K. J. Falconer

Digitální sluneční hodiny, paradoxní množiny a Vituškinova hypotéza

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 34 (1989), No. 4, 206--212

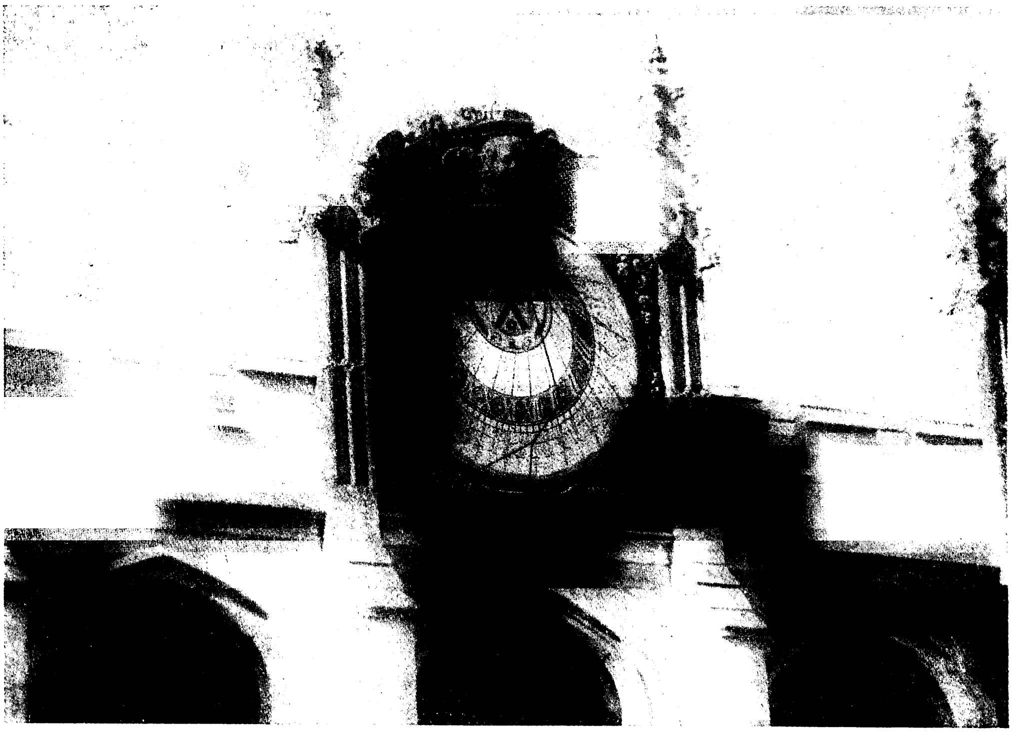
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139148

Digitální sluneční hodiny, paradoxní množiny a Vituškinova hypotéza

K. J. Falconer, Bristol

1. Úvod

Svět se v poslední době „digitalizoval". Důvěrně známé ciferníky hodin a hodinek jsou nahrazovány digitálními ukazateli času; digitální displeje vytlačují ručičky vah a voltmetrů i stupnice teploměrů. V tomto článku se zabýváme vrcholným příkladem digitalizace – ukážeme totiž, jak lze nahradit jeden z nejstarších měřicích přístrojů, a to sluneční hodiny, jeho digitálním protějškem.

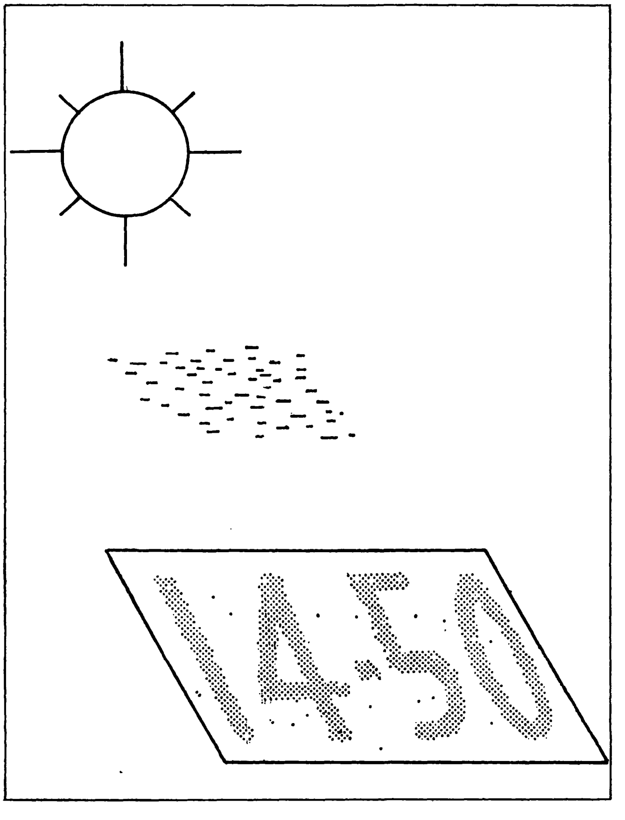


Obr. 1. Tradiční sluneční hodiny – All Souls College, Oxford.

K. J. Falconer: *Digital Sundials, Paradoxical Sets, and Vitushkin's Conjecture*. The Mathematical Intelligencer Vol. *9*, No. 1, 1987. Přeložil Miloš Zahradník.

Jedna z nejstarších zmínek o slunečních hodinách je v Izaiášovi (XXXVIII v 8) kde sluneční hodiny zaznamenávají otočení o 10° zemské rotace jako prorocký znak. Mnoho krásných a rozmanitých ukázek tradičních slunečních hodin je možno vidět na nádvořích středověkých zámků, domů a starých univerzit (viz obr. 1). Ideu *digitálních slunečních hodin* ukazuje obr. 2. Tyto „sluneční hodiny" sestávají z jistého — jak uvidíme, značně komplikovaného — „objektu" který je sestrojen tak, aby v každém okamžiku jeho stín vržený sluncem sestával ze zvýrazněných*) číslic vyjadřujících daný čas. Během pohybu slunce je stín vrhán do různých směrů a tak můžeme doufat v takové uspořádání, kde se číslice stínu budou při pohybu slunce odpovídajícím způsobem měnit. Řečeno matematicky, hledáme množinu $E \subset \mathbb{R}^3$ takovou, že ortogonální projekce (neboli stín z nekonečna) množiny E do roviny má v každém směru předepsaný (libovolně zvolený) tvar. Abychom potom dostali sluneční hodiny, stačí předepsat číslice časového údaje odpovídajícího každému konkrétnímu směru slunečních paprsků. Ve skutečnosti, uvažujeme-li též výšku slunce nad obzorem, můžeme takto „tisknout" i datum (dvojznačně)

Obr. 2. Digitální sluneční hodiny.



a konečně můžeme provést i výpis sezónní opravy uvedených údajů hodin. (Jako matematikové máme ovšem povoleno dělat fyzikální předpoklady, že sluneční paprsky jsou absolutně rovnoběžné a že difrakce nenastává.)

*) tzn. nenulové dvojdimenzionální míry — pozn. překladatele

Existují takové množiny? Striktně vzato nikoli, protože nemůžeme např. vytvořit objekt, který má neprázdný stín v jednom směru a prázdný v druhém. Pokud ovšem pracujeme s přesností „až na množiny míry nula", tzn. jestliže připustíme stíny lišící se od požadovaných jenom množinou míry nula, bude — jak naznačíme dále — odpověď kladná. Přesněji, dostáváme následující výsledek, který formulujeme pro projekce z R^n na jeho k-dimenziální podprostory. Je-li Π takový podprostor, označíme symbolem proj_Π ortogonální projekci z $\mathbb{R}^n$ na Π.

Věta 1. *Zvolme pevně $1 \leqq k < n$. Pro každý k-dimenzionální podprostor $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ mějme dánu množinu $G_\Pi \subset \Pi$ (předpokládáme měřitelnost zobrazení $\{\Pi \leftrightarrow G_\Pi\}$). Potom existuje $E \subset \mathbb{R}^n$ taková, že $G_\Pi \subset \mathrm{proj}_\Pi E$ pro všechna Π a $\mathrm{proj}_\Pi E \setminus G_\Pi$ má nulovou k-dimenzionální míru pro skoro všechna Π.*

(Čtenář neznající teorii míry by neměl být odrazen podmínkou měřitelnosti G_Π: cokoli „definovatelného" tuto podmínku splňuje). Abychom dostali naše sluneční hodiny, vezmeme $n = 3$, $k = 2$ a předepíšeme G_Π jako soubor číslic času odpovídajícího poloze, kdy slunce svítí kolmo na Π. Potom množina E z uvedené věty má projekci na Π lišící se od G_Π nejvýše množinou míry nula, a to pro skoro všechny směry (tzn. „výjimečné" směry pokrývají množinu míry 0 na jednotkové sféře).

2. Hausdorffova dimenze a projekce

Plošné obsahy projekcí dané množiny jsou v úzkém vztahu s její Hausdorffovou dimenzí. Nechť $E \subset \mathbb{R}^n$ a nechť $0 \leqq s \leqq n$, $\delta > 0$. Položme

$$\mathcal{H}^s_\delta(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (\mathrm{diam}\, U_i)^s : E \subset \bigcup_i U_i \,\&\, 0 < \mathrm{diam}\, U_i < \delta \right\},$$

kde infimum bereme přes všechna pokrytí E množinami U_i diametru nejvýše δ. Potom se zmenšováním δ roste $\mathcal{H}^s_\delta(E)$ a můžeme definovat *s-dimenzionální Hausdorffovu (vnější) míru* vztahem

$$\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(E) .$$

Není těžké ukázat, že existuje kritická hodnota, označovaná dim E, taková že $\mathcal{H}^s(E) = \infty$, pokud $s < \dim E$ a $\mathcal{H}^s(E) = 0$, pokud $s > \dim E$. Veličina dim E se nazývá *Hausdorffovou dimenzí* E a zobecňuje představu, že přímka či křivka má dimenzi 1, plocha má dimenzi 2 atd. Např. známé Cantorovo diskontinuum (vzniklé postupným „vytrháním" všech prostředních třetin zbylých intervalů z $\langle 0, 1 \rangle$) má dimenzi $\log 2/\log 3$. (Detailnější informaci lze nalézt ve Falconerovi [3]).

Následující výsledek, patřící Marstrandovi [5], má značnou důležitost v teorii Hausdorffových měr.

Věta 2. *Nechť $1 \leqq k < n$ jsou přirozená čísla. Nechť $E \subset \mathbb{R}^n$ je „rozumná" (tj. borelovská) množina. Potom platí:*

(a) *Jestliže* dim $E < k$, *tak* $\text{proj}_\Pi E$ *má nulovou k-dimenzionální míru pro všechny k-dimenzionální podprostory* Π.

(b) *Jestliže* dim $E > k$, *tak* $\text{proj}_\Pi E$ *má kladnou k-dimenzionální míru pro s.v. k-dimenzionální podprostory* Π.

Takže v dimenzi 3 objekt Hausdorffovy dimenze menší než 2 má stín nulové míry do všech rovin, avšak objekt dimenze větší než 2 má stín kladné míry skoro ve všech směrech.

Co se stane, když dim $E = k$? Ve skutečnosti se může stát téměř cokoli! Například: Křivka v rovině má projekce kladné míry do všech přímek (popř. až na jednu), zatímco množina v $\mathbb{R}^2$, jejíž body v 4-adické soustavě mají vyjádření

$$\{(.a_1a_2 \ldots, .b_1b_2 \ldots) : a_i, b_i = 0 \quad \text{nebo} \quad 3\},$$

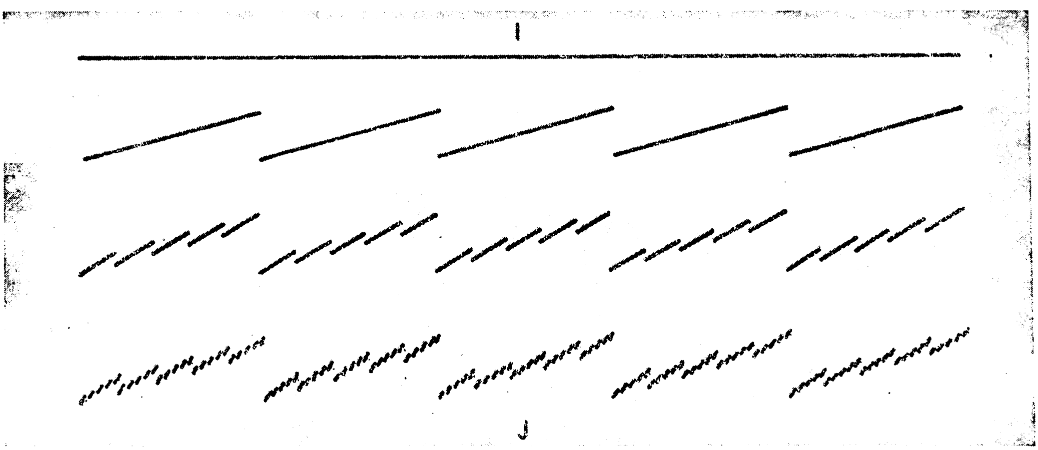
je též 1-dimenzionální množina, jejíž projekce mají však nulovou míru skoro ve všech směrech.

Právě v tomto kritickém případě je možné provést konstrukce natolik jemné, aby projekce měly vlastnosti požadované pro naše digitální sluneční hodiny.

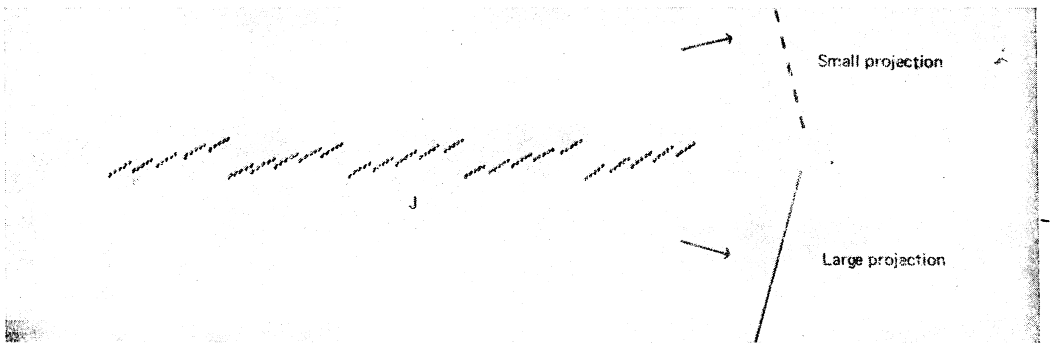
3. Konstrukce množin majících zadané projekce

V tomto odstavci naznačíme ideje důkazu Věty 1; detailní znění viz Falconer [4].

Za prvé, budeme pracovat v rovině. Nechť I je úsečka rovnoběžná s osou x, nechť l_Θ označuje přímku vedenou z počátku, která svírá s osou y úhel Θ proti směru hodinových ručiček. Můžeme nahradit I množinou J, sestávající z konečného souboru úseček tak, že projekce I a J na l_Θ vypadají „velmi podobně“, pokud $-\frac{1}{4}\pi < \Theta < 0$, ale přitom tak, že délka projekce J na l_Θ je „velmi malá“, pokud $0 < \Theta < \frac{1}{4}\pi$. Toho lze dosáhnout posloupností kroků naznačených na obr. 3 a 4. Při použití velkého počtu kroků a úseček



Obr. 3. Etapy konstrukce množiny J.



Obr. 4. Průměty množiny J (průmět šikmo vzhůru je přerušovaná úsečka, průmět šikmo dolů je plná úsečka).

můžeme přiblížit vlastnosti „velmi podobný", „velmi malý" tak blízko k „identický", „nulový", jak jenom chceme. (První konstrukce tohoto typu náleží Besikovičovi [1], jenž použil opakované nahrazení úseček ke konstrukci množiny v $\mathbb{R}^2$, která má 1-dimenzionální Hausdorffovu míru a přitom je projekce nulové délky ve všech směrech). Potom bude J „vypadat jako interval" z některých směrů a přitom bude „téměř neviditelná" z jiných směrů. Poměrně komplikovaným procesem založeným na dvojité indukci lze tuto konstrukci rozšířit do vyšších dimenzí. Takto lze ukázat následující tvrzení: Pro každou kouli B v $\mathbb{R}^n$, pro každý k-dimenzionální podprostor $\Pi_0 \subset \mathbb{R}^n$, každý úhel $\alpha > 0$ a $\varepsilon > 0$ lze najít množinu A takovou, že platí: Symetrická diference $(\mathrm{proj}_\Pi A)\ \Delta$ $\Delta\ (\mathrm{proj}_\Pi B)$ má k-dimenzionální míru nejvýše rovnou ε, jestliže úhel mezi Π a Π_0 je menší než α a zároveň $\mathrm{proj}_\Pi A$ má míru nejvýše ε, pokud tento úhel je větší než $\alpha + \varepsilon$. To je již „lokální" verze hlavní věty. Zbytek konstrukce záleží ve sjednocení velkého počtu takových množin, přičemž dbáme, aby ty množiny, které mají nezanedbatelnou projekci na Π, dávaly v souhrnu přiblížení předepsané množiny G_Π. Provedením limitních úvah dostáváme žádané přesné vlastnosti.

4. Duální formulace

Roku 1952 dokázal Roy Davies [2] pozoruhodný fakt, že libovolná podmnožina může být pokryta množinou přímek bez zvětšení její plochy. Přesněji: označíme-li symbolem m (Lebesgueovu) míru v rovině platí

Věta 3. *Nechť $F \subset \mathbb{R}^2$ je měřitelná. Potom existuje systém $\mathcal{S}$ přímek takový, že množina $L = \{x : x \in l$* pro nějakou *$l \in \mathcal{S}\}$ splňuje vlastnosti $F \subset L$ a $m(L \setminus F) = 0$.*

Naznačíme, jak lze tento výsledek odvodit z rovinné verze Věty 1 (pro $n = 2$, $k = 1$).

Nechť o je pevně zvolený počátek roviny a nechť l_Θ je přímka procházející o ve směru Θ. Pokud $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{o\}$, označme symbolem x' odpovídající bod v kruhové inverzi (takový že o, x, x' leží v přímce a $|ox|\ |ox'| = 1$). Označme symbolem $L(x)$ polární přímku k x, tzn. přímku kolmou k ox a procházející x'. Pro $E \subset \mathbb{R}^n$ definujme množinu $L(E) =$ $= \{y \in L(x)$ pro nějaké $x \in E\}$. Používáme zde tvrzení z elementární geometrie, že

$L(x) \cap l_\Theta$ and $\text{proj}_\Theta x$ jsou inverzní body (kde proj_Θ označuje ortogonální projekci l_Θ). Takže pro každou E jsou množiny $L(E) \cap l_\Theta$ a $\text{proj}_\Theta E$ vzájemně inverzní.

Abychom odvodili Větu 3 položme $G_\Theta = \{x' : x \in F \cap l_\Theta\}$ pro každé Θ. Podle Věty 1 můžeme nalézt takové $E \subset \mathbb{R}^2$, že $\text{proj}_\Theta E \subset G_\Theta$ pro všechna Θ a $\text{proj}_\Theta E$ a G_Θ mají stejnou délku pro skoro všechna Θ. Potom $L(E) \cap l_\Theta$ obsahuje inverzní množinu k G_Θ, tedy množinu $F \cap l_\Theta$, pro každé Θ. Takže $L(E) \supset F$. Navíc mají $L(E) \cap l_\Theta$ a $F \cap l_\Theta$ stejnou délku pro skoro všechna Θ, a tedy mají $L(E)$ a F stejnou míru. Volbou $\mathscr{S} = \{L(x), x \in E\}$ dostáváme Větu 3.

5. Vituškinova hypotéza

Finský matematik Pertti Mattila nedávno poznamenal, že konstrukce podobná té, která byla naznačena v odstavci 3, ukazuje, že důležitá Vituškinova hypotéza z teorie funkcí komplexní proměnné neplatí [6]. Nazvěme kompaktní množinu E v komplexní rovině *odstranitelnou*, pokud pro každou otevřenou množinu $V \supset E$ a každou omezenou analytickou funkci na $V \setminus E$ existuje její analytické rozšíření na V. Mnoho papíru bylo popsáno ve snaze dát geometrickou charakterizaci odstranitelných množin. Je již dlouho známo, že množiny E splňující podmínku $\dim E < 1$ jsou odstranitelné, na rozdíl od těch, pro něž je $\dim E > 1$. Navíc rektifikovatelná křivka nebo její podmnožina nenulové míry nejsou odstranitelné. Proto kritický případ je $\dim E = 1$. Tento poznatek spolu s četnými příklady vedl Vituškina k předpokladu, že E je odstranitelná právě tehdy, když její projekce jsou v podstatě nulové, tj. když projekce do skoro všech přímek procházejících počátkem mají nulovou délku.

Předpokládejme, že V je otevřená množina v komplexní rovině a f je konformní zobrazení z V na $f(V)$ takové, že obraz nějaké úsečky je zakřiven. Mattila ukázal, že je možno sestrojit množinu E (opakovaným nahrazováním úseček skupinami kratších úseček podobně jako v konstrukci odstavce 3), která má v podstatě nulové projekce a přitom projekce $f(E)$ na každou přímku má kladnou délku. Odtud plyne, že vlastnost „všechny projekce jsou v podstatě nulové" není invariantní vůči konformním transformacím. V protikladu s tím je odstranitelnost zřejmě vlastností, která se zachovává při konformním zobrazení, takže uvedené dvě vlastnosti nemohou být ekvivalentní. Vituškinova hypotéza neplatí.

Není dosud známo, zdali musí mít odstranitelná množina v podstatě nulové projekce, a obráceně. Mattilův příklad prostě ukazuje, že tyto dvě implikace nemohou platit zároveň.

Literatura

[1] A. S. Besicovitch: *On the fundamental geometrical properties of linearly measurable sets of points.* Math. Ann. *98* (1928), 422—464.

[2] R. O. Davies: *On accessibility of plane sets and differentiation of functions of two real variables.* Proc. Cambridge Philos. Soc., *48* (1952), 215—232.

[3] K. J. Falconer: *The Geometry of fractal sets.* Cambridge University Press, 1985.

[4] K. J. FALCONER: *Sets with prescribed projections and Nikodym sets*. Proc. London Math. Soc. (3), 53 (1986), 48—64.

[5] J. M. MARSTRAND: *Some fundamental geometric properties of plane sets of fractional dimensions*. Proc. London Math. Soc. (3), 4 (1954), 257—302.

[6] P. MATTILA: *Smooth maps, null sets for integralgeometric measure and analytic capacity*. Ann. Math. *123* (1986), 303—309.

Pulsary a kvazary: podobnosti a rozdíly

Vladimír Karas, Praha

I. Úvod

Uplynulo téměř tisíc let od okamžiku, kdy jedna z hvězd souhvězdí Býka dospěla při svém vývoji do dramatické etapy, kterou dnes nazýváme výbuchem supernovy. Tento proces je charakterizován gravitačním smrštěním centrální části hvězdy spojeným s gigantickou explozí a odmrštěním povrchových vrstev. Šlo o jednu z více než 600 dosud pozorovaných supernov, jejíž popis se nám zachoval v čínských a japonských záznamech a která je také zachycena na jeskynních malbách v Arizoně. Supernovu bylo možné vidět po tři týdny za denního světla a po téměř 600 nocí. Pozůstatky exploze postupně zeslábly a přestaly být pozorovatelné prostým okem. Avšak i dnes registrujeme v místě někdejší supernovy Krabí mlhovinu, útvar o průměru asi 5 obloukových minut, který je poměrně silným zdrojem rádiového, infračerveného, viditelného, rentgenového i γ-záření. V jejím středu je pulsar, bodový objekt vysílající elektromagnetické signály s nesmírně stabilní periodou 0,33 s. Výjimečnost tohoto objektu je dána jeho astronomicky nepatrným stářím a malou vzdáleností od Země (asi 1400 pc). Základní scénář je však zřejmě společný pro všech více než 300 dosud objevených pulsarů: rychle rotující neutronová hvězda se silným magnetickým polem obklopená hmotou ve formě plazmy.

Neutronové hvězdy jako jedno z konečných stadií hvězdné evoluce byly studovány již v třicátých letech. V roce 1967, ještě před objevem pulsarů, počítal Pacini [1] přenos energie z rotující magnetizované neutronové hvězdy do okolní mlhoviny. Je pozoruhodné, jak velký díl našich znalostí o pulsarech byl nalezen během dvou let po objevu prvního z nich, PSR 1919+21, A. Hewishem a S. J. Bellovou 28. listopadu 1967 [2]. Interpretace pulsarů jako rotujících neutronových hvězd byla poprvé rozpracována Goldem [3]. (Téměř úplná bibliografie prací o pulsarech do r. 1981 je v přehledovém článku Michela [4].) Existují tři klíčové problémy, které musí teorie pulsarů vysvětlit: proces emise záření, mechanismus dávkující pozorované záření do extrémně pravidelných pulsů a pro-