

# Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

---

Přemysl Vihan

Gerhard Gentzen (1909-1945)

*Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, Vol. 37 (1992), No. 5, 249--257

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/138896>

## Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1992

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

# Gerhard Gentzen (1909–1945)

*Přemysl Vihan, Praha*

Gerhard Karl Erich Gentzen se narodil 24. 11. 1909 v Greifswaldu (Pomořany). Jeho rodiče žili v Bergenu na Rujaně (Rügen), kde působil jeho otec Hans Gentzen od roku 1905 jako právník, jeho matka Melanie, roz. Bilharzová, pracovala po nějaký čas jako učitelka na obchodní škole. Na Rujaně prožil také Gentzen své rané mládí.

Otec Melanie Gentzenové, Alfons Bilharz (2. 5. 1836 v Sigmaringen – 23. 5. 1925 tamtéž) byl lékař; po desetiletém působení v USA pracoval jako šéflékař kliniky v Sigmaringen (Bádensko-Würtenbersko). Alfons Bilharz platí dodnes za zakladatele moderní ontologie. Ve svých 43 letech vydal svou první knihu *Der heliozentrische Standpunkt der Weltbetrachtung* (1879), jako jednašedesátiletý *Metaphysik als Lehre vom Unbewussten* (1897), jako dvaasedmdesátiletý *Neue Denklehre* (1908), ve svých 74 letech *Descartes, Hume und Kant* (1910) a nakonec v 76 letech *Philosophie als Universalwissenschaft* (1912).

Gentzenův strýc, starší Alfonsův bratr Theodor Bilharz (23. 3. 1825 v Sigmaringen – 9. 5. 1862 v Káhiře) byl významný vědec a lékař tropických nemocí, od roku 1855 profesor tropických chorob na káhirské univerzitě. Objevil původce endemického moru tropických zemí, nazvaného po něm bilharcióza. Jeho kniha o elektrickém orgánu rejnoka elektrického vedla k novým představám o zvířecí elektřině.

Když bylo Gentzenovi necelých pět let, vypukla 1. světová válka, v necelých deseti letech na jaře v roce 1919 ztratil otce, který zemřel na následky válečného zranění. Jeho matka se v roce 1920 přestěhovala s oběma dětmi (Gentzen měl sestru) do Stralsundu. Gentzen byl útlé tělesné konstrukce a jeho zdraví bylo, jak se později ukázalo, podlomeno. Ve Stralsundu začal studovat na humanistickém gymnáziu. Od mládí se u něho projevovaly silné sklony k matematice, které spolu s výrazným nadáním a velkou pílí z něho učinily (podle závěrečného hodnocení jeho učitelů) jednoho z nejlepších žáků, který tam kdy studoval. Za svých studií na gymnáziu vypracoval několik prací (patrně z analytické geometrie a nebeské mechaniky, v níž se mu podařilo stanovit postavení planet na obloze), které přinesly obě v roce 1926 a 1927 jeho matce po tisíci markách jako pomoc při výchově dětí. Žádná z těchto raných Gentzenových prací se bohužel nezachovala. Zachoval se dopis asi třináctiletého Gentzena adresovaný dědečkovi A. Bilharzovi (kterému bylo tehdy 86 let). Probírali právě ve škole Pythagorovu větu, a tak Gentzen vymyslel jiný, opravdu jednoduchý důkaz této věty a spolu s dalšími geometrickými větami, které sám vymyslel a dokázal, poslal dědečkovi, aby ho seznámil se svými pokroky v matematice [I]. Říká se, že dědeček Bilharz měl na Gerharda velký vliv. U babičky ve Stralsundu, která (podle stejného pramene) pocházela z hugenotské

---

RNDr. PŘEMYSL VIHAN, CSc. (1928) je odborným asistentem katedry matematiky stavební fakulty ČVUT, Thákurova 7, 166 29 Praha 6.

rodiny, panoval duch otevřený světu. Babička mluvila francouzsky a anglicky a měla knihovnu v obou řečech. Rodina žila v hrdě nesené bídě.

Gentzen maturoval o velikonočních 1928 a na návrh ředitele ústavu dostal stipendium od tehdejšího Deutsches Studentenwerk, aby mohl pokračovat ve studiu na univerzitě. Začal studovat matematiku a fyziku vždy po semestru na univerzitách v Greifswaldu, Gotinkách (Göttingen), Mnichově, Berlíně a nakonec opět v Gotinkách, kde byl v létě 1933 promován na Dr. phil. na základě inaugurační disertace, přijaté fakultou matematiky a přírodních věd v Gotinkách, jedné ze stěžejních Gentzenových prací *Untersuchungen über das logische Schließen*. Složil také státní zkoušku pro vyučování matematice a fyzice na vyšších školních zařízeních (für den höheren Lehramt). Rok 1933 byl pro Německo, pro Gotinky a pro Gentzena osudný.

Vraťme se však ke Gotinkám. Gotinky se staly za Výmarské republiky (1919–1933) v matematice a fyzice vědeckým centrem světa. Vedoucí matematickou osobností Gotinek byl David Hilbert (1862–1943), vedle Henri Poincaré bezpochyby vůdčí osobnost tehdejší matematiky. Problémy, které hýbaly Gotinkami předválečné éry, sahaly od matematické fyziky až po teorii důkazu (Beweistheorie) a zkoumání základů matematiky (Grundlagenforschung), o něž má nehynoucí zásluhy právě D. Hilbert. Georg Cantor (1845–1918) nás uvedl do ráje teorie množin (z něhož se nedáme vyhnat, jak řekl D. Hilbert). Řekl bych spíše ke stromu poznání dobrého a zlého. Antinomie otráslý světem matematiky. Hilbert se dal do boje o matematiku. Věřil, že lze finitními (všeobecně důvěryhodnými) prostředky dokázat bezspornost jednotlivých matematických disciplín a nakonec celé běžné matematiky („tento stav ukazuje zároveň na další postup v teorii důkazu, jejímž konečným cílem je poznání, že běžné matematické metody jsou vesměs bezsporné“ [II]). To je známý Hilbertův program. Hilbert byl ve svém pojetí matematiky zapříšáhlý formalista\*) Podle něho byla matematika čistě formální hra, kterou je možno hrát s konečným počtem symbolů na papíře podle zcela přesných pravidel manipulace s těmito symboly s jediným požadavkem, aby tato hra nevedla ke sporu. Pravidla musejí být zcela zřejmá a nesmějí obsahovat žádné nekonečné postupy, které jsou nepřehledné. V podstatě musí být možno je zakódovat pro počítač (tento úkol právě dokončil Gentzen svými bezřezovými systémy logiky 1. řádu). K tomu bylo třeba stanovit pravidla matematické logiky s daleko větší přesností, než tomu bylo doposud. Tomu je věnováno slavné dvoudílné dílo Hilbert-Bernays: *Grundlagen der Mathematik I* (1934) a *II* (1939) a též Gentzenova práce *Untersuchungen über das logische Schließen* (1935). Formalizací logických dedukcí se otevřelo pole nové disciplíny, teorii důkazu, do jejíž oblasti spadá citovaná Gentzenova práce. Podle Hilbertova programu měly následovat důkazy bezspornosti různých matematických systémů. Pokračovatelem v Hilbertově programu byl Gentzen svým důkazem bezspornosti čisté teorie čísel (Peanovy axiomy s úplnou indukcí) v článku *Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie* (1936) a *Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie* (1939). Následovat měl důkaz bezspornosti analýzy. V tom Gentzenovi zabránila smrt (Gentzen věřil, že se mu podaří).

---

\*) Avšak formalismus nebyl vůbec jeho vědecký ani filozofický program.

Rok 1933 v Německu: 30. 1. 1933 byl Hitler povolán Hindenburgem za říšského kancléře, 1. 2. 1933 byl rozpuštěn říšský sněm. Řádění zločineckých hord SA (der NSDAP) nestálo již nic v cestě. Po zastřelení Röhma v polovině roku 1934 ztrácela SA postupně svůj politický vliv a význam.

V listopadu 1933 vstoupil Gentzen do SA, od 1. 5. 1937 byl členem NSDAP a od 1. 1. 1941 členem NSD svazku docentů (NSD Dozentenbund). K tomuto období Gentzenova života je třeba říci: Gentzen se v roce 1933 po velkém duševním vypětí zhroutil a zotavoval se doma u matky až do roku 1935, kdy jej 1. 11. povolal Hilbert do Gotinek jako (neplánovaného) asistenta. Teprve od 1. 4. 1939 nastoupil na místo plánovaného asistenta. Vojenskou přísahu složil 27. 4. 1939 a od 28. 9. 1939 do 5. 6. 1942 sloužil aktivně u radistů (Funkmeldedienst) v Braunschweigu (Dolní Sasko). Toto období je v jeho spisech uvedeno takto: Aktivní vojenská služba od 28. 9. 1939 až do 5. 6. 1942, a to nasazení na domovském bojišti od 28. 9. 39 do 21. 1. 42, použití na domovském bojišti od 22. 1. 42 až do 5. 6. 42. V tomto období ležel čtvrt roku v lazaretě a 19. 11. 42 byl pro neschopnost (vojenské služby) superarbitrován. V jeho spisu čteme: politická činnost  $\emptyset$ , válečné řády  $\emptyset$ , čestná vyznamenání  $\emptyset$ .

V roce 1940 se Gentzen habilitoval na Dr. phil. habil. na základě habilitačního spisu předloženého univerzitě v Gotinkách *Beweisbarkeit und Unbeweisbarkeit von Anfangsfällen der transfiniten Induktion in der reinen Zahlentheorie* (9). V Německu totiž od roku 1934 habilitovat se znamenalo získat hodnost habilitovaného doktora vědeckým pojednáním a vědeckou rozpravou. Habilitace byla podmínkou k docentuře.

Mezitím byl Gentzen pozván v roce 1937 na filozofický kongres do Paříže, kde přednášel o pojmu nekonečna a bezespornosti v matematice.

Vraťme se však k tomu, co se dělo v roce 1933 v Gotinkách. Gentzen byl žákem a pokračovatelem nejen Davida Hilberta, ale také Hermanna Weyla (1885–1955), který formoval Gentzenův konstruktivismus v matematice (viz následující překlad Gentzenova článku *Současný stav ve zkoumání základů matematiky*). Samozřejmě se také dobře znal s Paulem Bernaysem (1888–1977), který sepsal ovlivňován D. Hilbertem *Grundlagen der Mathematik*. U P. Bernaysa byly také uloženy sloupcové korektury prací nebo jejich částí (práce [2] nebo [4]), které Gentzen stáhl z tisku.

V dubnu 1933 byla zbavena oprávnění učit (Lehrbefugnis) znamenitá algebraička Emmy Noether (1882–1970). Totéž potkalo Richarda Couranta (1888–1972) a nositele Nobelovy ceny za fyziku Maxe Bornu (1882–1970). Zbaven svého úřadu na gotinské univerzitě byl číselný teoretik Edmund Landau (1877–1938) a nositel Nobelovy ceny za fyziku James Franck (1882–1964), Otto Neugebauer (1899–?), Ludwig Otto Blumenthal (1876–1944 Terezín), blízký přítel D. Hilberta a konečně i P. Bernays. Z Gotinek do USA odešel také Gentzenův učitel Hermann Weyl. Byli to vesměs Židé. David Hilbert se proti tomu postavil v peticích a stížnostech odvolává se na Výmarskou ústavu. („Požívání občanských práv, právě tak jako přístup k veřejným úřadům jsou nezávislé na náboženském vyznání. Umění, věda a její nauky jsou svobodné a budou státem chráněny a podporovány.“) Výmarská ústava nebyla totiž po roce 1933 formálně změněna, ale stala se brzy v rukou nacistů cárem papíru. Hilbertův protest byl marný. Traduje se, že když navštívil Gotinky nacistický ministr školství a ptal se Hil-

berta, jak teď vypadá matematika v Gotinkách, když byla zbavena židovského vlivu, Hilbert odpověděl, že „matematiky v Gotinkách již není“.

V roce 1942 se Gentzen habilitoval v Gotinkách na docenta a 5. 10. 1943 se stal docentem na přírodovědecké fakultě německé Karlovy univerzity v Praze (na matematickém ústavu II, Praha II, Viničná 7, kde později také bydlil). Přednášel v letním semestru (který začal 1. 4. 1945 a měl trvat do 31. 7. 1945) 4 hodiny týdně diferenciální a integrální počet II, 2 hodiny týdně k tomu cvičení a 2 hodiny týdně měl matematický proseminář (*privatissime et gratis*). Když ho jeho kolegové z německé univerzity o velikonocích 1945 vyzývali (např. Maximilián Pinl), aby z Prahy odjel, odpověděl, že nikomu nic neudělal a Prahu dobrovolně neopustí. 15. května 1945 byl spolu s ostatními členy univerzity, kteří zůstali, zajat a uvězněn ve věznici okresního trestního soudu v Praze II na Karlově náměstí. Dne 4. 8. 45 tam zemřel úplným vyčerpáním [B].

Očitý svědek dr. F. Kraus píše v dopise P. Bernaysovi datovaném 9. 5. 1946: „Stále ho vidím před sebou, jak leží na dřevěné pryčce a celý den myslí na matematické problémy, kterých byl plný. Jednou se mi svěřil, že je ve skutečnosti rád, že má konečně čas přemýšlet o důkazu bezspornosti analýzy. Byl pevně přesvědčen, že se mu to povede. Zabýval se také jinými problémy, jako umělou řečí atd. Sem tam si chtěl promluvit ... Byli jsme ujišťováni, že formality s naším propuštěním budou vyřízeny za pár dní ... Doufal, že se bude moci vrátit do Gotinek a věnovat se cele studiu matematické logiky a základům matematiky. Snil o založení ústavu pro matematickou logiku a výzkum základů matematiky patrně s Heinrichem Scholzem.“ H. Scholz (1884–1958) byl protestantský filozof, logik a historik logiky, Gentzenův přítel — představitel tzv. münsterské školy matematické logiky. V jeho nákladu vyšla Gentzenova práce (8).

V pozdějším dopise dr. med. F. Kramera adresovaném dr. M. Pinlovi 23. 11. 1946 pisatel horlí nad ukrutnostmi páchanými v táboře. M. Pinl mluví o táboře nucených prací, G. Kreisel o internačním táboře. Gentzen byl ve věznici pro svou příslušnost k SA zřejmě jako ostatní, kteří tam s ním byli (pro příslušnost k SA nebo SS). Nebyl ve sběrném táboře pro Němce. Vězni však byli voděni na práci (alespoň po určité období). Proto někteří mluví o táboře.

Jistě jste si, jako já, položili otázku, jaký to byl člověk, ten Gerhard Gentzen? Známý logik Georg Kreisel k tomu píše [K]: „Klidná rozvaha a jistota zračící se v jeho díle se u něho pojila nebo spíš byla důsledkem naprostého odtržení od reality; mám na mysli politickou realitu třetí říše a poválečných poměrů ... Nikdy jsem se s Gentzenem nesetkal, ale mluvil jsem s jeho druhy, logiky Bernaysem a Schüttem, kteří s jeho politickými názory nesouhlasili, a s jeho přítelem Wittem, který ano. Ze všeho, co jsem slyšel, jsem nabyl dojmu, že Gentzen žil plně v rámci svého mravního a citového založení a nikdy neublížil ani mouše.“

Genialita zřejmě zasáhla jen jednu stránku Gentzenovy osobnosti, jeho matematický intelekt; zbytek nechala ve stínu chlapeckého věku. Gentzen zůstal po celý život svobodný.

Když již citujeme Kreisela, pokračujme v citaci o Gentzenově stylu: „Gentzen patrně více než kdokoli jiný pracující na Hilbertově programu byl prost dogmat a netrpělivosti, vždy hotov zkoumat význam vlastních výsledků, vracet se stále k témuž problému a zlepšovat svá řešení a formulace neváhaje dát jim jiný smysl. Tak hlubokou důvěru

měl zřejmě ve své myšlenky a práci ... Gentzen jako téměř jediný mezi nadanými logiky psal v rozmyslném, klidném a uvolněném stylu ... Pasáže v originálním výkladu, které především upoutají pozornost moderního čtenáře (který není především historikem), jsou Gentzenovy „nevyvinuté“ neformální myšlenky v jeho úvodních nebo okrajových komentářích a postranních myšlenkách. To je typické u prací pionýrů. Já si však myslím, že v Gentzenově případě jsou tyto myšlenky zásadního významu sub specie aeternitatis, zvláště jeho myšlenky o teorii důkazu, kde jsou důkazy základními objekty zkoumání a nejen pouhým nástrojem — na rozdíl od Hilbertovy *Beweistheorie*.“ [K]

Hlavní Gentzenovy výsledky jsou vyloženy v práci *Untersuchungen über das logische Schließen*, kde je konstruován tzv. bezřezový Gentzenův systém predikátové logiky, a v pracích *Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie* a následující *Neue Fassung* ..., kde je dokázána bezespornost čisté teorie čísel.

„Jeho pojetí logického důkazu,“ píše Kreisel, „mu umožňuje rozlišovat mezi různými formálními systémy se stejnou množinou konečných teorémů a mezi různými odvozeními v tomtéž systému se stejnou konečnou formulí. (Nejnámější mezi těmito systémy jsou tzv. bezřezové nebo normální systémy.) Jednoduše řečeno, novinkou ve srovnání s analýzou Gottloba Fregy je: důkazy reprezentované formálními odvozeními jsou hlavním předmětem studia; ne pouhými nástroji pro analýzu relace důsledku nebo predikátu platnosti. Jinými slovy, studium se týká procesu uvažování, nejen jeho výsledků, tj. dokázaných teorémů.“ [K]

Gentzen si všiml, že formalizace logických uzávěrů v predikátové logice, jak je formalizoval Frege, Russel s Whiteheadem a Hilbert, jsou velmi vzdáleny úvahám, kterých matematik běžně užívá při dokazování (důkazy typu „nechť platí“). Např. důkaz tvrzení  $(X \vee (Y \& Z)) \Rightarrow (X \vee Y) \& (X \vee Z)$  vede matematik takto:  
Nechť platí  $X$  nebo  $Y \& Z$ .

- 1) Nechť platí  $X$ , pak platí  $X \vee Y$  i  $X \vee Z$ , tedy platí závěr.
- 2) Nechť platí  $Y \& Z$ , pak platí  $Y$  i  $Z$ , a platí tedy  $X \vee Y$  i  $X \vee Z$  pro libovolné  $X$ .  
Platí tedy závěr.

Tvrzení tedy platí.

Gentzen formalizací těchto dokazovacích postupů vytvořil tzv. přirozený systém predikátové logiky. Vlastnosti pravidel přirozené logiky jeví pozoruhodné symetrie a lze je snadno systemizovat. Jejich podrobnější rozbor přivedl Gentzena k velmi obecnému výsledku, který nazval základní větou (Hauptsatz) platící jak pro intuicionistickou, tak pro klasickou predikátovou logiku (Gentzen studuje obě souběžně). K formulaci této věty a jejímu důkazu zavedl další systém predikátové logiky, tzv. logistický systém. Základní věta tvrdí, že ke každému důkazu v tomto systému existuje (ne sice jednoznačně) důkaz téhož tvrzení, který neobsahuje řezy (je v normálním, bezřezovém tvaru). V Gentzenově tvaru jeho základní věta tvrdí: jsou-li  $U$ ,  $X \rightarrow V$  a  $U \rightarrow X$ ,  $V$  dokazatelné v systému  $G$ , je v  $G$  dokazatelné i  $U \rightarrow V$ . Zvláštním případem řezu je modus ponens: jsou-li dokazatelné v  $G$   $A$  i  $A \rightarrow B$ , pak je dokazatelné v  $G$  i  $B$ .

Základní věta umožňuje zavést další formalizaci predikátové logiky, Gentzenův bezřezový systém. Normální tvar důkazu nejde tedy přes okliky, neobsahuje žádné prvky kromě těch, které jsou obsaženy ve výsledku, a proto v důkazu nutně být musejí.

Na konec Gentzen dokáže ekvivalentnost všech formalizací predikátové logiky, kterých v práci použil, se systémy G. Frege, B. Russela a A. N. Whiteheada a D. Hilberta.

Bezřezová logika umožnila Gentzenovi důkaz bezespornosti čisté teorie čísel (viz. práce (4) a (8)). Bez ní si nelze představit teorii automatického dokazování (okliky, myslí se samozřejmě vhodné okliky, může zavádět jen lidský intelekt). V této souvislosti se většinou cituje Herbrandova věta dokázaná o něco dříve, která je důsledkem základní věty. Byla dokázána v roce 1930 v *Recherches sur la théorie de la démonstration*. I když původní Herbrandova práce obsahovala v důkazu jisté chyby, stala se Herbrandova věta neodmyslitelnou součástí matematické logiky a je v jistém smyslu Gentzenově základní větě ekvivalentní.\*)

Druhý výsledek, který rozvířil hladinu matematické obce před druhou světovou válkou, byly Gentzenovy důkazy bezespornosti čisté teorie čísel. Již jsem mluvil o Hilbertově programu: Hilbert chtěl finitními prostředky dokázat bezespornost především čisté teorie čísel, pak analýzy atd. Aby takový důkaz měl smysl, je třeba, aby prostředky, jichž se v důkazu bezespornosti užije, byly spolehlivější než ty, kterých se užívá v teorii samé. Když již měl P. Bernays rozpracovanu stěžejní část 1. dílu *Grundlagen*, publikoval Kurt Gödel (1906–1978) své věty o neúplnosti některých formálních systémů. První věta o neúplnosti čisté teorie čísel a formálních systémů, které čistou teorii čísel obsahují, tvrdí: v  $S$  existuje tvrzení  $A$  takové, že ani  $A$ , ani  $\text{non } A$  nemohou být dokázány pomocí axiomů systému  $S$ , je-li  $S$  bezesporný. Druhá věta tvrdí:  $\text{Consis } S$  nemůže být dokázáno v  $S$ , je-li  $S$  bezesporný. Přitom  $\text{Consis } S$  je aritmetizované tvrzení:  $S$  je bezesporný; tedy tvrzení pravdivé, které je nedokazatelné. Hilbert si uvědomil, že je třeba se vzdát pojmu finitnosti, jak si jej původně představoval, lépe řečeno, že je třeba pojem finitnosti rozšířit. Zajímavým způsobem to udělal Gentzen. Oslabil finitnost zavedením transfinitní indukce do větších ordinálů, než je první spočetný, omega. Položíme-li  $\omega_0 = \omega$ ,  $\omega_{n+1} = \omega^{\omega_n}$  a  $\varepsilon_0 = \lim \omega_n$ , bude  $\varepsilon_0$  spočetný ordinál. Gentzen podal důkaz  $\text{Consis } Y$  ( $Y$  buď čistá teorie čísel) tak, že určil úplné uspořádání všech důkazů v  $Z$  podle pořádkového typu  $\varepsilon_0$ , a potom ukázal, že ke každému důkazu sporu existuje jiný důkaz sporu, který mu předchází. Jestliže tedy přijmeme za axiom transfinitní indukci do  $\varepsilon_0$ , je možno dokázat  $\text{Consis } Y$ . Navíc dokázal, že pro každý ordinál  $\varepsilon$  menší než  $\varepsilon_0$  je možno transfinitní indukci do  $\varepsilon$  v systému  $Y$  dokázat. Je tedy  $\varepsilon_0$  nejmenší ordinál, kterého je možno podle Gödelovy věty k důkazu bezespornosti použít.

Georg Kreisel tvrdí, že nejvážnější námitku proti tomuto důkazu vyjadřuje vtip, který kdysi koloval mezi matematiky: víte, kdo je Gentzen? To je chlapík, který dokázal konzistenci obyčejné matematické indukce pomocí transfinitní indukce do  $\varepsilon_0$ .

Kreisel však také upozorňuje, že Gentzen pro svůj důkaz bezespornosti používá mimologické  $\varepsilon_0$ -indukce [K]. Takové důkazy bezespornosti záleží v redukcí na systémy logiky prosté, které jsou samozřejmě bohatší fakty, ale jistější; pokud jsou bezesporné. A bezespornost takového bezlogického systému Gentzen právě v citovaných pracích dokazuje.

---

\*) Viz G. E. MINZ: *Těorema Erbrana* v [1] a poznámku na str. 7 v [I].

Alfréd Tarski v *Révue international de philosophie* 28 (1954) říká: Gentzenův důkaz konzistence aritmetiky je bezpochyby velmi významný metamatematický výsledek, který může být podnětný a plodný. Nemohu však říci, že konzistence aritmetiky je mi teď zřejmější (abych užil terminologie diferenciálního počtu: zřejmější o epsilon) než před důkazem její konzistence.

Moderní pohled na Gentzenovo dílo se najde především v práci [K] a potom ve sborníku G. Kreisel: *Issledovanija po teorii dokazatelstv* (1981). Gentzenovské systémy jsou zpracovány zajímavě a moderně v knize R. M. Smullyana: *Logika 1. řádu*. Gentzena můžete číst také v monografii Daga Prawitze: *Natural Deduction: A Proof Theoretical Study* (Stockholm: Almqvist & Wiksell, 1965) a explicitněji v *Ideas and Results in Proof Theory* v *Proceedings of the 2nd Nordic symposium*, J. E. Fenstad, ed. (Amsterdam: North Holland, 1971). Standardními knížkami o teorii důkazu jsou Schütte K.: *Proof Theory*, Springer 1977 a Takeuti G.: *Proof Theory*, North-Holland 1975, Schwichtenberg H.: *Proof Theory: Some applications of cut elimination* v *Handbook of mathematical logic*, Barwise ed., North-Holland 1977, pp. 867–895.

V těchto publikacích lze též zjistit, jak rozsáhlý a trvalý vliv měly a mají Gentzenovy výsledky (viz též doslov P. Pudlák).

## Závěrečné poznámky

Datum Gentzenovy smrti je nepochybné a shoduje se ve všech pramenech, kterých jsem v práci používal (z nichž část ke konci cituji). Místo a příčinu smrti cituji podle životopisu G. Gentzena sestaveného jeho matkou, paní Gentzenovou-Bilharzovou, kde se na závěr říká: „5. května byl Gentzen s ostatními profesory univerzity Čechy zatčen a dopraven do věznice okresního trestního soudu pro Prahu II (na Karlově náměstí), kde 4. srpna 1945 zemřel vysílením.“ O místě smrti se prameny rozcházejí. M. Pinl [P] uvádí, že Gentzen zemřel v poválečném táboře nucených prací, G. Kreisel [K] mluví o internačním táboře. Ve skutečnosti mohlo jít o jedno a totéž, a to o pracovní tábor věznice. Jako příčinu smrti uvádí M. Pinl [P]: „Tam“ (tj. v poválečném táboře nucených prací) „nevydržel Gentzen fyzickou námahu a zemřel 4. 8. 1945.“ G. Kreisel o příčině smrti nemluví. Je tu tedy shoda v životopisech [B] a [P]. Ve spisovně okresního trestního soudu pro Prahu II na Malostranském náměstí není údajně o Gentzenově smrti doklad.

V archívu pražského policejního prezidia jsem však objevil významný dokument, německy psanou (z doby protektorátu) „kartu“ G. Gentzena [III]. Byla sepsána zřejmě za spolupráce G. Gentzena a vypovídá téměř o všech důležitých bodech Gentzenova života. Z ní např. plynou údaje a data o Gentzenově nacistické minulosti, o jeho vojenské službě apod. Z ní také plyne nezvratný fakt, že Gentzen byl po celý svůj život nacista.

Jaký nacista? Lépe řečeno, jaký člověk? Byl nacista, ale do války se příliš nebo spíše vůbec nehrnul. 19. 11. 1942 byl v Gotinkách pro neschopnost vojenské služby superarbitrován. To v době války znamenalo mnoho a vypovídá to také o jeho vážně porušeném zdraví. Ze slov logiků, s kterými se Gentzen za svého života stýkal, vyplývá,



že to byl „neškodný nacista“ a podle své povahy hodný člověk. Matematici ho prostě brali, jako by jeho nacismus byl znetvořením, s kterým se nedá nic dělat, asi jako když člověk kulhá.

Musím na závěr říci, že nevím, proč člověk tak pronikavého intelektu, který tak významně ovlivnil světovou vědu, potomek slavných vědců a bezpochyby z dobré rodiny vstoupil tak brzy do SA a později do NSDAP a nakonec do spolku nacistických docentů. Je to asi tak marné zkoumat, jako se ptát, proč se François Villon po celý život po právu obával šibenice a možná na ní i skončil a proč byl členem zlodějské bandy coquillardů a proč to byl také citlivý básník, kterého rádi čteme.

Dílo obou těchto mužů však patří k výkvětu evropské kultury.

### Seznam Gentzenových prací

- (1) *Über die Existenz unabhängiger Axiomensysteme zu unendlichen Satzsystemen.* Math. Annalen 107 1932, 329–350.
- (2) *Über das Verhältnis zwischen intuitionistischer und klassischer Arithmetik.* 1933, Math. An. – staženo, protože vyšel v *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums IV* (1933) článek K. Gödela se stejnou tematikou *Arithmetik und Zahlentheorie.*
- (3) *Untersuchungen über das logische Schließen.* Math. Zeit. 39 (1935), 176–210, 405–431.
- (4) *Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie.* Math. An. 112, (1936), 493–565.
- (5) *Die Widerspruchsfreiheit der Stufenlogik.* Math. Zeit. 4, č. 3 (1936), 357–366.
- (6) *Der Unendlichkeitsbegriff in der Mathematik.* Semester-Berichte Münster in Westphalen, 9. Semester, Winter 1936–37, 65–80.
- (7) *Die gegenwärtige Lage in der mathematischen Grundlagenforschung.* In: *Forschung zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften, Neue Folge 4, Leipzig (Hirzel, 1938), 19–44.*
- (8) *Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie.* In: *Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften, Neue Folge 4, Leipzig (Hirzel, 1938) 19–44.*
- (9) *Beweisbarkeit und Unbeweisbarkeit von Anfangsfällen der transfiniten Induktion in der reinen Zahlentheorie.* Math. An. 119, 1 (1943), 140–161.
- (10) *Zusammenfassung von mehreren vollständigen Induktionen zu einer einzigen.* Publikováno posmrtně v *Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschung 32 č. 1 (1954), 1–3.* (Věnováno H. SCHOLZOVI k jeho šedesátinám, 17. prosince 1944)

### Literatura

- [1] Články (3), (4), (8), (10) jsou obsaženy v ruském překladu ve sbírce *Matěmaticeskaja teorija logičeskogo vyvoda* (Moskva 1967).
- [2] Sebrané spisy G. Gentzena byly vydány v anglickém překladu ve sbírce M. E. SZABÓ: *Collected Papers of Gerhard Gentzen*, Amsterdam–London 1969.
- [K] Recenze G. KREISELA uvedeného vydání Gentzenových spisů v: *The Journal of Philosophy*, sv. 68, č. 8, 238–265.
- [P] MAXIMILAN PINL (Köln): *Kollegen in einer dunklen Zeit.* Jahresberichte des deutschen Mathematiker-Vereins 75 (1974), 166–208.
- [B] *Lebenslauf von Gerhard Gentzen (1909–1945) verfasst auf Wunsch von Prof. Scholz von seiner Mutter, Frau Melanie Gentzen, geb. Bilharz, (14b) Sigmaringen, Antonstr. 1.* Opis získal autor článku od pana doc. PETERA SCHREIBERA z univerzity v Greifswaldu laskavostí pana prof. Nádeníka (ČVUT Praha).

- [I] G. ROBBEL: *Ein Brief Gerhard Gentzens an seinen Großvater* 2.28–29–alpha, Berlin 20 (1986).
- [II] HILBERT D. – BERNAYS P.: *Grundlagen der Mathematik I* (1934), *II* (1939), Springer, Berlín.
- [III] Karta z archívu FMV, jejíž fotokopie je k dispozici u autora článku.

# Současný stav ve výzkumu základů matematiky

*Gerhard Gentzen, Göttingen*

## § 1. Různá stanoviska k otázce antinomií a pojmu nekonečna

Antinomie teorie množin byly odkryty zhruba před 40 lety a dosud se nedosáhlo konečného objasnění této otázky. Výzkum základů matematiky vděčí tomuto problému za velký podnět. Zřejmá nejistota určitých základů matematiky zřetelně vystupující na tomto místě přiměla některé významné matematiky — jmenujme jen *Brouwera*, *Hilberta* a *Weyla* — zabývat se těmito otázkami, které jsou jinak vlastním matematikům vzdáleny, ba dokonce spíše nesympatické pro jejich blízký vztah k *filozofii* s její nejistotou odporující matematickému myšlení a mnohostí názorů.

Byly podniknuty různé pokusy nalézt „řešení“ antinomií, tj. jasně ukázat, v čem vězí „chybný závěr“. Tyto pokusy nevedly k uspokojivému výsledku, a ani v budoucnosti nelze *takové* řešení očekávat. Spíše to vypadá tak, že nelze mluvit o jednoznačně označitelné chybě v myšlení. Jen tolik lze s jistotou říci, že objevení antinomií souvisí s *pojmem nekonečna*. Vždyť v *konečné* matematice se nemohou podle lidského uvážení objevit žádné spory, pokud je korektně vybudována. Jisté analogie antinomií v konečnu záležejí ve zřejmých nepřesnostech v tvoření pojmů.

Aby se našlo východisko z této nepřijemné situace, vzniklé antinomiemi, bylo navrženo několik způsobů. Nejjednodušší způsob je konečně ten, nalézt meze mezi dovolenými a nedovolenými úsudky v matematice, při kterých úsudky vedoucí k antinomiím vypadnou jako nedovolené. Takových pokusů je celá řada; zčásti se navržená

---

GERHARD GENTZEN: *Die gegenwärtige Lage in der mathematischen Grundlagenforschung*. In: *Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften*, Neue Folge, Heft 4, herausgegeben von HEINRICH SCHOLZ, Verlag von G. Hirzel in Leipzig, 1938.

Přeložil PŘEMYSL VIHAN.