Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Zbyněk Nádeník

O izometrii uzavřených konvexních ploch

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 7 (1962), No. 3, 155--158

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139091

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1962

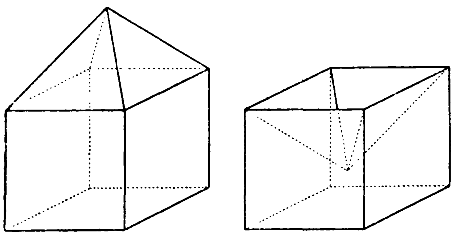
Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

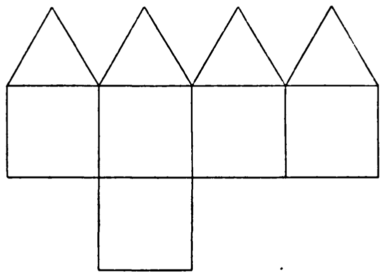
O IZOMETRII UZAVŘENÝCH KONVEXNÍCH PLOCH*)

Zbyněk Nádeník, Praha

Těleso v trojrozměrném euklidovském prostoru se nazývá *konvexní*, má-li tuto vlastnost: Jsou-li A, B dva jeho libovolné body, je v tělese i celá úsečka AB. Konvexní těleso je konečné, neobsahuje-li žádnou polopřímku. Konvexní konečná tělesa jsou např. koule, krychle nebo kužel. *Uzavřenou konvexní plochou* budeme rozumět hranici konečného konvexního tělesa. Tedy např. kulová plocha (jako celek!) nebo šest shodných čtverců omezujících krychli jsou uzavřené konvexní plochy.



Obr. 1



Obr. 2

Dejme tomu, že mezi dvěma plochami π a π^* je dáno jedno-jednoznačné zobrazení Z, které zachovává délky. Podrobněji řečeno: Jsou-li P_1 a P_2 dva libovolné různé body na ploše π, $P_1^* = ZP_1$ a $P_2^* = ZP_2$ body jim odpovídající na ploše π^* a γ libovolná čára na ploše π spojující body P_1, P_2, pak čára $\gamma^* = Z\gamma$, která je na ploše π^* vyplněna body odpovídajícími bodům čáry γ na ploše π a která spojuje na ploše π^* body P_1^*, P_2^*, má touž délku jako čára γ. Dvě plochy, mezi nimiž lze zřídit zobrazení uvedené vlastnosti, se nazývají *izometrické*. Jako (navzájem) *rozvinutelné* se označují dvě izometrické plochy π a π^* s vlastností, kterou lze – velmi zhruba – vyjádřit takto: Plochu π lze spojitě deformovat v plochu π^*, aniž by bylo nutno plochu π nějak rozříznout nebo přeložit.

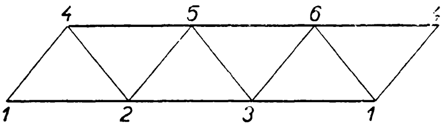
Objasníme tyto pojmy na příkladech. Na krychli položme čtyřboký pravidelný jehlan se základnou v horní podstavě krychle a s výškou menší než hrana krychle a podruhé tentýž jehlan z krychle vyberme. Tak dostaneme dvě tělesa (obr. 1) se shodnými plášti (obr. 2). Izometrii mezi uzavřenými plochami, jež ohraničují naše dvě tělesa, lze zřídit tak, že v zobrazení Z se přiřadí body, které při ztotožnění jejich plášťů splývají. Uvedené plochy však jistě nejsou rozvinutelné, neboť jednu z nich nelze „promáčknout“ v druhou, aniž by nedošlo k přeložení nebo aniž by nebylo třeba řezu. Příklad uzavřené rozvinutelné plochy si opatříme, složíme-li pás šesti shodných

*) Článek je upravenou autorovou přednáškou na I. československé konferenci o diferenciální geometrii v září 1961 na Richtrových boudách v Krkonoších. Je tu však vynechán zejména Süssův důkaz nerozvinutelnosti kulové plochy.

rovnoramenných trojúhelníků na obr. 3 tak, aby stejně očíslované body se ztotožnily. Silně vytažené hrany pak omezují dva rovnostranné trojúhelníky, jež spolu s šesti trojúhelníky z pásu ohraničují uzavřený osmistěn, jehož tvar lze měnit bez nutnosti řezu nebo přeložení, tj. lze jej rozvinout. Osmistěn sám sebe proniká, to však není na závadu rozvinutí.

Poznamenejme výslovně, že plochy, které nejsou izometrické, nemohou být ani rozvinutelné. Dvě plochy, z nichž jedna vznikne z druhé pohybem (rotací a posunutím), doplněným popřípadě o symetrii, se nazývají *kongruentní*. Je jistě zřejmé, že každé dvě kongruentní plochy jsou izometrické.

Otázka, zda dvě uzavřené konvexní izometrické plochy jsou anebo nejsou kongruentní, je velmi starého data. Pravděpodobně první, kdo se jí dotkl, byl EUKLIDES v XI. knize Základů. Jako definici vyslovil (v jiné formulaci) toto tvrzení: Dva polyedry, které mají shodné stěny (tj. jsou izometrické), jsou kongruentní. Z příkladu na obr. 1 je patrno, že není obecně správné, Euklides ho však používal jen v případě, kdy správné je. Záměny definice s tvrzením si všiml až v polovině 18. století R. SIMSON. Koncem 18. století na věc znovu upozornil A. M. LEGENDRE v Eléments de géométrie, ale Euklidovo tvrzení — v třídě konvexních polyedrů, to zdůrazňuji — dokázal až A. L. CAUCHY v roce 1812: *Dva izometrické konvexní konečné polyedry jsou kongruentní.* Bylo mu tehdy 23 let a důkaz provedl s LAGRANGEOVÝM vedením. O Cauchyově výkonu (v němž byla jistá chyba a jistá mezera) je možno se v literatuře dočíst věci dosti protichůdné, od pochvalných superlativů až po zmínku, že v Lagrangeových záznamech — zemřel v roce 1813 — byly nalezeny nejpodstatnější myšlenky Cauchyova důkazu.



Obr. 3

Po Cauchyově zjištění vyslovil ještě J. L. Lagrange domněnku, že dvě uzavřené konvexní plochy, jsou-li izometrické, jsou nutně kongruentní. Stejného mínění byl i F. MINDING, jeden z prvních a současně nejznamenitějších pokračovatelů v Gaussově teorii lokálního rozvinutí plochy. Nepochybně však oba měli na mysli jen hladké plochy bez hran a vrcholů.

Speciálním případem Lagrangeovy a Mindingovy domněnky je izometrie kulové plochy. Velmi dlouho se mělo za samozřejmé, že uzavřená konvexní hladká plocha izometrická s kulovou plochou je nutně kulová plocha. První pokus o důkaz podnikl v roce 1854 J. H. JELLETT. Zůstalo však jen při pokusu, neboť jeho postup nebyl správný.

První úspěšný krok v důkazu Lagrangeovy hypotézy učinil až v roce 1899 z podnětu D. Hilberta H. LIEBMANN. Dokázal, že analytická (tj. připouštějící derivace libovolného řádu tří funkcí, které udávají proměnné souřadnice jejího bodu) uzavřená konvexní plocha π, která je izometrická s kulovou plochou π^*, je zase kulová plocha kongruentní s π^*. Ačkoliv základní myšlenka Liebmannova důkazu je poměrně jednoduchá, důkaz sám je značně složitý. Mnohem jednodušší důkaz podal v roce 1900 HILBERT. Založil jej na jisté extrémní vlastnosti hranice konvexní analytické neuzavřené plochy. Z doby kolem roku 1900 se datují první práce H. MINKOWSKÉHO z teorie konvexních polyedrů a z teorie smíšených objemů konvexních těles. (Nejdůležitější z nich, Volumen und Oberfläche, je z roku 1903). Některé Minkowského výsledky obsahují Liebmannovo tvrzení jako speciální případ. Pravděpodobně dosud nejjednodušší jeho důkaz podal v roce 1929 W. SÜSS; vycházeje z jistých dvou rovnic Minkowského pro opěrnou funkci konvexního tělesa (jejich odvození na základě Steinerova vzorce pro objemy paralelních těles je jednoduché) dokázal je zcela prostě způsobem, ke kterému stačí nejelementárnější poznatky z integrálního počtu. Süssův důkaz je malá, ale velmi pěkná ukázka geniálnosti Minkowského myšlenek.

Nerozvinutelnost uzavřené kulové plochy svedla v roce 1900 Liebmanna k tvrzení, že nerozvinutelná je i plocha, která vznikne z uzavřené kulové plochy odstraněním vrchlíku menšího než její polovina. Nesprávnost tohoto tvrzení zjistil v roce 1912 W. BLASCHKE. V roce 1919 podrobil Liebmann svůj omyl velmi důkladné revizi a zjistil věc na první pohled značně překvapující: Odstraní-li se z uzavřené kulové plochy (která je nerozvinutelná!) libovolně malý kousek, dostaneme rozvinutelnou plochu.

Od Liebmannovy práce z posledního roku minulého století uplynulo 28 let, než byl učiněn další pokrok. V roce 1927 publikoval S. COHN-VOSSEN práci, v níž dokázal správnost Lagrangeovy domněnky pro analytické uzavřené konvexní plochy. Později předpoklady podstatně zeslabil a dokázal věc pro plochy třikrát spojitě diferencovatelné a bez „plochých" bodů, v nichž se plocha více přimyká ke své tečné rovině. Cohn-Vossenovy předpoklady dále zeslabil až v roce 1943 G. HERGLOTZ pouze na požadavek dvojnásobné spojité diferencovatelnosti. V tomto procesu pokračoval v roce 1947 A. D. ALEXANDROV, který snížil předpoklady až na spojitou diferencovatelnost spojenou s jistou Lipschitzovou podmínkou.

Byla tak v roce 1947 tato situace: Na jedné straně Cauchyův výsledek pro polyedry a z druhé strany postupně objevy Liebmannovy, Cohn-Vossenovy, Herglotzovy a Alexandrovovy o hladkých plochách. Stále zbývala otázka, platí-li Lagrangeova hypotéza i pro uzavřené konvexní plochy, které nejsou ani polyedry ani nejsou dostatečně hladké (např. pro plochu, která vznikne sjednocením pláště rotačního kužele s jeho základnou).

V roce 1934 emigroval Cohn-Vossen z Německa do Sovětského svazu a za svého krátkého působení v Moskvě a v Leningradu (zemřel již v roce 1936 jako čtyřiatřicetiletý) obrátil pozornost vynikajících sovětských geometrů k problémům globální geometrie. Kolem roku 1940 začal Alexandrov v řadě prací podstatně rozšiřovat a prohlubovat poznatky o konvexních tělesech a tvořit nové teorie — bez klasického aparátu diferenciální geometrie — pro globální studium i neregulárních ploch. V roce 1948 a 1950 je shrnul ve dvě knihy. Od počátku čtyřicátých let vzniká pod jeho vedením i škola. Mezi jeho první žáky, kteří se dopracovali vynikajících výsledků v teorii konvexních ploch, patřili P. S. OLOVJANIŠNIKOV a I. M. LIEBERMAN; oba padli při obraně Leningradu. Z Alexandrovovy školy vyšel pak i A. V. Pogorelov, který v roce 1952 publikoval v Kijevě útlou knížku, v níž přesně po 140 letech od prvního Cauchyova výsledku problém kompletně uzavřel. Vycházeje z Alexandrovových teorií dokázal v plné obecnosti toto tvrzení:

Každé dvě izometrické uzavřené konvexní plochy jsou kongruentní.

Formulace problému i Pogorelovův výsledek jsou přístupny bez jakýchkoliv hlubších matematických poznatků. Řešení však bylo velmi obtížné. Až k Herglotzovi bylo pokroku dosaženo vždy až po několika desetiletích, a to matematiky, kteří patřili k nejpřednějším. Podobných problémů je v teorii konvexních těles mnoho. V tom se tato disciplína podobá číselné teorii, s níž má ovšem i zcela neformální a velmi hluboké spojení.

Nurekská přehrada

na řece Vachš v sovětské střední Asii bude při výšce 300 m nejvyšší na světě. Hráz bude sypaná s hlinitopísčitým jádrem a boky z lomového kamene. I když šíře nynějšího koryta řeky v místě přehrady je asi 8 m, bude koruna hráze ve výši 300 m dlouhá 700 m. Boky hráze budou mít velmi malý sklon, takže délka základů bude 1100 m a celkový objem 44 milióny krychlových metrů. Pro elektrárnu byly v charkovském Kirovově závodě zkonstruovány speciální turbíny o výkonu 300 MW; elektrárna jich bude mít devět. Jednoduchá a proto levná konstrukce hráze má za následek neobvykle nízkou cenu 1 kWh, totiž 0,026 kopejky; i v tomto směru má Nurek světový primát. Nízká cena umožní použití elektřiny k zavlažování bavlníkových polí ve vyšších polohách.

Ivan Soudek

Měření velmi vysokých odporů

lze úspěšně provádět pomocí ionizační komory jako zdroje konstantního proudu; spád napětí vyvolaný na měřeném odporu tímto proudem se měří elektrometrem. Měřený odpor musí být značně menší než vnitřní odpor ionizační komory $\Delta V/\Delta i$. Běžné vzduchové ionizační komory s rovnoběžnými elektrodami mají vnitřní odpor $5 \,.\, 10^{14}\,\Omega$ při atmosférickém tlaku a $2 \,.\, 10^{16}\,\Omega$ při optimálním tlaku 20 mm Hg. Zmenšením účinného průměru emitující elektrody ze 70 na 7 mm stoupl vnitřní odpor při atmosférickém tlaku na $1{,}1 \,.\, 10^{17}\,\Omega$ a vyčerpáním komory na 20 mm Hg stoupne dále na $10^{18}\,\Omega$, takže je možno měřit odpory $10^{17}\,\Omega$ s chybou 10%. Podobný účinek jako zmenšení plochy elektrod má nabitá mřížka umístěná mezi elektrodami.

Ivan Soudek