Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Gerhard Gentzen

Současný stav ve výzkumu základů matematiky

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 37 (1992), No. 5, 257--269

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138895

[I] G. ROBBEL: *Ein Brief Gerhard Gentzens an seinen Großvater* 2.28–29–alpha, Berlin 20 (1986).
[II] HILBERT D. – BERNAYS P.: *Grundlagen der Mathematik I* (1934), *II* (1939), Springer, Berlín.
[III] Karta z archívu FMV, jejíž fotokopie je k dispozici u autora článku.

Současný stav ve výzkumu základů matematiky

Gerhard Gentzen, Göttingen

§ 1. Různá stanoviska k otázce antinomií a pojmu nekonečna

Antinomie teorie množin byly odkryty zhruba před 40 lety a dosud se nedosáhlo konečného objasnění této otázky. Výzkum základů matematiky vděčí tomuto problému za velký podnět. Zřejmá nejistota určitých základů matematiky zřetelně vystupující na tomto místě přiměla některé významné matematiky — jmenujme jen *Brouwera, Hilberta a Weyla* — zabývat se těmito otázkami, které jsou jinak vlastním matematikům vzdáleny, ba dokonce spíše nesympatické pro jejich blízký vztah k *filozofii* s její nejistotou odporující matematickému myšlení a mnohostí názorů.

Byly podniknuty různé pokusy nalézt *„řešení" antinomií*, tj. jasně ukázat, v čem vězí „chybný závěr". Tyto pokusy nevedly k uspokojivému výsledku, a ani v budoucnosti nelze *takové* řešení očekávat. Spíše to vypadá tak, že nelze mluvit o jednoznačně označitelné chybě v myšlení. Jen tolik lze s jistotou říci, že objevení antinomií souvisí s *pojmem nekonečna*. Vždyť v *konečné* matematice se nemohou podle lidského uvážení objevit žádné spory, pokud je korektně vybudována. Jisté analogie antinomií v konečnu záležejí ve zřejmých nepřesnostech v tvoření pojmů.

Aby se nalezlo východisko z této nepříjemné situace, vzniklé antinomiemi, bylo navrženo několik způsobů. Nejjednodušší způsob je konečně ten, nalézt meze mezi dovolenými a nedovolenými úsudky v matematice, při kterých úsudky vedoucí k antinomiím vypadnou jako nedovolené. Takových pokusů je celá řada; zčásti se navržená

GERHARD GENTZEN: *Die gegenwärtige Lage in der mathematischen Grundlagenforschung.* In: *Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften*, Neue Folge, Heft 4, herausgegeben von HEINRICH SCHOLZ, Verlag von G. Hirzel in Leipzig, 1938.
Přeložil PŘEMYSL VIHAN.

omezení prohlásí za přirozená, zčásti se takové odůvodnění ani nepodává. Za příklady mohou sloužit axiomatická teorie množin a systém *Principia Mathematica.*

Tento způsob je *prakticky* docela užitečný, přesto však *v zásadě* neuspokojuje. *Především* je totiž takové omezení dosti *libovolné*, což je přirozený důsledek toho, že nelze „chybu" v antinomiích přesně označit. Potom se vnucuje otázka, zda se jednou ani v tomto omezeném oboru dovolených úvah nemohou objevit *rozpory.* Samozřejmě je možno uvést úvahy, podle kterých je pravděpodobné, že jsou antinomie s konečnou platností vyloučeny; avšak příliš velká tato jistota není.

Takže se mi nezdá zcela vyloučeno, že i v klasické analýze mohou být skryty protimluvy. Že dosud nebyly odkryty, neříká mnoho, uvážíme-li, že matematik v praxi vystačí s poměrně nepatrnou částí všech logicky možných rozmanitých komplikací při tvoření pojmů.

Nejdůslednější druh omezení je dán *„intuicionistickým"* hlediskem, které bylo formulováno především *Brouwerem a Weylem.* Tomuto hledisku lze nejjednodušeji porozumět ze *základní teze*: pojem nekonečna v matematice nelze přijímat tak, jako by nekonečné množiny existovaly předem samy o sobě a matematik je jaksi odkrýval — pojetí, které krátce nazvu „pojetím o sobě" — avšak výlučně v tom smyslu, že nekonečné množiny mohou být tvořeny jen *konstruktivně* krok po kroku z konečných množin; nekonečno se nesmí nikdy chápat jako *ukončené*, avšak jako výraz pro *možnost* neohraničeného rozšíření konečna.

Tato zásada má bezpochyby mnoho do sebe a již před objevením antinomií se objevily podobné snahy. Přijmeme-li toto stanovisko, pak antinomie zmizí, neboť se v nich zřejmě používá pojetí nekonečných množin o sobě. Naopak však z tohoto konstruktivního pojetí plynou nutně zákazy jistých úsudků běžných v současné matematice, zákazy stanovené intuicionisty.*) Pro příklad si všimněme prakticky nejvýznačnějšího takového případu, totiž *nepřímých existenčních důkazů.*

Podle klasického pojetí lze *nepřímo* dokázat existenci přirozeného čísla např. s vlastností C tak, že se předpokládá, že žádné číslo nemá vlastnost C, a z toho se nějak odvodí spor. Takový důkaz je třeba z konstruktivního hlediska zavrhnout. Při něm se totiž předpokládá existence nekonečné množiny všech přirozených čísel; to je z tohoto hlediska nesmyslné, protože ta nemůže být nikdy dána jako něco hotového. Přesto je možno zcela dokázat existenci přirozeného čísla vlastnosti C, pokud lze takové číslo přímo *udat nebo ukázat způsob jeho výpočtu.* Pak se totiž v důkazu neobjeví pojem množiny všech čísel.

Přehledné, snadno čitelné vylíčení intuicionistického stanoviska pochází znovu od *Heytinga.***)

Myslím si, že je třeba intuicionismu přiznat, že vyvodil skutečně nejdůslednější závěry z nepříjemností způsobených antinomiemi. Avšak proti *radikálnímu* intuicionismu, který odmítá jako nesmyslné v matematice radikálně vše, co neodpovídá konstruktivnímu pojetí, lze pozvednout závažné námitky. Věnuji se tomu blíže v §4. Na tomto

---

*) Podrobnější výklad o tom pro oblast teorie čísel je v mé práci citované v poznámce 3. Srovnej také § 3 této práce.

**) A. HEYTING: *Mathematische Grundlagen-Forschung-Intuicionismus-Beweistheorie.* Erg. Math. Grenzgeb. *3* (1935), sešit 4.

místě uvažme jen tolik: Přijmeme-li toto stanovisko, zůstanou z celé klasické analýzy jen trosky. Mnohé a dokonce některé základní věty nebudou platit, případně musejí být jinak pojaty a dokázány jiným způsobem. K tomu budou ještě jejich formulace většinou obšírnější a důkazy *zdlouhavější*. Existenční důkazy, jako např. důkaz „základní věty algebry" musejí být tak pozměněny, že pro číslo, jehož existence se tvrdí, je třeba udat *způsob jeho výpočtu* a je třeba vyloučit zvláštní případy, v nichž se to nepovede.

Neměli bychom se zajisté zaleknout ani největší oběti, pokud by to bylo skutečně *nutné*. Avšak je taková oběť skutečně nutná?

Tím přicházím k *Hilbertovu pojetí*. Ten předložil program, jak zachránit, pokud je to možné, celou klasickou matematiku z jejího povážlivého postavení tím, že se prokáže její *bezespornost* exaktním matematickým způsobem.

Provedení tohoto programu bohužel stojí z velké části ještě před námi. Ukázalo se, že těžkosti takových důkazů bezespornosti jsou větší, než se z počátku předpokládalo (srovnej § 2, *Gödelova věta*). V roce 1936 vyšel můj *důkaz bezespornosti čisté teorie čísel*;*) starší částečné výsledky pocházejí od *Ackermanna, von Neumanna a Herbranda*; avšak prakticky nejdůležitější důkaz pro *analýzu* zbývá ještě provést.

Aby bylo možno provést důkaz bezespornosti, k tomu je třeba jistých matematických důkazových prostředků, jejichž nepovážlivost je třeba předpokládat a již konečně nelze touto cestou dále odůvodnit. Absolutní důkaz, tj. důkaz bez jakýchkoli předpokladů, je samozřejmě nemožný. Zbývá otázka, které důkazové prostředky uznáme v tomto smyslu jako *základní*. Odpověď vyplývá z toho, co jsme dříve řekli: Smí se používat těch důkazových prostředků, při nichž se užívá pojmu nekonečna jen v *konstruktivním smyslu*, a je třeba se přísně vystříhat toho, co záleží v pojetí nekonečna o sobě, a tedy je na pováženou. Toto omezení znamená asi totéž, co označil Hilbert jako „*finitní stanovisko*". Zdá se ovšem, že je pro důkazy bezespornosti třeba poněkud dále sahajících prostředků, než měl Hilbert na mysli a čemu rozuměl pod „finitním pojetím". Avšak v každém případě souhlasí tyto prostředky s *konstruktivním pojetím nekonečna*, a v tom právě se podstatně liší od povážlivých důkazových prostředků.

Hlavním rysem Hilbertova stanoviska se mi zdá úsilí odejmout problém základů *filozofii* a pokud možno se s ním zabývat vlastními prostředky matematiky. Bez prostředků stojících zcela mimo matematiku ovšem problém řešit nelze. Hilbertův plán je však omezuje *na nejmenší míru*: Je třeba si pouze uvědomit a ujasnit zásadní rozdíl mezi konstruktivním pojetím nekonečna a pojetím nekonečna o sobě; a jak to, že uzávěrům podle konstruktivního hlediska náleží větší míra jistoty, takže je možno je zvolit jako dostatečně jistý základ, aby se na něj mohla převést bezespornost těch částí matematiky, které pracují s pojmem nekonečna o sobě.

---

*) G. GENTZEN, *Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie*. Math. Ann. *112* (1936), str. 493 až 565. Je třeba poznamenat, že ve IV. oddílu tohoto pojednání v protikladu k ostatním částem přišla pro nedostatek místa a času poněkud zkrátka srozumitelnost souvislostí a přesnost při vedení důkazů. Nové pojetí důkazu se zevrubným vyložením základní myšlenky tvoří *druh díl tohoto sešitu*.

V budoucnu se nebudu také zmiňovat o žádných *sporných filozofických otázkách*, na něž odpověď neovlivňuje matematickou praxi a které spíše problematiku nadarmo zamotávají a celou ji znesnadňují.

Krátce se zmíním ještě o tzv. „*logicismu*", který obyčejně bývá jmenován vedle *intuicionismu* a *Hilbertova pojetí* jako *třetí* podstatné stanovisko k základům matematiky. Jeho teze jsou založeny na jistých filozofických představách, do kterých se již podle toho, co jsem řekl, nechci pouštět. K problému antinomií a nekonečna, především důležitých pro praktickou matematiku, zaujal tento směr vyčkávací nebo nerozhodné stanovisko a neposkytuje k jejich řešení žádný přínos, protože jej zajímají hlavně jiné otázky, např. založení pojmu čísla.

§ 2. Exaktní matematické zkoumání základů: axiomatika, metalogika, metamatematika. Věty Gödelovy a Skolemovy

Tady musím něco říci o nových výsledcích a především o starších dosud důležitých výsledcích exaktního matematického zkoumání základů, tj. toho oddílu matematiky, který se zabývá základy matematiky matematickým zkoumáním. Předmětem těchto výzkumů jsou např. *systémy axiómů* pro matematické teorie — tyto výzkumy jsou odedávna známy — v novější době také zvláště *logické uzávěry* a obecné *dokazovací metody* v matematice.

V posledních desetiletích se těmito otázkami zabývala celá řada vědců ze všech zemí a získali množství výsledků. V Německu se pěstují tyto metalogické a metamatematické výzkumy v současné době pravidelně jen v Münsteru; v cizině jako hlavní místa pěstování této větve matematiky je třeba jmenovat především Ameriku a Polsko.

Hlavní úlohou metamatematiky jsou *důkazy bezespornosti* vyžadované k uskutečňování Hilbertova programu. Další velké problémy jsou: *rozhodovací problém*, tj. problém nalézt pro danou teorii metodu, která dovoluje rozhodnout o každém myslitelném teorému z dané oblasti, je-li pravdivý nebo lživý; potom otázka po *úplnosti*, tj. otázka, zda je jistý systém axiómů a způsobů uzávěrů pro jistou teorii *úplný*, tedy zda pro každou myslitelnou větu této teorie může být dokázána její správnost nebo nesprávnost pomocí těchto uzávěrů.

V úzkém vztahu k těmto stěžejním problémům jsou některé významné věty, které *Gödel* dokázal asi před 8 lety a které došly velkého uznání a částečně i nesprávného výkladu.*)

Je to nejprve věta o *důkazech bezespornosti*, která říká, že nelze dokázat bezespornost matematické teorie, která obsahuje čistou teorii čísel a je skutečně bezesporná, jenom důkazovými prostředky této teorie samé, zvláště pak ne jenom zlomkem těchto důkazových prostředků. Tato věta je často vykládána tak, jako by se jí prokázalo, že *Hilbertův program* je neproveditelný. Mělo se totiž za to — a mluvila pro to také mnohá hlediska —, že „finitní", popř. „konstruktivní" způsoby uvažování, přípustné

*) KURT GÖDEL: *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme.* Mh. Math. Physik *38* (1931), str. 173–198.

k důkazům bezespornosti tvoří jen část přesně formulovaných dokazovacích způsobů vyskytujících se v *čisté teorii čísel*. Potom by ovšem podle *Gödelovy věty* nebyla těmito prostředky bezespornost čisté teorie čísel vůbec prokazatelná. Myslím si ovšem, že jsou **způsoby uvažování, které** jsou zcela ve shodě s *konstruktivním pojetím nekonečna*, ale **často přece překračují** rámec čisté teorie čísel, ba bezpochyby mohou překročit vůbec **rámec** ***každé*** **formálně** uzavřené teorie. Uvedl jsem dotyčné uzávěry, pokud jich bylo **třeba**, pro důkaz bezespornosti čisté teorie čísel, ve své práci.*) Souvisejí s „transfinitní indukcí" vyskytující se v teorii množin, což však neznamená, že na ně padá stín její povážlivosti, který na ní lpí; spíše se dokazují *konstruktivním* způsobem zcela nezávisle na teorii množin. *Gödelova věta* má přirozeně, nehledě na tyto skutečnosti, velký význam jako velmi významný výsledek, který poskytuje cenné služby především právě při vyhledávání důkazů bezespornosti, protože napovídá, jakými prostředky nelze právě dojít k cíli.

Jiná z Gödelových vět se týká *rozhodovacího problému*, a to pro tzv. *predikátovou logiku*. Říká, že určité věty nemohou být rozhodnuty jistými daleko sahajícími prostředky matematiky. Tuto větu v poslední době podstatně zesílil *Church* tím, že se mu podařilo ukázat na základě velmi obecného pojmu „postupu", že pro predikátovou logiku nemůže být nalezen vůbec *žádný rozhodovatelný postup*, takže problém rozhodování v tomto případě není vůbec řešitelný.**) Je to tedy tak, že kdyby se našel rozhodovací proces pro predikátovou logiku, mohla by být např. platnost nebo neplatnost velké Fermatovy věty a podobných číselně teoretických problémů v základě jednoduše vyčíslitelná a je ovšem možno ihned říci, že není příliš pravděpodobné, že by takový rozhodující postup mohl být nalezen. Nicméně je ovšem velmi cenné, mít tuto domněnku potvrzenu určitým důkazem. Churchův důkaz záleží ovšem v tom, že pojem „výpočetního postupu" stanovený Churchem se pojímá jako nejobecněji možný. Kdyby se někomu povedlo najít jiný druh výpočetního postupu, bylo by myslitelné získat tím přece jenom jakýsi obecný rozhodující postup. Je možno však říci, že pojem udaný Churchem se považuje za tak obecný, že si nelze opravdu představit postup, který by pod něho nespadal. Mimoto mluví ve prospěch jeho formulace ta okolnost, že se dojde ze zcela rozdílných výchozích bodů vždy k témuž pojmu, případně k pojmu rovnocennému.

Třetí z Gödelových výsledků se týká *problému úplnosti*. Říká, že každá formálně uzavřená bezesporná matematická teorie je *neúplná* v tom smyslu, že lze nalézt číselně teoretické věty, které jsou správné, ale nejsou dokazatelné prostředky této teorie. To je

*) Viz. pozn. na str. 259. Musel jsem být v tomto pojednání stručný a věřím, že podrobnější vylíčení tohoto bodu, který je stěžejním bodem celého důkazu, by bylo pro jeho objasnění důležité; doufám, že je budu moci příležitostně uveřejnit, pokud možno rovnou i pro důkaz bezespornosti analýzy.

**) A. CHURCH: *An unsolvable problem of elementary number theory*. Amer. J. Math. *58* (1936), str. 345–363.
A. CHURCH: *A note on the Entscheidungsproblem*. J. Symb. Log. *I* (1936), str. 40–41.
A. CHURCH: *Correction to a note on the Entscheidungsproblem* J. Symb. Log. *I* (1936), str. 101–102.
Srov. také: A. M. TURING: *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*. Proc. Lond. Math. Soc. *2* (1937), str. 230–265.

bezpochyby velmi zajímavý výsledek, ale nikterak znepokojující. Je možné jej vyjádřit také tak, že nelze pro teorii čísel nalézt žádný systém odvozujících pravidel platný jednou pro vždy, avšak že lze spíše vždy znovu nalézt věty, jejichž důkazy vyžadují nové druhy odvozovacích pravidel. Že tomu tak je, nebylo patrně možné ihned očekávat; avšak jistě je to zřejmé.

Tato věta prozrazuje přirozeně jistou slabost *axiomatické metody.*

Poněvadž důkazy bezespornosti zahrnují obecně jen omezený systém důkazových způsobů, je třeba i je rozšířit, jestliže si předsevzeme rozšířit způsoby dokazování vůbec.

Je pozoruhodné, že celá dosavadní matematika používá stále jen zcela nemnoha stále stejných způsobů dokazování, které lze snadno spočítat, takže potřeba jejich rozšíření tu sice teoreticky je, avšak prakticky není aktuální. Nyní pro tento účel podal Gödel nedokazatelné číselně teoretické věty zvlášť pro to konstruované a prakticky bezvýznamné; s jednou podstatnou výjimkou ovšem: je to výrok o *bezespornosti teorie*, který patří také k vnitřně nedokazatelným větám. Proto je pro její důkaz jistě třeba použít nových způsobů dokazování, které v tomto případě mají být nadto konstruktivní povahy; to jsem již vyložil dříve.

Chtěl bych se teď zmínit o některých výsledcích, které se týkají teorie množin.

Ve snaze zachránit teorii množin navzdory pohromě antinomií učinily se jisté omezující podmínky, kterými by se vyloučily protimluvy. Pro to se vyvinuly různé *systémy axiómů* teorie množin; nejznámější je systém *Zermelův* a *Fraenklův.* Pro část *tohoto* systému, tzv. „obecnou teorii množin" podal nedávno *Ackermann* důkaz bezespornosti nebo spíš převedl bezespornost tohoto systému na bezespornost čisté teorie čísel.*) „Obecná teorie množin" vznikne, vypustíme-li z celkového systému axiómů „axióm nekonečnosti", který požaduje existenci nekonečně mnoha předmětů této teorie. *Ackermannův* důkaz záleží v tom, že může být pro tuto část teorie množin vytvořen *model sestávající z přirozených čísel*, okolnost, která je ostatně již déle známa. Připojíme-li axióm nekonečnosti, nelze již něco podobného očekávat, protože tím se právě zavádí do teorie množin existence nespočetných mohutností.

V této souvislosti je třeba připomenout jednu větu, která na první pohled vypadá velice pozoruhodně a vede k zajímavým důsledkům. Byla formulována poprvé asi před 15 lety a označena jako „věta o relativitě pojmů teorie množin".**) Tato věta nenáleží ostatně na rozdíl od předchozích metamatematických vět k oblasti *konstruktivního* pojetí, avšak je ji třeba přičítat pojetí *o sobě*, již jen proto, že jedná o nespočetných mohutnostech. (Tato okolnost není na újmu jejímu významu, který se vztahuje opět právě na matematiku o sobě.) *Skolemova věta* říká: Má-li systém axiómů určitého druhu vůbec model, a to libovolně velké mohutnosti, potom má také právě spočetný model, který ten systém axiómů splňuje. K dotyčnému druhu patří všechny dosud obvyklé systémy axiómů, popřípadě je lze přetvořit tak, že jsou toho druhu; a není

---

*) W. Ackermann: *Die Widerspruchsfreiheit der allgemeinen Mengenlehre.* Math. Ann. *114* (1937), str. 305–315.

**) Th. Skolem: *Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre.* Verh. V. Skand. Math. Kongres (1922), str. 217–223.

Th. Skolem: *Über einige Grundlagenfragen der Mathematik.* Skr. Norske Vid.-Akad. Oslo, I., mat.-nat. Kl. (1929), No. 4.

také zřejmé, jak by se mohl nějaký systém axiómů formulovat, aby nespadal pod pojem vymezený *Skolemem.*

Použije-li se této věty na nějaký systém axiómů teorie množin, stane se, pokud je tento systém vůbec *splnitelný,* což přirozeně chceme, že může být splněn ve *spočetném modelu.* Dalo by se říci, že tento výsledek není právě pro axiomatickou teorii množin příjemný. Říká totiž, že všechny nespočetné mohutnosti, o kterých je v teorii množin řeč, jsou v jistém smyslu jenom pouhé zdání, když totiž je možno na místo těchto množin položit jednoduše jisté *spočetné* množiny, aniž by se změnila platnost libovolné věty.

Zpočátku vzniká dojem, jako by tato věta musila vést ke *sporu.* V axiomatické teorii množin se např. dokazuje, že množina všech reálných čísel není spočetná. To jest, dokazuje se, přesně řečeno, věta: Neexistuje žádné vzájemně jednoznačné přiřazení přirozených čísel číslům reálným. Povšimněme si spočetného modelu této teorie množin, který podle *Skolema* existuje. Tento model obsahuje předměty, které zastupují přirozená čísla axiómatického systému, jiné předměty, které zastupují reálná čísla, a také takové, které zastupují *přiřazení,* která jsou na základě axiómatického systému možná; a každý druh zahrnuje nejvýše spočetně mnoho předmětů. Přesto zůstává tato věta (o neexistenci vzájemně jednoznačného přiřazení přirozených čísel číslům reálným) v tomto modelu platná, přičemž totiž mezi *přiřazeními* existujícími v modelu není žádné, které by spočetně mnoha zástupcům „přirozených čísel“ přiřazovalo vzájemně jednoznačně spočetně mnoho zástupců „reálných čísel“. Samozřejmě, že takové přiřazení samo o sobě existuje; ale to právě *není* mezi přiřazeními nacházejícími se v modelu *zastoupeno.*

Možná že se tento poněkud nesrozumitelný stav věcí stane poněkud jasnějším tímto obratem, při kterém se rovněž omezím na kontinuum reálných čísel jako na prototyp „nespočetné mohutnosti“: Postavme se na stanovisko pojetí o sobě, že totiž kontinuum je předem dáno samo o sobě, třeba jako množina všech možných nekonečných desetinných zlomků. Potom je možno podle Cantora dokázat nespočetnost tohoto systému. Teď však lze říci: Každý *axiomatický systém* analýzy, který je možno vytvořit, je v jistém smyslu *nedostatečný* pro úplné uchopení tohoto myšleného kontinua. Neboť *Skolemova* věta tvrdí: jestliže vezmeme za základ jistý axiomatický systém, může být toto kontinuum *nahrazeno* spočetným modelem, který právě tak splňuje všechny vlastnosti kontinua stanovené v axiomatickém systému. V tomto pojetí by neukazoval *Skolemův* výsledek ani tak na nedostatek kontinua ani vyšších mohutností, jako na nedostatečnost lidského myšlení při chápání těchto mohutností.

Jak se dá zachránit, dá-li se vůbec zachránit, abstraktní teorie množin ze Skylly antinomií a Charybdy *Skolemovy věty* o relativitě, to musí rozhodnout budoucnost.

Je třeba výslovně poznamenat, že jiné části teorie množin (bodové množiny, II. číselná třída) jsou těmito těžkostmi postiženy jen nepatrně a stále si zachovávají jistý význam.

Srovnáme-li *Skolemovu větu* s *Gödelovou větou o neúplnosti,* lze říci, že obě ozřejmují jisté nedostatky formálně omezených axiomatických systémů (pod nimiž jsou teď zahrnuty i přípustné důkazové prostředky). Okolnosti která snad na první pohled překvapuje u *Gödelovy věty,* že totiž i při tvoření složitých axiomatických systémů analýzy apod. stále zůstávají právě *číselně teoretické* věty nedokazatelné, se dostává *Skolemovou větou* určitého vysvětlení: Podle ní se vztahují i nejkomplikovanější axiomatické systémy v zásadě na spočetný model, tedy i na přirozená čísla; jejich věty lze tím zcela přetvořit v *číselně teoretické* věty; všechny tyto systémy jsou tedy v zásadě jen *teorie čísel*.

Jiný *Skolemův* výsledek ukazuje také na nedostatečnost axiomatického způsobu vzhledem k teorii čísel. Máme-li pro přirozená čísla nějaký obecný systém axiomů zmíněného druhu, lze je nahradit *modelem, který s přirozenými čísly není izomorfní* a který také tento axiomatický systém splňuje.

§ 3. Kontinuum

V tomto a následujících paragrafech se chci poněkud dotknout blíže protikladů mezi *konstruktivním pojetím* a *pojetím o sobě* v oblasti významné pro praktickou matematiku, a to v analýze. V tomto paragrafu má být objasněn rozdíl obou pojetí při tvorbě pojmu *reálného čísla* a *reálné funkce*, zatímco v § 4 má být ukázán způsob *sjednocení různých stanovisek*.

Pojem *iracionálního čísla* se získá třeba známým způsobem: Interval od 0 do 1 se rozdělí na dva díly, každý díl opět na dva díly atd.; tak dostáváme postupně stále jemnější dělení. Posloupnost těchto intervalů, z nichž každý je díl předchozího, se teď stahuje čím dále, tím více k jednomu bodu. Nyní nastane v rámci pojetí o sobě skok do ukončené nekonečnosti: Taková *nekonečně dlouhá posloupnost* se prohlásí za „reálné číslo“.

Z tohoto pojetí plynou některé zvláštní důsledky, kterých lze, nehledě na povážlivost pojetí o sobě vznikající v souvislosti s antinomiemi, použít proti tomuto pojetí: Jednak lze obvyklým způsobem dokázat, že reálná čísla tvoří nespočetnou množinu. Jednak jsou všechny věty, všechny definice, všechny důkazy, které je kdy možno vytvořit, po případě provést, *spočetné*, protože je vždy možné je představit konečně mnoha znaky. Tím se dostaneme k důsledku, že jsou reálná čísla, která jednotlivě nelze vůbec definovat, platné věty, které nikdo nemůže nikdy vyslovit, ani dokázat. Přidáme-li k tomu *Skolemovu větu*, pak dále dostaneme, že vůbec celá dosavadní analýza zůstane ve všech svých částech správná, vztáhneme-li ji na *jistý spočetný model*.

Je jistě nasnadě potom říci: je-li „nespočetné kontinuum“ do té míry neuchopitelné pro naše myšlení, má vůbec smysl mluvit o něm jako o něčem *skutečném*? V § 4 ukáži, jak lze přece jen v jistém omezeném smyslu odpovědět na tuto otázku kladně.

Nejprve je třeba vyšetřit, co je *konstruktivní stanovisko* schopno nabídnout jako náhradu za pojem iracionálního čísla o sobě.

Posloupnost dělení intervalů může být začata jako prve. Ale pojem *ukončené* nekonečné posloupnosti podintervalů musí být zavržen jako nesmyslný; na nekonečno se smíme dívat jen jako na *možnost*, jako na *výraz pro neohraničenost konečna*.

Smíme tedy říci: Je *možno* pokračovat v dělení stále dále a dále. Avšak tak nezískáme žádné iracionální číslo, ale v každém stadiu dělení pouze spoustu nakonec velice blízko sebe ležících racionálních čísel. V tomto smyslu se vyjádřil Kronecker, že nejsou žádná iracionální čísla.*) Tak úzkoprsý člověk však ani jako *konstruktivista* nemusí být; jsou možnosti, jak se dostat dále. Můžeme totiž považovat iracionální číslo za dané, existuje-li *zákon*, který dovoluje vyjádřit posloupnost jmenovanného druhu *libovolně daleko*. (Doporučuje se potom, abychom se vyhnuli jistým formálním potížím, uvažovat dvojité duální intervaly, totiž takové, které vzniknou spojením dvou sousedních duálních intervalů téhož dělení.)

Takový zákon se lehce udá, např. pro $\sqrt{2}$, obecně pro $\sqrt[n]{m}$, ale také pro transcendentní čísla, jako je π a e a vůbec pro všechna čísla, kterých je třeba v analýze jako *jednotlivě definovaných čísel*; totiž vždy potom, můžeme-li dotyčné číslo *spočítat* s libovolnou přesností, jak si přejeme.

Nyní je třeba, chceme-li zůstat konstruktivnímu stanovisku věrni, zacházet s takto definovanými „čísly" ovšem opatrně. Člověk se nesmí dát svést k tomu, aby pohlížel na takové číslo jako na nějaký ukončený nekonečně dlouhý dyadický zlomek; dáno není v tomto smyslu vlastně ani číslo, ale spíše *zákon*, který umožňuje jeho postupné upřesňování; *ten* sám je něco *konečného* a hodí se pouze k tomu, že v jistých souvislostech *zastupuje* nekonečně dlouhé číslo, o kterém se dá ostatně předem říci, že *vlastně vůbec neexistuje*.

Analýzu pojmu čísla tohoto druhu se pokusil provést ve své práci *Das Kontinuum* Weyl.**) (Neprosadil tam ovšem do posledních důsledků základní konstruktivní stanovisko pro přirozená čísla, ale později to napravil.) Potíž, která se při tom *objevuje*, jsou omezení kladená na pomocné prostředky přípustné k výpočtu a tím i k definici čísla. Weyl zpočátku přijal určité omezení; intuicionisté od toho jinak zcela upouštějí, stanovisko, které je zcela přiměřené, protože všeobecné omezení nese s sebou zásadní potíže, které jak již bylo řečeno, mají ohraničené systémy axiómů a odvozovacích pravidel, totiž: stále a opět být schopen a mít potřebu se rozšiřovat. To neznamená nikterak podstatný nedostatek; v případech prakticky především důležitých je *bez dalšího jasné*, co se míní pod pojmem, „způsob výpočtu".

Jistým upřesněním je *Churchův pojem* výpočetního postupu, o němž jsme již zmínili v § 2; nezávisle na něm byl vytvořen *Turingem* rovnocenný pojem a zvláště použit na výpočet reálných čísel.***) Dotyčné upřesnění záleží v tom, že je udán *obsáhlý souhrnný pojem* zahrnující všechny „vyčíslující metody"; tím lze provést *důkaz nemožnosti* jako již ten, o kterém jsme se zmínili v § 2; ovšem tato precizace však nedovoluje rozhodnout vždy o tom, co spadá pod tento souhrnný problém, zda je to „vyčíslující postup" anebo ne.

Rozšíření konstruktivistického pojmu reálného čísla podal *Brouwer* „*volnými* volbami posloupností". K nim se dospěje zcela zákonitě, usilujeme-li se zavést pojem *funkce reálných čísel*. Matematika o sobě vysvětluje tento pojem, jak známo, jednoduše jako vztah, kterým se přiřazuje libovolnému reálnému číslu druhé reálné číslo jako funkční

*) Srov. H. Poincaré, *Wissenschaft und Hypothese*, něm. vyd., komentář F. Lindemanna, str. 246 prvního i druhého vyd.

**) Srov. H. Weyl; Über die Grundlagenkrise der Mathematik. Math. Z. 10 (1921), str. 39–79.

***) Srov. druhou pozn. na str. 261.

hodnota. V tom vězí třikrát pojem *završené nekonečnosti*, v obou reálných číslech totiž a v univerzálním, abstraktním „přiřazení“.

S tím si konstruktivista nic nepočne. Mohl by teď postupovat tak, že by definoval funkci jako zákon, který by každému zákonu definujícímu reálné číslo přiřadil druhý zákon definující druhé reálné číslo. Ale snadno se nahlédne, že i následující pojetí, bližší pojmu funkce matematiky o sobě je veskrze slučitelné se základní *konstruktivistickou tezí.*

Nevychází se z pojmu reálného čísla daného zákonem, ale opět z postupného dělení intervalů, definujeme-li totiž funkci jako *zákon*, který působí takto: Začneme-li jakkoli volit posloupnost intervalů nahoře popsaného druhu, pak je funkčním zákonem přiřazen po jistém konečném počátečním kousku této posloupnosti první interval „funkční hodnoty“, po pokračování v této posloupnosti až k jistému dalšímu místu druhý takový interval atd. Přiřazené intervaly mají tedy znovu být vloženy jeden do druhého. — *Krátce řečeno*: Vždy lze *vypočítat* podle přání konečný počet počátečních míst *funkční hodnoty* z dostatečně velkého počtu počátečních míst *hodnoty argumentu.*

Že tento pojem funkce je stále podstatně užší než pojem funkce o sobě, poznáme z okolnosti snadno patrné, že totiž taková „funkce“ je vždy spojitá. *Brouwer* dokazuje nadto *stejnoměrnou spojitost* těchto funkcí, ovšem zachází pro konstruktivistu příliš daleko při používání „transfinitní indukce“.*)

Hodnoty argumentů u tohoto pojmu funkce jsou nyní to, co Brouwer nazývá „volně volitelné posloupnosti“, totiž posloupnosti intervalů, při kterých je vždy možno *volně volit* následující interval s jediným omezením plynoucím ze základní podmínky pro zapadání intervalů do sebe.

Také u tohoto pojmu čísla záleží na tom, aby se ho používalo opatrně; nemá vlastně žádný samostatný smysl, avšak má jen smysl při vhodné souvislosti, neboť *ukončená* nekonečná posloupnost je jako předtím pojem beze smyslu; *volně volitelné posloupnosti* smí být použito jen v té souvislosti, kdy je řeč o jejím konečném počátečním úseku nebo jde-li o možnost jejího libovolného dalšího pokračování. To je případ udané definice funkce.

Značné *rozdíly* mezi *intuicionistickou analýzou a klasickou analýzou o sobě* nastanou však při dalším budování teorie, především při *existenčních větách*, jak již jsem poznamenal v *prvním paragrafu*. Neboť konstruktivista musí požadovat *zákon o vyčíslení* pro číslo, jehož existence se tvrdí; to často existenční důkazy o sobě neudávají.

Intuicionistická analýza se stává pak daleko složitější než analýza klasická. Něco z toho lze zjistit již při předvedených definicích základních pojmů. Konstruktivista potřebuje např. *různé* pojmy reálných čísel pro různé účely, zatímco pojetí o sobě vystačí s jediným jednoduchým pojmem.

Pro základní povážlivost pojetí o sobě je velmi žádoucí *konstruktivní důkaz bezespornosti* pro klasickou analýzu. Mám za to, že se podaří dalším rozšířením týchž

---

*) L. E. J. BROUWER: *Beweis, daß jede volle Funktion gleichmäßig stetig ist.* Proc. Akad. Wet. Amsterdam *27* (1924), str. 189–193 a str. 644–646. Pomocí tohoto *Brouwerova pojmu funkce* lze bez potíží definovat konstruktivně funkce nejvíce používané v analýze. Ty totiž bývají veskrze toho druhu, že lze *vypočítat* stále přesněji funkční hodnotu nepřetržitým omezováním hodnoty argumentu.

pomocných prostředků, které umožnily důkaz bezespornosti teorie čísel. Asi by si člověk myslil, že nespočetnem, kontinuem se vynořuje nová potíž. Na to je však možné např. namítnout, že podle *Skolemovy relativní věty* je přece každý určitý formálně uzavřený systém analýzy — a jen pro takové pevně popsané systémy je třeba dokazovat bezespornost — splnitelný *spočetným* modelem, takže nespočetné i v otázce *bezespornosti* je jen *zdánlivé*.

§ 4. Možnost smíření různých stanovisek

Chtěl bych vyslovit mínění, že po zdařeném důkazu bezespornosti pro analýzu by nestála v cestě žádná překážka, aby se zástupci různých směrů — tedy konstruktivisté, případně intuicionisté na jedné straně a Hilbertovi přívrženci právě tak jako stoupenci čistého pojetí o sobě — *neshodli na ponechání klasické analýzy* v její současné podobě. V tomto okamžiku je tomu sice tak, že radikální konstruktivisté s tímto požadavkem nesouhlasí, a v tom vězí vlastní a zásadní názorový rozdíl mezi *Brouwerem a Hilbertem*. Intuicionisté prohlašují totiž všechny matematické věty záležející v pojetí nekonečna o sobě za nesmyslné, její důkazové způsoby za prázdnou hru se symboly bez jakéhokoli významu.

V předchozích paragrafech jsem uvažoval o různých případech, které propůjčují tomuto názoru jisté opory. Na druhé straně proti tomu stojí, abych uvedl jen *stanovisko* největší váhy, mohutné množství úspěšných aplikací klasické analýzy ve fyzice. Proto se chci ještě pokusit objasnit, jak lze dojít, i když uznáváme základní konstruktivistickou tezi, k přesvědčení o zachování a dalším rozvíjení analýzy o sobě.

Hilbert sám k tomu ukázal cestu: totiž metodou *ideálních prvků*.*)

To znamená: Pohlíží se na takové výroky, v nichž je řeč o nekonečnu v pojetí o sobě, jako na *ideální výroky*, jako na výroky, které vůbec neznamenají to, co doslova říkají, které však mohou být nesmírně užitečné k završení teorie, k usnadnění důkazů a k pohodlnější formulaci jejích výsledků. Tak se zavádějí např. v projektivní geometrii *nevlastní body*, a tím se získá ta výhoda, že se zjednoduší mnohé věty, které by jinak byly zatíženy mnoha výjimečnými případy. Tím se ovšem stane, že smysl některých vět není v leckterých případech obvyklý. Např. se říká: „Dvě přímky mají vždy společný bod.“ Jsou-li však tyto přímky náhodou rovnoběžné, pak nemají ve skutečnosti *žádný* společný bod. Tento postup je však nepochybný, protože se přesně stanovilo, co se má rozumět v takových výjimečných případech pod pojmem „bod“, který má teď *širší* smysl.

Anebo vezměme jiný příklad, který podle mne ukazuje ve vztahu k fyzice ještě zřejmější podobu vztahu konstruktivní matematiky a matematiky o sobě.

Mám na mysli příležitostné pokusy vytvořit „přirozenou geometrii“, tj. geometrii, která se lépe hodí k fyzikální zkušenosti než obvyklá (euklidovská) geometrie.**) V té

*) Srovnej D. HILBERT: *Über das Unendliche*, Ann. *95* (1926), str. 161–190.

**) Srov. J. HJELMSLEV, *Die natürliche Geometrie*. Hamb. math. Einzelschriften *1* (1923); také: Abhandl. Math. Sem. Hamburg *2* (1923), str. 1–36.

platí např. věta „dvěma různými body prochází právě jedna přímka“ jen tehdy, když ty body neleží příliš blízko. Leží-li totiž příliš blízko, je možno vést zřejmě oběma body více sousedních přímek. *Kreslič* musí mít tyto okolnosti na zřeteli; *čistá geometrie* to však nedělá, protože body *idealizuje*. Na místo rozměrného bodu ze zkušenosti staví ideální bezrozměrný bod matematické teorie, který se ve skutečnosti nevyskytuje. A dělá dobře, jak ukazují její úspěchy: vyplývá z toho matematická teorie daleko jednodušší a završenější než ona přirozená geometrie, která musí stále počítat s nepříjemnými výjimečnými případy.

Tomu docela odpovídají vztahy matematiky o sobě a konstruktivní matematiky: Matematika o sobě idealizuje např. pojem „existence“, říká-li: Číslo existuje, lze-li jeho existenci dokázat způsobem platným pro konečné obory a nyní použitým pro *ukončené nekonečné obory*, zcela tak, jako by to byly skutečně existující výtvory. Tím se dostává tomuto pojmu existence výhod i nevýhod ideálních prvků. *Výhod* totiž, že se dosáhne povážlivého zjednodušení a uzavřenosti teorie — neboť intuicionistické existenční důkazy jsou, jak již řečeno, většinou velmi složité a zatíženy nepříjemnými výjimečnými případy — *nevýhod* naproti tomu, že toho ideálního pojmu existence nelze použít ve stejné míře na fyzikální skutečnost jako třeba konstruktivního pojmu existence.

Zkoumejme jako *příklad* rovnici $a \cdot x = b$ v oboru reálných čísel. Podle pojetí o sobě je to jednoduché: Tato rovnice má kořen, není-li a rovno 0. Intuicionista naproti tomu říká: Tato rovnice má kořen, jestliže jsem zjistil, že a je různé od 0. Může se však stát, že podle způsobu zadání nelze poznat, ani že a je rovno nule, ani že a není rovno nule. V tomto případě zůstává otázka po existenci kořene otevřena. — Je možné dodat, že toto pojetí více odpovídá pohledu *fyzika*, který má určit koeficient a třeba z *experimentu*, který není dosti přesný, aby bylo možno stanovit s jistotou vzdálenost mezi a a nulou.

Bylo by lze namítnout: Co jsou nám platné krásně uzavřené nauky, zvlášť *jednoduché* věty, nemůže-li jich být doslova použito na fyzikální skutečnost? Nemělo by se dát přednost způsobu, který je *namáhavější* a dává *složitější* výsledky, který má však tu přednost, že tyto výsledky mají bezprostřední význam.

Odpověď nám dává úspěch prvního způsobu; pomysleme opět na příklad geometrie. Velké výkony matematiky ve prospěch fyzikálního poznání záleží právě v této metodě, fyzikální skutečnost *idealizovat* a tím *zjednodušit* její zkoumání. Samozřejmě musíme si být potom při aplikaci obecných výsledků na skutečnost vědomi rozdílů podmíněných idealizací a pustit se do odpovídajícího překladu. *Aplikovaná matematika* má zde své pole působnosti.

Na srovnání cituji slova *Heytingova* a *Weylova*:

Intuicionalista *Heyting* říká na jednom místě:*) „Z formálního stanoviska může být vyzvednuto jako cíl fyziky ovládnutí přírody. Je-li tohoto cíle dosaženo pomocí formálních metod“ — tj. matematiky o sobě — „neobstojí proti tomu žádný argument“.

---

*) Dílo citované v druhé pozn. na str. 258.

Weyl formuluje jako své stanovisko ve sporu mezi *Brouwerem* a *Hilbertem*:*) „Bereme-li matematiku samu pro sebe, omezme se s *Brouwerem* na rozumné pravdy, podle nichž je nekonečno jen otevřeným polem možností; nelze nalézt motiv, který by byl proti. V přírodních vědách se však dotýkáme oblasti, která je tak jako tak názornou jistotou neproniknutelná; zde se stává poznání nutně poznáním symbolické povahy, a proto, je-li matematika brána spolu do tvorby konstrukce světa, není již nutné, aby se z toho matematika dala vydělit jako zvláštní obor názorné jistoty: Na této vysoké hlídce, z které celá věda vypadá jako jediná, dávám *Hilbertovi* za pravdu."

Mám dojem, že některé *intuicionistické* základní pojmy, např. pojem existence nebo pojem reálného čísla jsou přesně vzato také již „ideální prvky". To však může být sporné; je obtížné to rozebírat a není to tak důležité. V žádném případě by to neznamenalo, že by k používání takových pojmů bylo třeba *důkazu bezespornosti*; užívá se jich jenom tak, že si je člověk stále vědom jejich přesného konstruktivního smyslu (srovnej § 3). Právě tak se tomu má v projektivní geometrii „s nevlastními body"; *jinak* je tomu ovšem s ideálními pojmy matematiky o sobě, které — nazíráno z konstruktivistického hlediska — nemají žádný obsah, který samy popisují a který by měl smysl, avšak kterých se používá tak, jako by měly doslovný smysl.

Když na jedné straně matematika o sobě nachází i pro konstruktivitu své oprávnění, mělo by také naopak *konstruktivní stanovisko* zaujmout v matematice více místa než dosud. Ve zkoumání základů matematiky je již běžné vést důkazy pokud možno konstruktivním způsobem nejen pro větší nepochybnost (na kterou bychom nebyli vždy odkázáni), ale také pro větší věcný obsah výsledků. Neboť je zřejmé, že konstruktivní existenční důkaz znamená víc než nepřímý důkaz o sobě. Především v *čisté teorii čísel* a vůbec ve všech teoriích, v kterých máme co dělat s *konečně* označitelnými předměty, je přirozené vzít za základ *konstruktivní stanovisko*.**) Tak se také odjakživa postupovalo; celé naivní dokazování, při kterém si člověk nepřipouští vůbec žádné zvláštní myšlenky o metodách důkazů, je od přírody především konstruktivní, tj. bojí se „nekonečna". Ostatně v těchto oborech přináší používání transfinitních důkazů o sobě sotva nějaký užitek. Jinak v říši kontinua, v analýze a geometrii: zde slaví pojetí o sobě své triumfy; zde je mu konstruktivní pojetí prakticky podřízeno.

Na závěr lze tedy říci: Konstruktivní (intuicionistická, finitní) matematika zaujímá pro svou velkou názornost a zvláštní význam svých výsledků uvnitř celé matematiky *významný obor*. K *radikálnímu odmítnutí* částí analýzy záležejících v pojetí o sobě není však žádný přesvědčivý důvod; ty naopak mají *velký vlastní význam* především pro fyzikální aplikace.

Jestliže se konečně budeme dívat na kontinuum jako na pouhou *fikci*, jako na ideální výtvor nebo zda budeme ve smyslu pojetí o sobě přece trvat na tom, že *reálně existuje* nezávisle na našich konstrukčních prostředcích, je potom čistě teoretická otázka, jejíž rozhodnutí může zůstat věcí vkusu; pro matematickou praxi má sotva nějaký význam.

*) H. WEYL: *Die Stufen des Unendlichen.* Jena 1931, str. 17.

**) Srovnej také předmluvu k 2. vydání prvního dílu knihy VAN DER WAERDENA: *Moderní algebra.*