Bieberbachova doměnka

Christian Pommerenke

Formulace problému

Riemannova věta o konformním zobrazení říká, že každou jednoduše souvislou rovinnou oblast (s výjimkou celé roviny) lze konformně zobrazit na jednotkový kruh $\mathbb{D}$. Tato silná věta často umožňuje čistým i aplikovaným matematikům redukovat problémy týkající se rovinných oblastí na speciální případ kruhu nebo poloroviny. K tomu je však nutné něco vědět o funkci, která toto konformní zobrazení uskutečňuje.

Nechť množina $\mathscr{S}$ (z německého „schlicht“) sestává z funkcí tvaru

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n ,$$

které jsou univalentní (tj. analytické a prosté) v $\mathbb{D}$. Normalizaci $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ a výjimečnou roli počátku lze snadno odstranit (viz dodatek 1).

Dovolte mi připomenout, že v teorii komplexních funkcí existují dvě školy. Mnozí dávají přednost výsledkům v invariantním a symetrickém tvaru. Jiní, stejně jako já, se snaží provést tolik normalizací, kolik to je možné, a na čtenáři pak ponechávají provedení jednoduchých transformací nutných k tomu, aby se dostal obecný případ; cílem je odhalit skutečné potíže odstraněním zbytečných parametrů (viz např. opět dodatek 1).

Historie teorie univalentních funkcí začala v r. 1907, kdy Koebe*) dokázal, že $\mathscr{S}$ je normální třída. Z toho vyplynulo že $|a_2| \leqq c$ pro nějakou absolutní konstantu c. V r. 1916 Bieberbach dokázal, že $c = 2$. Rovnost nastane pro „Koebeho funkci“

$$f_0(z) = \frac{z}{(1 - z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n ,$$

která zobrazuje $\mathbb{D}$ na $\mathbb{C}$ s výřezem podél $(-\infty, 1/4]$.

Bieberbach vyslovil domněnku, že Koebeho funkce má největší koeficienty mezi všemi funkcemi z $\mathscr{S}$, to znamená, že

$$(1) \qquad |a_n| \leqq n \quad \text{pro } f \in \mathscr{S}, \quad n = 2, 3, \ldots .$$

Přes značné úsilí tato domněnka odolávala 68 let. Teprve v r. 1984 byla potvrzena Louisem de Brangesem.

*) Literaturu o historickém vývoji viz. např. [5] nebo [8].

CHRISTIAN POMMERENKE: *The Bieberbach Conjecture.* The Mathematical Intelligencer Vol. 7, No. 2, pp. 23—25 and 32. Přeložil JOSEF DANEŠ.

Vývoj metod

Další krok učinil Löwner v r. 1923, když dokázal nerovnost $|a_3| \leqq 3$. O Löwnerově metodě se zmíním podrobněji, protože v de Brangesově důkazu hraje podstatnou roli. Stačí dokázat, že $|a_n| \leqq n$ pro funkce, které zobrazují $\mathbb{D}$ na rovinu s výřezem podél Jordanova oblouku $J : z(\tau)$, $0 \leqq \tau < \infty$ $(z(\infty) = \infty)$. Pro $0 \leqq t < \infty$ označme J_t část oblouku J od $z(t)$ do ∞. Nechť f_t je funkce, která zobrazuje $\mathbb{D}$ konformně na $\mathbb{C} \setminus J_t$ tak, že $f_t(0) = 0$ a $f_t'(0) = 0$. Potom systém množin

$$f_t(\mathbb{D}), \quad 0 \leqq t < \infty,$$

popisuje spojité rozšiřování dané oblasti $f(\mathbb{D})$ na celou rovinu. Hlavní myšlenka spočívá v tom, že funkce f_t při vhodné parametrizaci vyhovuje Löwnerově diferenciální rovnici

$$\frac{\partial}{\partial t} f_t(z) = \frac{1 + x(t)\, z}{1 - x(t)\, z}\, z \frac{\partial}{\partial z} f_t(z), \tag{2}$$

kde $|x(t)| = 1$. Z problému koeficientů se tak stane problém optimálního řízení.

Zdálo se, že Löwnerovu metodu nelze použít pro $n > 3$. Proto Schiffer, Schaeffer a Spencer vyvinuli novou variační metodu. Nechť pro dané n funkce f maximalizuje funkcionál $\operatorname{Re} a_n$ v $\mathscr{S}$. Sestrojením variací funkce f v $\mathscr{S}$ Schiffer dostal diferenciální rovnici pro f. Pro $n = 3$ má tato rovnice tvar

$$\left(\frac{2a_2}{f(z)} + \frac{1}{f(z)^2}\right)\left(z \frac{f'(z)}{f(z)}\right)^2 = p(z), \tag{3}$$

kde p je nějaká racionální funkce, která je reálná a nezáporná na jednotkové kružnici $\partial\mathbb{D}$.

Z (3) plyne, že kvadratický diferenciál

$$(2a_2 w^{-3} + w^{-4})\, dw^2$$

je reálný a nekladný na $\partial f(\mathbb{D})$. Proto extremální oblast $f(\mathbb{D})$ je ohraničena trajektoriemi kvadratického diferenciálu. To platí pro většinu extremálních problémů a myšlenka kvadratických diferenciálů a extremálních délek byla nakonec velmi plodná v teorii konformních a kvazikonformních zobrazení.

Schifferova diferenciální rovnice dává hodně kvalitativních informací. Její nevýhodou je, že obsahuje neznámé koeficienty $a_2, \ldots, a_{n-1}$; dokonce odvození nerovnosti $|a_3| \leqq 3$ z diferenciální rovnice (3) není nijak jednoduché. Přesto se Garabedianovi a Schifferovi podařilo v r. 1955 dokázat nerovnost $|a_4| \leqq 4$ právě variační metodou.

Dalšího pokroku se podařilo dosáhnout pomocí Grunskyho koeficientů c_{jk}, které lze definovat rovností

$$\log \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} c_{jk} z^j \zeta^k. \tag{4}$$

Tyto koeficienty splňují Grunskyho nerovnost, která říká, že v jisté normě je nekonečná matice (c_{jk}) omezena jednotkou.

Každá nová metoda zkrátila důkazy předcházejících případů a umožnila zaútočit na další koeficient. V letech 1968–69 Pederson a Ozawa odvodili z Grunskyho nerovnosti nerovnost $|a_6| \leqq 6$. Konečně pomocí důmyslné modifikace Garabedian, Pederson a Schiffer v r. 1972 dokázali $|a_5| \leqq 5$.

Pro odhady koeficientů pro velká n byly vyvinuty různé metody. Hayman dokázal Hardyho-Littlewoodovou metodou, že $|a_n| \leqq n$ pro $n \geqq n_0$, kde však n_0 závisí na f. FitzGerald odvodil nerovnost $|a_n| < 1{,}081n$ pro všechna n pomocí exponenciálního tvaru Grunskyho nerovnosti.

Rozhodující nakonec byla Lebeděvova a Milinova myšlenka o exponenciálním tvaru. Lebeděv a Milin se v r. 1967 zabývali problémem, jak odvodit odhady pro β_n pomocí odhadů pro α_n, kde

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n z^n = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z^n\right).$$

To je přivedlo k domněnce, že pro $n = 1, 2, \ldots$ platí

$$\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2\, k(n - k + 1) \leqq 4 \sum_{k=1}^{n} \frac{n - k + 1}{k}, \tag{5}$$

kde $c_0 = c_{k0}$ jsou Grunskyho koeficienty (4), tj. koeficienty funkce $\log(f(z)/z)$. Ukázali, že (5) implikuje Robertsonovu domněnku, která opět implikuje Bieberbachovu domněnku, a to dokonce v obecnějším tvaru.

de Brangesův důkaz

Lebeděvovu-Milinovu domněnku (5) dokázal de Branges. Jeho důkaz se opírá o Löwnerovu diferenciální rovnici (2). Předtím se i jiní pokoušeli použít tuto rovnici. Avšak de Branges měl brilantní myšlenku zavést časově závislé váhové funkce. Položme

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{n} \left(k|c_k(t)|^2 - \frac{4}{k}\right) \tau_k(t), \quad 0 \leqq t < \infty, \tag{6}$$

kde $c_k(t)$ jsou koeficienty funkce $\log(f_t(z)/z)$, viz. (2). Váhové funkce $\tau_k(t)$ splňují $\tau_k(0) = n - k$ $(\infty) = 0$. Navíc jsou zvoleny tak důmyslně, že derivace funkce (6) má tvar

$$\varphi'(t) = -\sum_{k=1}^{n} |\ldots|^2\, \tau_k'(t). \tag{7}$$

Celý zázrak nyní spočívá v tom, že

$$-\tau_k'(t) = k\,\mathrm{e}^{-kt} \sum_{j=0}^{n-k} P_j^{(2k,0)}(1 - 2\mathrm{e}^{-t}), \tag{8}$$

kde $P_j^{(\alpha,\beta)}$ jsou Jacobiho polynomy. Gautschi sdělil de Brangesovi, že Askey a Gasper [1] v r. 1976 dokázali kladnost pravé strany v (8). Proto z (7) plyne $\varphi'(t) \geqq 0$ pro $0 \leqq t < \infty$, a tedy nerovnost $\varphi(0) \leqq \varphi(\infty) = 0$. Tato nerovnost je ekvivalentní s Lebeděvovou-Milinovou domněnkou (5).

Prvním de Brangesovým důkazem byla poslední kapitola rukopisu druhého vydání jeho knihy o kvadraticky sčítatelných mocninných řadách. Začátek léta r. 1984 strávil de Branges v Leningradu a diskutoval svůj důkaz s řadou matematiků, zvláště s Jemeljanovem, Kuzminovou a Milinem. První úplný důkaz se objevil v SSSR [3]. FitzGerald a já jsme nalezli technické zjednodušení [6]; to, co jsem zde právě načrtl, je naše kratší verze jeho důkazu. Totéž zjednodušení objevil nezávisle i de Branges [4].

Po důkazu

Důkaz Bieberbachovy domněnky byl velkým překvapením. Mnozí odborníci pochybovali o její pravdivosti. Byl jsem toho názoru, že Bieberbachova domněnka sice platí, ale důkaz nelze provést přes Lebeděvovu-Milinovu domněnku. Mýlil jsem se.

Zpočátku se všichni zasvěcení stavěli k de Brangesovu tvrzení krajně skepticky. První verze důkazu (před de Brangesovou návštěvou Leningradu) obsahovala chybu, kterou jsem považoval za osudnou. Opět jsem se mýlil.

Samotný důkaz obsahuje několik překvapení:

(a) Proti očekávání je zcela krátký. Předcházející důkazy nerovností $|a_5| \leqq 5$ a $|a_6| \leqq$ $\leqq 6$ byly delší.

(b) Zásadní význam má dosti rafinovaný výsledek o speciálních funkcích. Důkaz tohoto výsledku i de Brangesův důkaz je v podstatě dlouhý řetěz nerovností končící součtem čtverců (a ten je samozřejmě nezáporný).

(c) Přestože Re a_n je lineární funkcionál, bylo nutné vyšetřovat složité nelineární výrazy.

(d) Hluboká teorie variací, kvadratických diferenciálů a extremálních metrik, která za svůj vznik vděčí Bieberbachově domněnce, se nakonec v de Brangesově důkazu neuplatnila.

To všechno svědčí o tom, že de Branges, opíraje se o práce Löwnera, Lebeděva, Milina a dalších, přišel se skutečně novou myšlenkou. Měl také štěstí v tom, že jeho váhové funkce, jak se ukázalo, jsou klesající (viz (8)). Zároveň to svědčí o tom, že by experti měli být skeptičtější, pokud jde o jejich porozumění nějakému předmětu zkoumání. Pokrok je často nepředvídatelný.

Je pozoruhodné, že v tomto roce nastal podstatný pokrok i v řešení jiných problémů týkajících se univalentních funkcí; viz např. Baernsteinovu práci [2] o problému koeficientů pro funkce s růstovými omezeními. Tento problem však z větší části zůstává otevřený.

Mladý leningradský matematik Makarov [7] nedávno vyřešil důležitý problém korespondence hranic měr při konformním zobrazení: Hausdorffova dimenze nosiče harmonické míry je právě jedna.

Bieberbachova domněnka dala obrovský podnět k rozvoji teorie univalentních funkcí. Metody vyvinuté při pokusech o její důkaz posloužily k odvození mnoha zajímavých výsledků. Lze se právem domnívat, že de Brangesova práce vzbudila nový zájem o výše uvedenou teorii, která se tak bude rozvíjet novými směry.

Dodatek 1. O Koebeho transformaci

Nechť ζ je bod jednotkového kruhu $\mathbb{D}$. Möbiova transformace

$$\gamma(z) = (z + \zeta)/(1 + \bar{\zeta}z)$$

zobrazuje $\mathbb{D}$ na sebe tak, že $\gamma(0) = \zeta$. Je-li g libovolná univalentní funkce v $\mathbb{D}$, potom

$$f(z) = \frac{g(\gamma(z)) - g(\zeta)}{\gamma'(0)\, g'(\zeta)} \qquad (z \in \mathbb{D})$$

je také univalentní a navíc splňuje $f(0) = 0$ a $f'(0) = 1$, takže $f \in \mathcal{S}$. Bod ζ pro fukci g odpovídá bodu 0 pro funkci f. Pomocí této transformace lze nerovnost $|a_2| \leqq 2$ zapsat v obecnějším tvaru

$$\left|\frac{1}{2}\left(1 - |\zeta|^2\right)\frac{g''(\zeta)}{g'(\zeta)} - \bar{\zeta}\right| \leqq 2\,,$$

což po integraci dává

$$\frac{|\zeta|}{(1 + |\zeta|)^2} \leqq \left|\frac{g(\zeta) - g(0)}{g'(0)}\right| \leqq \frac{|\zeta|}{(1 - |\zeta|)^2}\,.$$

Dodatek 2. Z historie problému

1907	Koebe: $\lvert a_2\rvert \leqq$ const.
1916	Bieberbach: $\lvert a_2\rvert \leqq 2$, domněnka $\lvert a_n\rvert \leqq n$
1920	Nevanlinna: $\lvert a_n\rvert \leqq n$, je-li $f(\mathbb{D})$ hvězdovitá
1923	Löwner: $\lvert a_3\rvert \leqq 3$, Löwnerova diferenciální rovnice
1925	Littlewood: $\lvert a_n\rvert < en$
1931	Dieudonné: $\lvert a_n\rvert \leqq n$, jsou-li koeficienty reálné
1936	Robertsonova domněnka ($\Rightarrow$ Bieberbachova domněnka)
1938	Schifferova variační metoda
1939	Grunskyho nerovnost
1955	Garabedian-Schiffer: $\lvert a_4\rvert \leqq 4$
1955	Hayman: $\lvert a_n\rvert \leqq n$ pro $n \geqq n_0(f)$
1967	Bombieri-Garabedian-Schiffer $\lvert a_2 - 2\rvert < \varepsilon_n \Rightarrow \mathrm{Re}\, a_n \leqq n$
1967	Lebeděvova-Milinova domněnka ($\Rightarrow$ Robertsonova domněnka)
1967	Garabedianova-Schifferova nerovnost
1967–68	Pederson-Ozawa: $\lvert a_6\rvert \leqq 6$
1972	Pederson-Schiffer: $\lvert a_5\rvert \leqq 5$
1972	FitzGerald: $\lvert a_n\rvert < 1{,}081n$
1978	Horowitz: $\lvert a_n\rvert < 1{,}0657n$
1984	de Branges: $\lvert a_n\rvert \leqq n$ důkazem Lebeděvovy-Milinovy domněnky

Literatura

[1] ASKEY R., GASPER G.: *Positive Jacobi sums, II.* Amer. J. Math. *98* (1976), 709—737.

[2] BAERNSTEIN A., JR.: *Coefficients of univalent functions with restricted maximum modulus.* Preprint 1984.

[3] DE BRANGES L.: *A proof of the Bieberbach conjecture.* Leningrad. otděl. mat. inst. im. Stěklova, preprint E-5-84.

[4] DE BRANGES L.: *A proof of the Bieberbach conjecture.* Acta Math. (v tisku).

[5] DUREN P. L.: *Univalent Functions.* Springer-Verlag, New York, Inc., 1983.

[6] FITZGERALD C. H., POMMERENKE CH.: *The de Branges theorem on univalent functions.* Trans. Amer. Math. Soc. (v tisku).

[7] MAKAROV N. G.: *On the distorsion of boundary sets under conformal functions.* Preprint 1984.

[8] POMMERENKE CH.: *Univalent Functions.* Vandenhoeck and Ruprecht, Göttingen, 1975.

Poznámky překladatele

1. Se základy Löwnerovy metody se lze seznámit v nedávno vyšlé pěkné učebnici I. A. Aleksandrov, V. V. Sobolev, Analitičeskie funkcii kompleksnogo peremennogo, Vysš. škola, Moskva 1984; podrobněji viz A. I. Aleksandrov, Parametričeskie prodolženija v teorii odnolistnych funkcij, Nauka, Moskva 1976. Základní výsledky z teorie univaleních funkcí lze najít ve snadno dostupných učebnicích I. I. Privalov, Analytické funkce, Nakl. ČSAV, Praha 1955 (kap. XIII), W. Rudin, Analýza v reálném a komplexním oboru, Academia, Praha 1977 (kap. 14) nebo A. I. Markuševič, Analitičeskie funkcii, t. II, Nauka, Moskva 1968 (kap. 5, § 2).

2. Nedávno se objevily další dva přehledné články od Ch. H. FitzGeralda („The Bieberbach conjecture: Retrospective", Notices of Amer. Math. Soc. 32 (1985), 2—6) a M. Engliše („Důkaz Bieberbachovy hypotézy", Informace SVOČ 1984/85, č. 2(12), MFF UK Praha, 1—11). Pro vážného zájemce je vhodnější druhý článek, přestože jeho autorem je student.*)

3. Pro úplnost uveďme Robertsonovu domněnku, která v článku není vyslovena:

$$\sum_{k=1}^{n} |a_{2k-1}|^2 \leqq n \text{ pro liché } f \in \mathscr{S}.$$

Robertson byl ke své domněnce inspirován tím, že i) pro $f \in \mathscr{S}$ je funkce $g(z) = f(z^2)^{1/2}$ lichá a leží v $\mathscr{S}$; ii) jeho domněnka implikuje na základě Cauchyho-Schwarzovy nerovnosti Bieberbachovu domněnku.

*) *Poznámka při korektuře:* Viz též článek J. FUKY *O Bieberbachově hypothese*, Informace MVS JČSMF č. 27, duben — květen 1986, 8 — 20 (první část).

V jednom směru je matematika oddělena od ostatních věd: žádný její výsledek nemůže být škrtnut dalším rozvojem vědy. Jednou dokázaná věta se již nikdy nestane nesprávnou, ačkoliv se nakonec může ukázat, že je jen počátečním zvláštním případem nějaké jednodušší pravdy. Matematické vědění není třeba revidovat a jeho celková zásoba může pouze narůstat.

M. Kac, S. Ulam

Zvláštností matematických pravd je, že jsou závazné pro všechny, kteří souhlasí s oprávněností některých počátečních předpokladů. To připomíná pravidla hry v šachy. Ten, kdo vysloví souhlas s těmito pravidly, je povinen souhlasit i se všemi výsledky hry, ať již budou jakékoliv — příjemné nebo nepříjemné. Takto to bohužel není v jiných vědách, především mimo oblast přírodních věd.

N. I. Kovancov