Karel Šindelář
Dotyk a oskulace v analytické geometrii

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 15 (1970), No. 3-4, 101--114

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139139

POKROKY MATEMATIKY, FYZIKY A ASTRONOMIE
ROČNÍK XV — ČÍSLO 3—4

DOTYK A OSKULACE V ANALYTICKÉ GEOMETRII

KAREL ŠINDELÁŘ, Žilina

Pojem oskulace a dotyku bývá čím dále tím více odsunován z analytické geometrie do geometrie diferenciální. Domnívám se, že se tím analytická geometrie zbytečně ochuzuje, neboť právě její dnešní pojetí — dokonce již na úrovni střední školy — dává poměrně účinné nástroje ke studiu těchto jevů, a to zcela nezávisle na matematické analýze, zejména na pojmech limita a derivace. Na několika dalších stránkách bych rád ukázal, jak si studium dotyku a oskulace již v analytické geometrii představuji.

Přímka určená parametrickými rovnicemi

$$x = x_0 + v_x t\,, \qquad y = y_0 + v_y t \tag{1}$$

protíná rovinnou čáru o rovnici

$$F(x, y) = 0 \tag{2}$$

v bodech odpovídajících těm hodnotám parametru t, jež jsou kořeny rovnice

$$F(x_0 + v_x t, y_0 + v_y t) = 0\,. \tag{3}$$

Může však nastat i případ, že některé kořeny rovnice (3) jsou vícenásobné. Tento případ určitě nastane, když přímka (1) prochází vícenásobným bodem čáry (2), a to tak, že je-li to k-násobný bod čáry, je příslušný kořen rovnice (3) pro t aspoň k-násobný. Je-li však bod odpovídající vícenásobnému — na příklad k-násobnému — kořenu rovnice pro t jednoduchým bodem dané čáry (2), znamená to, že v něm splynulo k společných bodů přímky (1) s danou čarou (2), že v něm tedy nastal dotyk nebo i oskulace přímky s danou čarou. V případě $k = 2$ je přímka obyčejnou tečnou čáry, v případě $k > 2$ je přímka inflexní tečnou $(k - 2)$-ho řádu dané čáry v příslušném bodě.

Z toho vyplývá velmi jednoduché parametrické určení tečny dané čáry (2) v jejím daném bodě $P_0(x_0; y_0)$. Označme neznámý směrový vektor hledané tečny $\mathbf{V}\{v_x; v_y\}$, takže její parametrické rovnice budou (1). Dosazením z těchto rovnic za x a y do rovnice dané čáry (2) dostaneme algebraickou rovnici (3) pro t nejvýše takového stupně, jakého je rovnice dané čáry. Jeden kořen takto utvořené rovnice pro t je však nula, neboť jemu odpovídá bod P_0 zvolený na dané čáře (2). To znamená, že absolutní člen rovnice (3) pro t je nula. Tento nulový kořen rovnice pro t je potom jejím kořenem aspoň dvojnásobným, vymizí-li i její lineární člen, to znamená je-li rovný nule i koeficient při jejím lineárním členu. Je-li P_0 jednoduchým bodem čáry (2), je tvar koeficientu při lineárním členu rovnice pro t

$$av_x - bv_y,$$

přičemž obě čísla a, b nejsou zároveň rovna nule.

Zvolíme-li pak $v_x = b$, $v_y = a$ a dosadíme-li do parametrických rovnic přímky (1), dostaneme parametrické vyjádření hledané tečny, která se čáry (2) dotýká v jejím jednoduchém bodě $P_0(x_0; y_0)$.

Anulují-li souřadnice takto nalezeného vektoru $\mathbf{V}\{b; a\}$ kromě toho i koeficienty při členech vyšších stupňů rovnice pro t, je nalezená tečna inflexní, a to řádu $(k - 2)$-ho, jsou-li souřadnicemi vektoru $\mathbf{V}$ anulovány koeficienty při členech druhého, třetího,... $(k - 1)$-ho stupně, ne však již koeficient při členu k-tého stupně rovnice pro t.

Na příklad parabola n-tého stupně

$$y = x^n \tag{4}$$

(kde n je přirozené číslo, $n > 1$) má v počátku tečnu, jejíž parametrické vyjádření dostaneme, dosadíme-li z parametrických rovnic přímky procházející počátkem

$$\begin{aligned} x &= v_x t \\ y &= v_y t \end{aligned} \tag{5}$$

do rovnice paraboly (4). Dostaneme tak podle očekávání rovnici n-tého stupně pro t

$$v_x^n t^n - v_y t = 0$$

bez absolutního členu. Položíme-li rovný nule ještě koeficient při členu lineárním, dostaneme $v_y = 0$, a za v_x lze potom zvolit libovolné číslo (až na nulu), na příklad $v_x = 1$. Parametrické rovnice hledané tečny tedy jsou $x = t$, $y = 0$. Druhá z nich je pak i obyčejnou rovnicí tečny $y = 0$. Osa x je tedy tečnou dané paraboly n-tého stupně v počátku, a to obyčejnou v případě obyčejné kvadratické paraboly $(n = 2)$ a inflexní $(n - 2)$-ho řádu v případě paraboly, jejíž stupeň n je vyšší než 2.

Jinak však tomu je, je-li zvolený bod $P_0(x_0; y_0)$ vícenásobným (na příklad k-násobným) bodem čáry (2) n-tého stupně $(n > k)$. Dosazením z parametrických rovnic přímky (1) do rovnice dané čáry (2) dostaneme i v tomto případě rovnici (3) pro t nejvýše n-tého stupně, ve které však vedle absolutního členu chybí ještě další členy nejnižších stupňů až ke členu $(k - 1)$-ho stupně. Teprve člen k-tého stupně nechybí a jeho koeficient má tvar binární formy k-tého stupně ve v_x, v_y

$$c_k v_x^k + c_{k-1} v_x^{k-1} v_y + \ldots + c_1 v_x v_y^{k-1} + c_0 v_y^k\,, \tag{6}$$

v níž mohou být po případě rovny nule některé z koeficientů c_0, c_1, ... c_k, nikoli však všechny tyto koeficienty.

Rozložme takto nalezenou binární formu na k forem lineárních (to je vždy možné nad tělesem čísel komplexních, někdy již nad tělesem čísel reálných); dostaneme

$$(a_1 v_x - b_1 v_y)(a_2 v_x - b_2 v_y) \ldots (a_k v_x - b_k v_y)\,. \tag{7}$$

Je nyní zřejmé, že zvolíme-li v_x a v_y tak, abychom anulovali některého z těchto činitelů, dostaneme tečnu některé větve dané čáry v jejím bodě P_0. Těchto tečen je nejvýše k, ale může jich být i méně, což nastane v případě, když směrový vektor $\boldsymbol{V}\{v_x;\, v_y\}$ některé tečny anuluje zároveň dva nebo i několik činitelů nalezeného součinu (7). Je-li takových anulovaných činitelů h $(1 < h \leqq k)$, lze tečnu považovat za h-násobnou tečnu dané čáry (2) v příslušném jejím bodě P_0. (Tento případ nastane, je-li P_0 bod úvratu nebo dotykový uzel dané čáry.)

Směrový vektor tečny $\boldsymbol{V}\{v_x;\, v_y\}$ takto nalezený může ovšem svými souřadnicemi anulovat i koeficient při členu $(k + 1)$-ho stupně rovnice (3) pro t, případně i koeficienty při jejích členech vyšších stupňů až do $(k + r)$-tého; pak je tato tečna inflexní, a to r-tého řádu.

Na příklad Descartesův list

$$x^3 + y^3 - 2xy = 0 \tag{8}$$

má v počátku, který je jeho bodem dvojnásobným, tečny, jejichž směr určíme dosazením z parametrických rovnic přímky procházející počátkem (5) do jeho rovnice (8); po úpravě dostaneme rovnici pro t

$$(v_x^3 + v_y^3)\, t^3 - 2 v_x v_y t^2 = 0\,. \tag{9}$$

Koeficient při jejím kvadratickém členu vymizí, nabude-li v_x nebo v_y hodnoty nula. Má tedy daná čára v počátku dvě tečny se směrovými vektory $\boldsymbol{V}_1\{1;\, 0\}$ a $\boldsymbol{V}_2\{0;\, 1\}$, což jsou přímky $y = 0$ a $x = 0$, tedy osy soustavy souřadnic. Obě nalezené tečny jsou obyčejné, žádná z nich není inflexní, neboť ani jeden z nalezených vektorů neanuluje koeficient při vyšším tj. kubickém členu rovnice (9) pro t.

Naproti tomu tečny kissoidy

$$x^3 + xy^2 - 2y^2 = 0 \tag{10}$$

v počátku, který je rovněž i jejím dvojnásobným bodem, se chovají již poněkud jinak. Dosazením z parametrických rovnic přímky procházející počátkem (5) do rovnice kissoidy (10) dostaneme (po úpravě) rovnici

$$(v_x^3 + v_x v_y^2)\, t^3 - 2v_y^2 t^2 = 0\,, \tag{11}$$

tedy opět kubickou rovnici pro t, v níž chybí člen lineární a absolutní. Položíme-li i koeficient při jejím kvadratickém členu rovný nule, dostaneme pro směrový vektor tečny kvadratickou rovnici

$$2v_y^2 = 0\,,$$

jejíž oba kořeny splývají v jediný dvojnásobný. Proto splývají i oba směrové vektory tečen v jediný $\boldsymbol{V}\{1; 0\}$, a tedy i obě tečny v jedinou dvojnásobnou tečnu $y = 0$ dané kissoidy v počátku. Tato tečna však není inflexní, neboť její směrový vektor $\boldsymbol{V}\{1; 0\}$ neanuluje koeficient při kubickém členu rovnice (11) pro t.

Konečně lemniskáta

$$(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0 \tag{12}$$

má dvojnásobný bod rovněž v počátku soustavy souřadnic. Dosaďme tedy k určení jejích tečen v tomto bodě opět z parametrických rovnic přímky procházející počátkem (5) do rovnice lemniskáty (12); dostaneme tak rovnici pro t

$$(v_x^2 + v_y^2)^2 t^4 - 2(v_x^2 - v_y^2)\, t^2 = 0\,. \tag{13}$$

Položíme-li i v tomto případě koeficient při nenulovém členu nejnižšího stupně tj koeficient při členu kvadratickém rovný nule, dostaneme rovnici

$$v_x^2 - v_y^2 = 0\,,$$

tedy po provedení rozkladu

$$(v_x - v_y)(v_x + v_y) = 0\,.$$

To vede ke dvěma různým směrům tečen určeným vektory $\boldsymbol{V}_1\{1; 1\}$ a $\boldsymbol{V}_2\{1; -1\}$. Pro každý z nich je však rovný nule i koeficient při kubickém členu rovnice (13) pro t, neboť tento člen v rovnici (13) chybí. Naproti tomu žádný z obou nalezených vektorů neanuluje svými souřadnicemi koeficient při členu čtvrtého stupně rovnice (13) pro t. Má tedy daná lemniskáta v počátku dvě různé tečny $x - y = 0$ a $x + y = 0$, jež jsou obě jejími tečnami inflexními, a to prvního řádu.

*

Přistupme nyní k obdobným útvarům v prostoru. Předpokládejme, že je dána v prostoru algebraická plocha rovnicí n-tého stupně

$$F(x, y, z) = 0 \tag{14}$$

a mějme nejprve za úkol určit její tečnou rovinu v jejím daném regulárním bodě $P_0(x_0; y_0; z_0)$.

Každou přímku procházející bodem $P_0(x_0; y_0; z_0)$ lze vyjádřit parametrickými rovnicemi

$$
\begin{aligned}
x &= x_0 + v_x t \\
y &= y_0 + v_y t \\
z &= z_0 + v_z t\,,
\end{aligned}
\tag{15}
$$

kde $\mathbf{V}\{v_x; v_y; v_z\}$ je její směrový vektor.

Hledejme nejprve, které z těchto přímek jsou tečnami dané plochy (14) v bodě P_0. Jsou to zřejmě ty přímky, jejichž aspoň dva společné body s uvedenou plochou (14) v bodě P_0 splývají.

Dosaďme tedy z parametrických rovnic přímky (15) do dané rovnice plochy (14); tak dostaneme algebraickou rovnici nejvýše n-tého stupně pro t

$$
F(x_0 + v_x t, y_0 + v_y t, z_0 + v_z t) = 0 \tag{16}
$$

bez absolutního členu. To proto, že rovnice (16) pro t má nulový kořen $t = 0$, jemuž odpovídá bod P_0, který je zřejmě společným bodem obou útvarů. Naproti tomu lineární člen rovnice (16) pro t nemůže vymizet identicky (protože P_0 je regulárním bodem dané plochy), takže v jeho koeficientu tvaru

$$
av_x + bv_y + cv_z \tag{17}
$$

je aspoň jedno z čísel a, b, c různé od nuly.

Všechny vektory $\mathbf{V}\{v_x; v_y; v_z\}$ anulující svými souřadnicemi uvedený koeficient při lineárním členu rovnice (16) pro t určují však směry přímek, majících s danou plochou (14) v bodě P_0 aspoň dvojnásobný společný bod, tedy tečen dané plochy v bodě P_0. To jsou však právě všechny vektory kolmé na vektor $\mathbf{N}\{a; b; c\}$ (a vedle nich i vektor nulový, ale ten z našeho hlediska nemá význam, neboť neurčuje žádný směr). Je tedy vektor $\mathbf{N}\{a; b; c\}$ směrovým vektorem normály dané plochy v jejím bodě P_0, takže tuto normálu lze vyjádřit parametrickými rovnicemi

$$
\begin{aligned}
x &= x_0 + at \\
y &= y_0 + bt \\
z &= z_0 + ct\,.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

A protože vektor $\mathbf{N}\{a; b; c\}$ je kolmý i na tečnou rovinu plochy (14) v jejím bodě P_0, je rovnice hledané tečné roviny

$$
a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \tag{19}
$$

neboli

$$(20) \qquad ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0 .$$

Všimněme si ještě, že rovnici hledané tečné roviny lze napsat prostě tak, když do výrazu (17) dosadíme za souřadnice vektoru $\boldsymbol{V}\{v_x; v_y; v_z\}$ rozdíly souřadnic běžného bodu tečné roviny $P(x; y; z)$ a jejího bodu dotykového (tečného) $P_0(x_0; y_0; z_0)$, tedy rozdíly $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$, a vzniklý výraz položíme rovný nule. Tak vznikne právě rovnice (19).

Tečny, jejichž směrové vektory anulují svými souřadnicemi vedle koeficientu při lineárním členu rovnice pro t i koeficient při jejím členu kvadratickém, případně i koeficienty při členech vyšších stupňů rovnice pro t, mají s danou plochou v bodě P_0 společný bod více než dvojnásobný. V nejjednodušším případě určují asymptotické směry dané plochy (14) v jejím regulárním bodě P_0, neboť jsou tam asymptotami její Dupinovy indikatrix.

Nelze však vyloučit ani tu možnost, že koeficient při kvadratickém členu rovnice pro t, což je ternární kvadratická forma ve v_x, v_y, v_z, se rozpadá na součin dvou forem lineárních, mezi nimiž se vyskytuje jako jeden z činitelů koeficient (17) při lineárním členu této rovnice (16) pro t. Potom každá tečna má s danou plochou (14) v jejím regulárním bodě P_0 dotyk aspoň trojbodový, takže bod P_0 je planárním bodem plochy (14).

Na příklad každá přímka procházející regulárním bodem $P_0(2; 1; 4)$ plochy

$$x^2 - 4yz + 6x = 0$$

má parametrické rovnice

$$x = 2 + v_x t$$
$$y = 1 + v_y t$$
$$z = 4 + v_z t .$$

Dosadíme-li z nich za x, y, z do rovnice plochy, dostaneme rovnici pro t, jež po úpravě nabude tvaru

$$(v_x^2 - 4v_y v_z)\, t^2 + (10v_x - 16v_y - 4v_z)\, t = 0 ,$$

z něhož je zřejmé, že je to kvadratická rovnice, která má jeden kořen nulový, protože chybí její absolutní člen. Tomuto kořenu odpovídá parametrickými rovnicemi přímky bod $P_0(2; 1; 4)$. Bod P_0 bude pak dvojnásobným společným bodem přímky s plochou, bude-li odpovídat dvojnásobnému nulovému kořenu rovnice pro t, což nastane, když bude platit $10v_x - 16v_y - 4v_z = 0$ čili $5v_x - 8v_y - 2v_z = 0$. Všechny vektory splňující tuto podmínku jsou směrové vektory tečen, které se dané plochy v bodě $P_0(2; 1; 4)$ dotýkají. To jsou však právě všechny vektory kolmé na vektor $\boldsymbol{N}\{5; -8; -2\}$, s nímž jejich skalární součin je rovný nule. Nalezený vektor $\boldsymbol{N}$ je tedy vektor normály dané plochy v bodě P_0, takže rovnice této normály jsou

$$\frac{x-2}{5} = \frac{y-1}{-8} = \frac{z-4}{-2}$$

a rovnice tečné roviny dané plochy v bodě P_0 je

$$5(x-2) - 8(y-1) - 2(z-4) = 0\,,$$

to je

$$5x - 8y - 2z + 6 = 0\,.$$

Mezi směry všech tečen jsou asymptotické směry právě ty, jejichž směrové vektory anulují i koeficient při členu kvadratickém rovnice pro t, tedy výraz $v_x^2 - 4v_yv_z$. Jsou to vektory $\mathbf{V}_1\{2;1;1\}$ a $\mathbf{V}_2\{8;1;16\}$, jejichž souřadnice však potom anulují celou rovnici pro t, neboť ta je jen kvadratická. Přímky, které s bodem $P_0(2;1;4)$ určují,

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-4}{1}$$

a

$$\frac{x-2}{8} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-4}{16}\,,$$

leží tedy celé nejen v nalezené tečné rovině $5x - 8y - 2z + 6 = 0$, nýbrž v tomto případě i na dané ploše $x^2 - 4yz + 6x = 0$, neboť jsou průsečnicemi obou uvedených ploch.

V případě vícenásobného bodu $P_0(x_0; y_0; z_0)$ plochy (14) chybí v rovnici (16) pro t vedle absolutního členu ještě vyšší členy, a to člen lineární, kvadratický, kubický a další členy až do členu $(k-1)$-ho stupně, je-li násobnost bodu P_0 na dané ploše (14) právě k. Koeficient při členu k-tého stupně rovnice pro t je pak ternární forma k-tého stupně ve v_x, y_y, v_z, jež není identicky rovna nule.

Dosazením výrazů $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ postupně za v_x, v_y, v_z do této formy a jejím anulováním dostaneme rovnici kuželové plochy k-tého stupně, která má vrchol v bodě P_0. Je to kuželová plocha tečen, které se v bodě P_0 dané plochy (14) dotýkají. Všechny tyto přímky mají s danou plochou v bodě P_0 společný bod aspoň $(k+1)$násobný, některé z nich (jejichž směrové vektory anulují i koeficienty u členů $(k+1)$-ho stupně, případně i vyšších stupňů rovnice (16) pro t, mají s danou plochou (14) v bodě P_0 společný bod více než $(k+1)$násobný.

Ke kuželovým plochám dojdeme i vedením všech tečen k dané ploše z bodu ležícího mimo tuto plochu. Jako příklad veďme z bodu $P_0(0; 0; -1)$ ležícího mimo plochu

$$x^2 + y^2 - z = 0$$

všechny tečny k této ploše a napišme rovnici kuželové plochy všech těchto tečen.

Přímka procházející bodem $P_0(0; 0; -1)$

$$x = v_x t$$
$$y = v_y t$$
$$z = -1 + v_z t$$

se s danou plochou protíná v bodech odpovídajících těm hodnotám parametru t, které jsou kořeny rovnice

$$(v_x t)^2 + (v_y t)^2 - (-1 + v_z t) = 0\,,$$

jež vznikne dosazením za x, y, z z parametrických rovnic přímky do rovnice dané plochy. Úpravou a seřazením jednotlivých členů rovnice pro t dostaneme

$$(v_x^2 + v_y^2)\, t^2 - v_z t + 1 = 0\,.$$

Protože dvojnásobný průsečík odpovídá dvojnásobnému kořenu rovnice pro t, určují souřadnice vektoru $\boldsymbol{V}$ právě tehdy směr hledané tečny, je-li kořen rovnice pro t dvojnásobný, tedy je-li její diskriminant rovný nule

$$v_z^2 - 4(v_x^2 + v_y^2) = 0\,,$$

to je platí-li

$$4v_x^2 + 4v_y^2 - v_z^2 = 0\,.$$

Do tohoto vztahu je ještě třeba za v_x, v_y, v_z postupně dosadit rozdíly $x - 0 = x$, $y - 0 = y$, $z - (-1) = z + 1$, čímž dostaneme po úpravě

$$4x^2 + 4y^2 - z^2 - 2z - 1 = 0\,,$$

což je rovnice hledané kuželové plochy tečen.

Hledejme ještě tečnu čáry, která je v prostoru dána jako průnik dvou ploch

(21) $$F_1(x, y, z) = 0 \quad \text{a} \quad F_2(x, y, z) = 0\,,$$

a to v jejím bodě P_0. Je-li P_0 regulárním bodem obou ploch, jež se v dané čáře protínají, stačí určit tečné roviny každé z těchto ploch v bodě P_0. Hledaná tečna je potom průsečnicí obou nalezených tečných rovin. V případě, že P_0 je singulárním bodem některé z obou ploch, je pak tečen více, pokud všechny nesplývají v jedinou tečnu vícenásobnou.

*

V dalším zobecníme své dosavadní úvahy tak, aby se hodily i pro zkoumání aspoň některých útvarů transcendentních.

Mějme nejprve rovinnou čáru danou parametrickými rovnicemi takovými, že funkce, které v nich vystupují, lze vyjádřit mocninnými řadami

(22)
$$x = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots$$
$$y = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + \dots$$

a hledejme tečnu této čáry v bodě, který odpovídá (pro jednoduchost) hodnotě parametru $t = 0$, tj. v bodě $P_0(a_0; b_0)$. Každou přímku procházející bodem P_0 lze vyjádřit rovnicí

(23)
$$h(y - b_0) = k(x - a_0), \quad \text{kde}$$
$$(h, k) \neq (0, 0).$$

Dosadíme-li do ní z parametrických rovnic dané čáry (22), dostaneme

(24)
$$h(b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + \dots) = k(a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots).$$

To je rovnice pro t, v níž chybí absolutní člen, takže má kořen $t = 0$, jemuž v daném parametrickém vyjádření čáry (22) odpovídá společný bod P_0 s přímkou. Zvolíme-li čísla h a k tak, aby v rovnici (24) pro t vymizel i člen lineární (čehož lze dosáhnout třeba volbou $h = a_1$, $k = b_1$), bude v bodě P_0 aspoň dvojnásobný společný bod přímky s danou čarou, takže přímka

(25)
$$a_1(y - b_0) = b_1(x - a_0)$$

je tečnou dané čáry (22) v bodě P_0.

Tato tečna je obyčejná, neanuluje-li se touto volbou h a k koeficient při kvadratickém členu rovnice (24) pro t. Jinak je to tečna inflexní, a to řádu $(s - 2)$-ho, je-li nejnižší člen rovnice (24), který tak není anulován, stupně s-tého.

Při nulových hodnotách obou koeficientů u lineárních členů rovnic (22) $a_1 = 0$ i $b_1 = 0$ má každá přímka procházející bodem $P_0(a_0; b_0)$ s čarou styk aspoň dvojbodový, neboť v rovnici pro t vedle členu absolutního chybí i člen lineární. Předpokládejme hned pro větší obecnost, že v rovnici (24) pro t chybí i koeficienty členů třetího stupně, čtvrtého stupně a vyšších stupňů, až koeficient při členu $(s - 1)$-ho stupně, ale nechybí již koeficient při členu s-tého stupně. Rovnice (24) pro t má potom tvar

$$h(b_s t^s + b_{s+1} t^{s+1} + \dots) = k(a_s t^s + a_{s+1} t^{s+1} + \dots)$$

a přímku mající pak s danou čarou (22) v bodě P_0 dotyk aspoň $(s + 1)$-bodový dostaneme, položíme-li $h = a_s$, $k = b_s$.

Jako další vezměme v úvahu čáru v prostoru danou parametrickými rovnicemi

(26)
$$x = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots$$

$$y = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + \dots$$
$$z = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + \dots$$

a podobně i v tomto případě hledejme její tečnu v bodě, který odpovídá nulové hodnotě parametru $t = 0$, což je v bodě $P_0(a_0; b_0; c_0)$.

Každá rovina procházející bodem P_0 má rovnici

$$h(x - a_0) + k(y - b_0) + m(z - c_0) = 0 \tag{27}$$
$$(h, k, m) \neq (0, 0, 0) .$$

Dosadíme-li do ní z parametrických rovnic (26) dané čáry, dostaneme

$$h(a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots) + k(b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + \dots) +$$
$$+ m(c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + \dots) = 0 ,$$

to je

$$(ha_1 + kb_1 + mc_1)\, t + (ha_2 + kb_2 + mc_2)\, t^2 + \tag{28}$$
$$+ (ha_3 + kb_3 + mc_3)\, t^3 + \dots = 0 .$$

V této rovnici pro t chybí absolutní člen, takže jeden její kořen je nula. Tomuto kořenu odpovídá společný bod P_0 roviny s danou čarou. K tomu, aby se rovina (27) dané čáry (26) v bodě P_0 dotýkala, je třeba, aby nulový kořen rovnice (28) pro t byl aspoň dvojnásobný, což nastane, když platí

$$ha_1 + kb_1 + mc_1 = 0 , \tag{29}$$

to je, když směrový vektor normály roviny (27) $\boldsymbol{M}\{h; k; m\}$ je kolmý na vektor $\boldsymbol{T}\{a_1; b_1; c_1\}$. Vektor $\boldsymbol{T}$ je tedy rovnoběžný se všemi tečnými rovinami dané čáry v jejím bodě P_0 tvořícími svazek rovin; to však znamená, že je směrovým vektorem osy příslušného svazku, což je tečna dané prostorové čáry v jejím bodě $P_0(a_0; b_0; c_0)$. Nalezený vektor $\boldsymbol{T}\{a_1; b_1; c_1\}$ je tedy směrovým vektorem tečny dané čáry v jejím bodě $P_0(a_0; b_0; c_0)$, takže tato tečna má rovnice

$$x = a_0 + a_1 t \tag{30}$$
$$y = b_0 + b_1 t$$
$$z = c_0 + c_1 t .$$

Je však možno pokračovati takto ještě dále. Z nalezeného svazku tečných rovin lze vybrat takovou rovinu, že v jejím dotykovém bodě P_0 s danou čarou splývají aspoň tři společné body obou útvarů. Směrový vektor normály této roviny $\boldsymbol{M}\{h; k; m\}$ musí pak anulovat vedle koeficientu u lineárního členu rovnice (28) pro t i koeficient u jejího kvadratického členu. Musí tedy kromě rovnice (29) splňovat i rovnici

$$ha_2 + kb_2 + mc_2 = 0 . \tag{31}$$

Obě rovnice (29) i (31) tvoří soustavu dvou homogenních lineárních rovnic pro souřadnice směrového vektoru normály hledané roviny, které odtud jsou

$$(32) \qquad h = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad k = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \quad m = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Hledaná rovina je oskulační rovina dané čáry (26) v jejím bodě P_0 a vektor právě nalezený je směrový vektor její normály, tedy směrový vektor binormály dané čáry v jejím bodě $P_0(a_0; b_0; c_0)$.

Z těchto výsledků se pak již snadno určí i všechny zbývající prvky hlavního trojhranu čáry (26) v jejím bodě $P_0(a_0; b_0; c_0)$.

Na závěr věnujme ještě pozornost oskulační kružnici dané rovinné čáry a oskulační kulové ploše dané čáry prostorové.

Hledejme oskulační kružnici čáry dané parametrickými rovnicemi (22) v rovině v jejím bodě $P_0(a_0; b_0)$, který odpovídá hodnotě parametru $t = 0$. Dosaďme z těchto rovnic do rovnice kružnice se středem $S(m; n)$ a s poloměrem r

$$(33) \qquad (x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2 .$$

Dostaneme tak

$$(a_0 - m + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \ldots)^2 + (b_0 - n + b_1 t + b_2 t^2 + \\ + b_3 t^3 + \ldots)^2 = r^2 ,$$

což je rovnice pro t, která nabude, seřadíme-li ji vzestupně podle mocnin t, tvaru

$$(34) \qquad (a_0 - m)^2 + (b_0 - n)^2 - r^2 + 2[(a_0 - m)\, a_1 + (b_0 - n)\, b_1]\, t + \\ + \{2[(a_0 - m)\, a_2 + (b_0 - n)\, b_2] + a_1^2 + b_1^2\}\, t^2 + 2[(a_0 - m)\, a_3 + \\ + (b_0 - n)\, b_3 + a_1 a_2 + b_1 b_2]\, t^3 + \ldots = 0 .$$

Uvedená rovnice má nulový kořen t právě tehdy, když její absolutní člen je nulový, tedy platí-li

$$(a_0 - m)^2 + (b_0 - n)^2 - r^2 = 0 ,$$

což je skutečně podmínka toho, aby kružnice se středem $S(m; n)$ a poloměrem r procházela bodem $P_0(a_0; b_0)$.

Tento nulový kořen je vícenásobný, aspoň dvojnásobný, je-li nulový i koeficient u lineárního členu rovnice pro t, tj. platí-li

$$(a_0 - m)\, a_1 + (b_0 - n)\, b_1 = 0 ,$$

což lze zapsat také ve tvaru

$$a_1 m + b_1 n - (a_0 a_1 + b_0 b_1) = 0 .$$

Za předpokladu $(a_1, b_1) \neq (0, 0)$ právě napsaná podmínka znamená, že střed kružnice $S(m; n)$ leží na přímce procházející bodem $P_0(a_0; b_0)$ a kolmé na tečnu čáry (22) v tomto bodě, tedy na její normále v bodě $P_0(a_0; b_0)$. Splnění obou těchto podmínek znamená, že kružnice se dané čáry (22) dotýká v jejím bodě $P_0(a_0; b_0)$.

Podmínkou trojnásobnosti nulového kořene rovnice (34) pro t je při splnění obou napsaných podmínek ještě nulová hodnota koeficientu při t^2 v rovnici (34), tedy splnění vztahu

$$2[(a_0 - m) a_2 + (b_0 - n) b_2] + a_1^2 + b_1^2 = 0\,,$$

který lze napsat také ve tvaru

$$a_2 m + b_2 n - [a_0 a_2 + b_0 b_2 + \tfrac{1}{2}(a_1^2 + b_1^2)] = 0\,.$$

Splnění všech těchto tří podmínek čísly m, n, r znamená, že uvedená kružnice je oskulační kružnicí dané čáry (22) v jejím bodě $P_0(a_0; b_0)$.

Tato kružnice oskulační je zřejmě hyperoskulační kružnicí dané čáry (22) v jejím bodě $P_0(a_0; b_0)$, když souřadnice jejího středu $S(m; n)$ a její poloměr r splňující nalezené tři podmínky anulují vedle toho ještě koeficient při t^3 v rovnici (34) pro t, případně ještě i koeficienty při členech vyšších stupňů v této rovnici, a to při t^4, $t^5, \ldots t^k$, ne však již při t^{k+1}, v kterémžto případě jde o hyperoskulaci $(k - 2)$-ho řádu.

Konečně mějme čáru v prostoru danou parametrickými rovnicemi (26) a hledejme její oskulační kulovou plochu v jejím bodě $P_0(a_0; b_0; c_0)$, který odpovídá hodnotě parametru $t = 0$.

Dosadíme-li opět z těchto rovnic prostorové čáry do rovnice kulové plochy se středem $S(m; n; p)$ a poloměrem r

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 + (z - p)^2 = r^2\,, \tag{35}$$

dostaneme rovnici pro t

$$(a_0 - m + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \ldots)^2 + (b_0 - n + b_1 t + b_2 t^2 + \\ + b_3 t^3 + \ldots)^2 + (c_0 - p + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + \ldots)^2 = r^2\,.$$

Seřaďme ji ještě vzestupně podle mocnin t, čímž nabude tvaru

$$(a_0 - m)^2 + (b_0 - n)^2 + (c_0 - p)^2 - r^2 + 2[(a_0 - m) a_1 + \\ + (b_0 - n) b_1 + (c_0 - p) c_1]\, t + \{2[(a_0 - m) a_2 + (b_0 - n) b_2 + \\ + (c_0 - p) c_2] + a_1^2 + b_1^2 + c_1^2\}\, t^2 + 2[(a_0 - m) a_3 + \\ + (b_0 - n) b_3 + (c_0 - p) c_3 + a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2]\, t^3 + \ldots = 0\,. \tag{36}$$

Nulová hodnota absolutního členu

$$(a_0 - m)^2 + (b_0 - n)^2 + (c_0 - p)^2 - r^2$$

znamená i v tomto případě, že kulová plocha se středem $S(m; n; p)$ a s poloměrem r prochází bodem $P_0(a_0; b_0; c_0)$ a obráceně. Obdobně nulová hodnota koeficientu při lineárním členu

$$2[(a_0 - m)\,a_1 + (b_0 - n)\,b_1 + (c_0 - p)\,c_1]$$

tedy splnění rovnice

$$a_1 m + b_1 n + c_1 p - (a_0 a_1 + b_0 b_1 + c_0 c_1) = 0$$

souřadnicemi středu $S(m; n; p)$ znamená, že střed kulové plochy leží za předpokladu $(a_1, b_1, c_1) \neq (0, 0, 0)$ v rovině procházející bodem P_0 a kolmé v něm na tečnu dané čáry (26) rovnoběžnou s vektorem $\boldsymbol{T}\{a_1; b_1; c_1\}$, to je na normálové rovině dané čáry v jejím bodě P_0. Dále pak nulová hodnota koeficientu při kvadratickém členu rovnice pro t

$$2[(a_0 - m)\,a_2 + (b_0 - n)\,b_2 + (c_0 - p)\,c_2] + a_1^2 + b_1^2 + c_1^2\,,$$

tedy splnění rovnice

$$a_2 m + b_2 n + c_2 p - [a_0 a_2 + b_0 b_2 + c_0 c_2 + \tfrac{1}{2}(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)] = 0$$

souřadnicemi středu $S(m; n; p)$ hledané kulové plochy, znamená, že tento střed za předpokladu $(a_2, b_2, c_2) \neq (0, 0, 0)$ leží ještě na další rovině kolmé na vektor $\boldsymbol{N}_2\{a_2; b_2; c_2\}$.

Není-li tento vektor $\boldsymbol{N}_2$ rovnoběžný s tečnou dané čáry v bodě P_0, protíná se tato rovina s normálovou rovinou čáry (26) v bodě P_0 v přímce, jež je geometrickým místem středů kulových ploch procházejících bodem P_0 a majících v něm s danou čarou dotyk aspoň trojbodový. Tato přímka je tedy osa křivosti („polára") dané prostorové čáry (26) v bodě P_0.

Aspoň čtyřbodový dotyk s danou čarou v bodě P_0 má ta kulová plocha ze všech nalezených, jejíž střed $S(m; n; p)$ svými souřadnicemi anuluje i další koeficient, tj. koeficient při t^3 v rovnici (36) pro t, tedy splňující podmínku

$$(a_0 - m)\,a_3 + (b_0 - n)\,b_3 + (c_0 - p)\,c_3 + a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0\,,$$

které lze dát tvar lineární rovnice pro souřadnice m, n, p

$$a_3 m + b_3 n + c_3 p - (a_0 a_3 + b_0 b_3 + c_0 c_3 +$$
$$+ a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2) = 0\,,$$

což znamená, že střed této kulové plochy za předpokladu $(a_3, b_3, c_3) \neq (0, 0, 0)$, leží ještě na další rovině, která je kolmá na vektor $\boldsymbol{N}_3\{a_3; b_3; c_3\}$. To je právě hledaná oskulační kulová plocha dané čáry (26) v jejím bodě $P_0(a_0; b_0; c_0)$.

Tato oskulační kulová plocha může mít s danou čarou (26) v jejím bodě P_0 styk i více než čtyřbodový a být tak její kulovou plochou hyperoskulační, což nastane, když nalezené souřadnice jejího středu $S(m; n; p)$ a její poloměr r anulují i koeficient při členu čtvrtého stupně a případně i koeficienty při dalších členech vyšších stupňů rovnice (36) pro t.

Literatura

E. Kraemer a kol.: *Matematika pro III. ročník středních všeobecně vzdělávacích škol,* Státní pedagogické nakladatelství Praha, 1965.

ŠPECIÁLNE POČÍTACIE JEDNOTKY NA POČÍTAČI TESLA AP-S UMOŽŇUJÚCE REALIZOVAŤ JEDNODUCHÉ HYBRIDNÉ VÝPOČTY

Štefan Szarka, Bratislava

1. HYBRIDNÉ POČÍTAČE

Počítače, v ktorých sa strojové premenné, predstavujúce matematické veličiny menia spojite, zaraďujeme do skupiny analógových počítačov. Na druhej strane, v číslicových počítačoch, sú všetky premenné reprezentované diskrétne. Skôr, ako budeme definovať hybridný počítač, resp. hybridné počítanie, uvedieme najdôležitejšie charakteristické vlastnosti elektronických analógových a číslicových počítačov.

Analógové počítače

1. Pracujú paralelne, t j. pre každú matematickú operáciu používajú oddelenú (zvláštnu) počítaciu jednotku.

2. Počítajú veľmi rýchle, bez ohľadu na zložitosť úlohy. Rozsiahlejšie úlohy vyžadujú počítač s väčším počtom počítacích jednotiek. Rýchlosť výpočtu je obmedzená predovšetkým frekvenčnými vlastnosťami počítacích jednotiek.

3. Presnosť výpočtu závisí od kvality počítacích prvkov a len zriedkavo dosahuje 0,01%.

4. Môžu jednoducho realizovať také matematické operácie ako sčítanie, integrovanie, násobenie a generovanie rôznych nelineárnych funkcií, ale majú veľmi obmedzené schopnosti pre logické rozhodovanie, pamätanie numerických hodnôt a nenumerických informácií.