAB] A. Babakhanian: *Exponentials in differentially algebraic extension fields.* Duke Math. J. *40* (1973), 455—458.

[BBV] N. Basu, S. Bose, and T. Vijayaraghavan: *A simple example for a theorem of Vijayaraghavan.* J. London Math. Soc. *12* (1937), 250—252.

[BE] Anatole Beck: *Uniqueness of flow solutions of differential equations.* Recent Advances in topological Dynamics (Proc. Conf. Topological Dynamics, Yale Univ., New Haven, Connecticut, 1972, in honor of gustav Arnold Hedlund), Lecture notes in Math., Vol *318*, Springer, Berlin, 1973, pp. 30—50.

[BO] E. Borel: *Memoire sur les series divergentes.* Ann. Sci. École Norm Sup. *16* (1899), 9—136.

[H] Philip Hartman: *Ordinary differential equations*, Wiley, New York, 1964. 18ff

[J] James P. Jones: *Undecidable diophantine equations.* Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) *3* (1980). 859—862.

[P-E] Marian B. Pour-El: *Abstract computability and its relations to the general purpose analog computer (some connections between logic, differential equations, and analog computers).* Trans. Amer. Soc. *199* (1974), 1—28.

[R] Hartley Rogers, Jr.: *Theory of recursive functions and effective computability.* McGraw-Hill, New York, 1967.

[S] C. E. Shannon: *Mathematical Theory of the differential analyzer.* J. Math. Phys. *20* (1941), 337—354.

[V] T. Vijayaraghavan: *Sur la croissance des fonctions définies par les equations differentielles.* C. R. Acad. Sci. Paris *194* (1932) 827—829.