

# Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

---

Karel Havlíček

Otázka názornosti ve vyučování matematice

*Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, Vol. 8 (1963), No. 1, 15--18

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/139102>

## Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1963

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

# VYUČOVÁNÍ MATEMATICE A FYZICE

## OTÁZKA NÁZORNOSTI VE VYUČOVÁNÍ MATEMATICE

KAREL HAVLÍČEK, Praha

Ve třetím čísle minulého ročníku Pokroků pojednal A. URBAN podle pozoruhodného článku švýcarského matematika E. STIEFELA o krizi ve vyučování matematice. Stejnými problémy (i když z jiného hlediska) se zabývá současně M. V. ПОТОЦКИЙ v Moskvě a prožíváme je i u nás. Jde o problémy celosvětové, a pokusme se proto aspoň o ujasnění (nikoli řešení) základní otázky, která tu vystupuje do popředí.

Pokud jde o vyučování, dělí se matematická veřejnost na východě i na západě zřejmě ve dva tábory, které spolu soupeří. E. STIEFEL<sup>1)</sup> je rozděluje na zastánce jednak abstraktního, jednak aplikovaného směru ve vyučování matematice a konstatuje, že jejich vzájemný boj uvádí často učitele středních škol ve zmatek. M. V. ПОТОЦКИЙ<sup>2)</sup> hovoří o logickém pojetí vyučování proti psychologickému pojetí. Oba články mají některé společné rysy. Hlavní příčinu dnešních obtíží při vyučování matematice vidí oba autoři v jednostrannosti, s níž se k tomuto vyučování přistupuje. E. Stiefel v celku kritizuje egocentrický pohled některých matematiků na vyučování matematice, M. V. Potockij vidí značný nedostatek v izolovanosti metodiky matematiky od všech vlivů stojících mimo matematiku a pokládá tento stav zřejmě za neudržitelný. Podobně první Stiefelův požadavek směřující podle jeho názorů k nápravě, vzbudit totiž u mladého člověka nadšení pro matematiku, je záležitost čistě psychologická. Vezmeme-li pro stručnost ještě jen poslední jeho požadavek, aby otázkami výuky se zabývali přírodovědci a nikoli jen metodikové, dostáváme se snadno k psychologickému stanovisku Potockého. Nezapomeňme totiž, že moderní psychologie zásluhou objektivních pozorování I. P. PAVLOVA vychází z fyziologie nervové soustavy, není tedy už dávno pouhou spekulací. Náprava ve vyučování matematice se děje dosud jen živelně a využívá více méně jen praxe zkušených a úspěšných učitelů. A přece na nižších a středních školách záleží problém vyučování matematice právě v těchto psychologických otázkách, vždyť elementární matematika tam pěstovaná je nám dávno dobře známa a je po matematické i logické stránce dokonale zpracována, často

<sup>1)</sup> A. URBAN: Současná krize ve vyučování matematice. (Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, roč. 7, č. 3, str. 159—164, Praha 1962.)

<sup>2)</sup> М. В. ПОТОЦКИЙ: О психологических основах методики обучения математике. (Математика в школе, № 6, 1961 г., Москва, стр. 49—55.) Český čtenář může se o obsahu tohoto článku dobře informovat z referátu FR. DUŠKA v časopise Matematika ve škole 12, 448 (1961—62).

i z různých hledisek. To se týká přinejmenším i prvního ročníku na vysokých školách.

Všimněme si přitom stručně aspoň jednoho úskalí, které se tu vyskytuje a vyvolává časté spory, totiž využívání názornosti (dokonce i smyslového vnímání) ve vyučování matematice. Extrémní zastánci abstraktního směru ve vyučování proti takové metodě brojí, protože dobře vědí, že názornost často vedla ve vývoji matematiky k omylům. Není proto divu, že právě vynikající matematikové se vši zodpovědností kladou hlavní důraz na deduktivní postup v důkazech. To ovšem neznamená, že se nám podaří vymýtit názorné pomůcky z matematiky vůbec. A právě psychologie zde může pomoci.

Na základě Pavlovova učení si snadno uvědomujeme, že matematika jakožto věda o abstraktních vztazích je z velké většiny výsledkem činnosti druhé signální soustavy člověka. Při každém, tedy i matematickém poznávání si však musíme především připomenout základní Pavlovovu poučku, že činnost druhé signální soustavy je podmíněna činností první signální soustavy. Proto i názor (názornost) hraje ve vyučování matematice podstatnou úlohu. Zvláště v nejnižších ročnících je užívání názorných pomůcek nutné, smyslovým vnímáním se tak zprostředkuje první matematické chápání. V geometrii je to běžné, ale i v počtech např. přechod přes první desítku při sečítání se děje také na základě názoru (třeba odpočítávání hůlek, zápalek, kroužků apod.).

Podobná je i situace v pokročilejším věku, když se žák seznamuje s nějakým pro něho novým úsekem matematiky. Názornost se tu uplatňuje v různých formách. V geometrii se bez ní neobejdeme; vyučovat geometrii bez názorných obrázků by bylo odtržení školy od života. Geometrická představivost podporuje však také vnímání aritmetiky a posiluje myšlení v oblasti funkcí (grafy funkcí!). Užíváme tedy názornosti i mnohem později než v dětském věku, i když je to z hlediska logiky nadbytečné (srovnej s citovaným článkem M. V. Potockého). Ve škole se má všechno předvádět všem smyslům, kolika možno, říká J. A. KOMENSKÝ a nazývá to zlatým pravidlem pedagogiky. Proč tedy např. vzorec  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  nedoprovodit známým geometrickým náčrtem, který názorně pomáhá žákům pochopit obsah uvedeného vzorce.

Názornost, v dětském věku nutná, zobecňuje se později ve vyučování postupem od konkrétních příkladů k teoretickým úvahám a znalostem. Proto každé teorii by měly předcházet konkrétní příklady. Navazujeme na dynamické stereotypy dříve vytvořené a sledujeme přitom vytváření nových stereotypů v mozkové kůře. Pravidelné cvičení je přitom ovšem nutné. Nestáčí jen znalost pojmů a metod, trvalé osvojení určitých vědomostí a dovedností vyžaduje vytvoření zmíněných dynamických stereotypů, jež jsou fyziologickým předpokladem pro každou trvalou dovednost.

S tím souvisí i podávání definic žákům ve škole. I zde si musíme uvědomit, že příčinou kterékoli definice není příslušný pojem, který se tou definicí zavádí, ale lidská řeč. Vždyť definice je opět záležitostí druhé signální soustavy. A máme přece příklady užití určitého matematického pojmu i bez znalosti jeho definice. Každému vyslovení definice ve škole by tedy mělo předcházet aspoň hrubé poznání příslušného pojmu na základě konkrétních příkladů vyrůstajících z praxe a ze života. Definice sama o sobě

žáku nic nedá (podobně jako definice barev není nic platná člověku od narození slepému a definice tónu hluchému).

Se zřetelem k věkovým zvláštnostem jeví se tedy názornost ve vyučování matematice nutná hlavně v dětském věku, kdy ještě nejsou vytvořeny téměř žádné dynamické stereotypy a dovednosti potřebné pro matematiku.

Všimněme si dále, že tato přímo smyslová názornost v matematice má později svůj protějšek v opačném postupu, kdy matematika, zvláště geometrie, na jistém stupni již sama podporuje např. orientaci člověka v prostoru. Stereometrie pomocí geometrických pouček tříbí prostorovou představivost. Zde už stojíme u případu, kdy názor sám často nestačí a kdy užitím stereometrie řešíme (např. v deskriptivní geometrii) i dosti složité úkoly, jež bychom pouhým názorem nezvládli. Je dokonce mnoho žáků, kterým tato prostorová představivost dělá značné potíže. Ještě více se to projevuje v geometrii vícerozměrných prostorů. Nemůžeme říci, že by nám zde názor překážel nebo vadil, ale příslušná geometrická představivost je už tak obtížná, že nám není nic platná.

Konečně je třeba stanovit, kdy názornost může vést v matematice na scestí, kdy je tedy přímo škodlivá. Nejde jen o takové chybné závěry, jimiž se kdysi došlo k tomu, že každá funkce, která je v nějakém intervalu spojitá, má tam aspoň v jednom bodě derivaci. Jde hlavně o úvahy topologické na nekonečných množinách, např. rozložení reálných čísel na číselné ose. Víme dobře, že v každém sebemenším intervalu je nekonečně mnoho racionálních čísel, ale přitom tato čísla nevyplní celou číselnou osu. To se přímo přiči smyslové názornosti. Taková názornost nám také nikdy nedá představu ani objasnění ekvivalence množin různých dimenzí. Zde musíme s názorností zacházet velmi opatrně, i když víme, že matematické pojmy a problémy vznikly většinou abstrakcí z názoru a že názor dával vynikajícím matematikům i v moderních abstraktních partiích často cenné podněty, informace a první orientaci v nové problematice. Ale to si mohli dovolit právě jen vynikající a zkušené matematikové.

Pro vyučování matematice je proto nutno klasifikovat látku z hlediska názornosti do čtyř skupin, a to:

1. Kdy a kde je názor nutný.
2. Kdy a kde je názor užitečný.
3. Kdy a kde názor není nic platný.
4. Kdy a kde je názor škodlivý.

Naše úvahy ovšem tuto problematiku neřeší.

Všude tam, kde ve vyučování matematice nevystačíme již s názorem, lze postup při vytváření dovedností v matematice budovat na syntéze poznání, tj. postupovat od konkrétních poznatků k teoriím a přitom navazovat na vědomosti a dovednosti předcházející.

Někdy narážíme také na potíž ekonomickou. Často teoretický důkaz je snazší a kratší než dlouhé sbírání zkušeností. (To bylo už také ve starověku příčinou vzniku matematiky jako vědy.) Tu se nabízí příležitost vychovávat žáky k tomu, aby pochopili a ocenili užitečnost teorie. Uvedme si konkrétní příklad.

Spojitosť funkce  $y = x^2$  v bodě  $y \neq 0$  plyne bezprostředně z věty, že součin dvou spojitých funkcí je zase funkce spojitá, kdežto důkaz vedený přímo z definice spojitosti by dal žákům mnoho práce. Přímou z definice snadno dokážeme, že tato funkce je spojitá v bodě  $x = 0$ . Tím je podán jeden z konkrétních výpočtů spojitosti přímo z definice. Další vyšetřování spojitosti této funkce (v bodě  $x \neq 0$ ) přerušíme a dokončíme je až po probrání teoretické věty výše naznačené, když před tím také dokážeme spojitost funkce  $y = x$ . Jde tu zase o pomalé vytváření nového stereotypu a dovednosti, totiž stereotypu teoretické práce. Užitečnost takové práce musí být ovšem žákům prokázána předem.

Vytváření trvalých vědomostí a dovedností i příslušných dynamických stereotypů je vlastně hlavní program každého vyučování a každé výchovy. Proto ještě upozorňuji, že velké nebezpečí je skryto v bourání a přeměně stereotypů. To vede vždycky k psychoneurózám a snižuje celkovou výkonnost člověka. Jedna z forem bourání stereotypů je rozptylování. V matematice je toto nebezpečí skryto v přílišném „odbornickém“ rozpracovávání pojmů, důležitém sice pro odborníky, ale nikoli pro všeobecné vzdělání. Pro průměrného žáka by to mohlo znamenat tříštění pojmů. Prof. E. Stiefel si dokonce stěžuje, že roztržitost vědy a její štěpení na jednotlivá odvětví vede k tomu, že „i vědecký pracovník si již těžko může utvořit svůj vlastní integrální matematicko-fyzikální obraz světa“ (viz citovaný Urbanův článek, str. 160). Rozptylování však vždy bude a neubráníme se mu ani v matematice. Úkolem učitelů musí být tedy omezovat takové rozptylování žáků na nejnútnejší minimum.

Ukončeme ještě tyto řádky varovným hlasem M. V. Potockého. Nevezmou-li matematikové v úvahu výsledky moderní psychologie, je nebezpečí, že psychologové, až ovládnou matematiku (myslí se tím zřejmě hlavně elementární matematika), pustí se do řešení metodiky matematiky sami. Nechce-li k tomu matematická veřejnost bezmocně přihlížet, nezbyvá, než aby matematikové a hlavně učitelé matematiky sami sledovali výsledky dnešní psychologie a její pokrok.

## SOUVISLOST ROZVOJE PŘÍRODNÍCH VĚD, VÝVOJE SPOLEČNOSTI A JEJÍ ŠKOLSKÉ SOUSTAVY

LADISLAV FRANC, Olomouc

Dějiny přírodních věd a techniky nás učí, že jednotlivé obory dnešního rozsáhlého komplexu přírodních věd vznikly většinou přímým působením ekonomické potřeby vyvíjející se společnosti. Nejstarším oborem je matematika, která vznikla již ve starých civilizacích v Mezopotámii a v Egyptě a byla dále rozvinuta starou civilizací řeckou až téměř do rozsahu, jakému se dnes vyučuje asi v prvních osmi ročnících