Steve Smale

Příběh Poincarého hypotézy ve vyšších dimenzích (To, co se skutečně přihodilo na plážích Ria)

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 36 (1991), No. 1, 38--49

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138815

Příběh Poincarého hypotézy ve vyšších dimenzích

(To, co se skutečně přihodilo na plážích Ria)

Steve Smale

Steve Smale je členem Národní akademie věd USA a Americké akademie umění a věd. Byl vyznamenán Veblenovou cenou za geometrii (Americká matematická společnost 1965), Fieldsovou medailí (Mezinárodní matematická unie 1966) a Chauvenetovou cenou (Matematická asociace Ameriky 1988). Steve Smale je dopisovatelem časopisu *The Mathematical Intelligencer* a oslaví tento rok své šedesátiny. *The Mathematical Intelligencer* mu přeje všechno nejlepší k narozeninám.

Tento článek je věnován památce Allena Shielda.

Ačkoli tyto stránky vyprávějí hlavně osobní příběh, začneme s popisem „n-rozměrné Poincarého hypotézy". Říká se v ní:

Kompaktní n-rozměrná varieta M^n, která má homotopický typ n-rozměrné sféry

$$S^n = \{x \in R^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$$

je homeomorfní s S^n.

Kompaktní n-rozměrnou varietu si můžeme představit jako uzavřenou a omezenou n-rozměrnou plochu (diferencovatelnou a bez singularit) v nějakém euklidovském prostoru.

Homotopická podmínka může být jinak vyjádřena požadavkem, aby existovalo spojité zobrazení $f : M^n \to S^n$ indukující izomorfismus příslušných homotopických grup; nebo také požadavkem, aby každé spojité zobrazení $g : S^k \to M^k$, kde $k < n$ (nebo pouze $k \leqq n/2$) se dalo deformovat do jediného bodu. Můžeme také vyslovit ekvivalentní požadavek, že M má být jednoduše souvislá a mít stejné homologické grupy jako S^n.

Henri Poincaré studoval tento problém ve svých průkopnických pracích o topologii. V práci [13] (1900) oznámil důkaz obecného případu v n dimenzích. Protipříklad odhalující chybu v použité metodě je podán v následujícím článku [14] (1904), kde se autor omezuje na dimenzi $n = 3$. V této práci položil Poincaré svůj slavný problém, ale nikoli jako hypotézu. Tradiční označení tohoto problému jako „Poincarého hypotézy" je v tomto ohledu nepřesné.

Mnoho dalších matematiků po Poincarém tvrdilo, že našlo důkaz pro tříroz-

S. Smale: *The Story of the Higher Dimensional Poincaré Conjecture* (*What Actually Happened on the Beaches of Rio*). The Math. Intel. Vol. *12,* No 2, 44—51. Přeložil Oldřich Kowalski.

měrný případ. Populární vylíčení některých z těchto pokusů najdeme například v článku [18]. Na druhé straně bylo od dob Poincarého objeveno úctyhodné množství topologických vět a postupů.

V roce 1960 jsem dokázal, že tvrzení je pravdivé pro všechna $n > 4$ a zde chci vyprávět, jak došlo k tomuto objevu. Na stejné téma vyšly také články [15] a [16], ale překrývání je zde minimální. O Poincarého hypotéze jsem se poprvé doslechl v Ann Arbor, a to v době, kdy jsem psal svou disertaci o jistém problému z topologie. Krátce nato jsem měl pocit, že jsem našel důkaz (pro tři dimenze). Hans Samelson byl ve své pracovně a já jsem mu velice vzrušeně vylíčil své myšlenky. Nejdříve provedeme triangulaci třírozměrné variety a odstraníme jeden třírozměrný simplex. Nyní stačí ukázat, že zbývající varieta je homeomorfní s třírozměrným simplexem. Proto odstraňujeme jeden třírozměrný simplex za druhým. Při každém kroku dostáváme prostor homeomorfní s předešlým a nakonec zůstane z původní variety jediný třírozměrný simplex. Což bylo dokázat. Samelson toho moc neřekl. Po té, co jsem odešel z jeho pracovny, jsem si uvědomil, že v mém „důkazu" se nikde nepoužil předpoklad, že varieta je třírozměrná.

O necelých 5 let později jsem v Rio de Janeiro našel protipříklad k třírozměrné Poincarého hypotéze. „Důkaz" využíval jistého invariantu objeveného leningradským matematikem Rochlinem. Všechno jsem do detailu sepsal. Krásně by to bylo doplňovalo výsledek, ke kterému jsem právě dospěl, že totiž hypotéza platí v dimenzích $n > 4$. Naštěstí jsem při kontrole svého protipříkladu našel osudnou chybu.

Vraťme se však do minulosti. Narodil jsem se ve „zlatém věku topologie". Dnes se snadno zapomíná, jak silně ovládala tehdy topologie přední linie celé matematiky. Uvádí se, že polovinu všech Sloanových stipendií udělovaných v té době mladým vědeckým pracovníkům dostali topologové. Dnes by bylo těžké si představit takové nerovnoměrné rozdělování prostředků. Tehdejší topologie totiž způsobila revoluci v algebře (K-teorie, algebraická geometrie) a analýze (dynamické systémy, globální studium parciálních diferenciálních rovnic).

V roce 1954 vyšla Thomova práce o kobordismu. Tato teorie byla použita Hirzebruchem k důkazu „věty o signatuře" (což byla součást jeho úsilí i zobecnění Riemannovy-Rochovy věty). Na oplátku již v roce 1956 použil Milnor větu o signatuře, aby dokázal existenci exotických sedmirozměrných sfér. Pozorně jsem tyto výsledky sledoval. Jako student jsem se také naučil od Raoula Botta, jak využívat spektrální posloupnosti a Morseovu teorii k získání informací o homotopických grupách sfér. O něco později dokázal Bott svou větu o periodicitě, a to rovněž s využitím Morseovy teorie.

Svůj doktorát jsem získal na univerzitě v Ann Arbor roku 1956 pod vedením R. Botta. Moje první setkání s širším matematickým světem se odehrálo toho léta na konferenci o algebraické topologii v Mexico City. Nikdy předtím jsem nebyl na žádné konferenci. A tato konference byla v matematice historickou událostí podle všech měřítek. Dosud jsem nikdy neviděl srovnatelnou koncentraci tvůrčí matematiky. Já a moje žena Clara jsme odjížděli autobusem z Ann Arbor do Mexico City v situaci, kdy jsme znali pouze Botta a Samelsona. Když jsme opouštěli Mexiko, znal jsem již většinu topologických hvězd. Také jsem tam potkal dva aspiranty z chicagské univerzity, Moe Hirsche a Elona Limu, kteří se měli stát součástí mého příběhu.

Na podzim jsem dostal první řádné zaměstnání jako instruktor na chicagské univerzitě, kde jsem především učil teorii množin pro studenty humanitních zaměření. Měl jsem dobré vztahy s katedrou matematiky a chodil jsem na přednášky hostujícího profesora René Thoma (se kterým jsem se seznámil v Mexico City) o teorii transverzality. Také jsem dále pracoval v topologii a ukázal jsem, že „sféru je možno obrátit naruby".

Chicago bylo v té době jedním z předních matematických center, dokud odtud neodešli Weil, Chern a řada dalších významných matematiků. Na vytváření zdejšího prostředí se významně podíleli mladí matematici, obzvláště Moe Hirsch, Elon Lima, Dick Lashof, Dick Palais a Shlomo Sternberg. Měl jsem štěstí, že jsem tam tehdy mohl pobývat.

Po doktorátě jsem získal dvouleté stipendium od NSF, které mi umožnilo přesídlit na podzim 1958 do Ústavu pokročilých studií v Princetonu. Měl jsem společnou pracovnu s Moe Hirschem a chodili jsme na Milnorovy obsažné přednášky o charakteristických třídách a na Borelův seminář o transformačních grupách. Často jsem potkával Deana Montgomeryho, Marstona Morseho a Hasslera Whitneye, hrál jsem GO (s handicapem) s Ralphem Foxem a setkával jsem se s jeho studenty Leem Neuwirthem a Johnem Stallingsem.

Kromě toho mě v létě 1958 představil Lima Mauriciovi Peixotovi, který vzbudil můj zájem o strukturální stabilitu. Tento můj zájem vedl k tomu, že mě pozvali, abych posledních šest měsíců svého studijního pobytu strávil v Rio de Janeiro v I.M.P.A. (Instituto de Matematica, Pura e Aplicada).

Tak jsme začátkem ledna 1960 přijeli s Clarou a našimi dětmi, Laurou a Natem, do Ria, abychom se setkali s našimi brazilskými přáteli. Přijeli jsme do Brazilie právě potom, co se jeden plukovník letectva pokusil o státní převrat. Uprchl ze země, aby získal azyl v Argentině, a my jsme měli možnost pronajmout si jeho byt! Bylo to luxusní sídlo s 11 pokoji, tak jsme si najali i dvě plukovníkovy služky. Americký dolar nám tehdy prokázal velké služby.

Většina našich nejbližších sousedů byli američtí nebo brazilští důstojníci. Mohli jsme sedávat na našem vyvýšeném patiu obklopeném zahradou a dívat se na *favelu* na kopci, kde byl zfilmován *Černý Orfeus*. Za horkých a vlhkých večerů před *carnavalem* jsme pozorovali stovky obyvatel favely, jak sestupují po cestě, aby si zatančili v ulicích sambu. Někdy jsem se připojil k jejich divokému tanci, který se formoval v mnohamílový průvod.

Pouze ob jeden blok na opačnou stranu kopce leží slavné pláže Copacabana (část nazývaná Leme). Trávil jsem rána na této široké, krásné písečné pláži plaváním nebo při příznivé výšce vln také surfováním. Také jsem si bral s sebou pero i kousek papíru a zabýval jsem se matematikou.

Odpoledne jsem trávil v I.M.P.A., kde jsem diskutoval s Peixotem o diferenciálních rovnicích a s Limou o topologii. Tehdy bylo I.M.P.A. umístěno v malé staré budově na živé ulici. Když jsem se chystal navštívit Rio podruhé, bylo I.M.P.A. v mnohem větší budově a v mnohem živější ulici. Nyní bylo I.M.P.A. přemístěno do obrovského moderního paláce obklopeného džunglí na předměstí Ria.

Abych se však vrátil k našemu příběhu, moje pozornost v matematice byla nejprve zaměřena na dynamické systémy, kde jsem sestrojil tzv. „koňskou podkovu" [15].

Když jsem pokračoval ve zkoumání gradientních dynamických systémů, všiml jsem si, jak dynamika vede k novému způsobu rozkladu variety na buňky. Brzy se ukázaly možnosti, jak by se tento rozklad dal využít pro řešení Poincarého hypotézy, a zanedlouho se všechna moje práce soustředila na tento problém.

Když jsem dosáhl zjevného úspěchu pro dimenze větší než 4, znovu jsem pečlivě zkontroloval svůj důkaz; potom jsem ještě probral detaily společně s Limou. Když jsem takto získal sebedůvěru, napsal jsem Hirschovi do Princetonu a poslal jsem vědecké sdělení Sammymu Eilenbergovi. Příloha s názvem „Dynamika a rozklad variet" obsahuje stručný matematický popis použité metody (viz Přílohu 1).

Také jsem se již chystal opustit na tři týdny Rio, abych se podíval do Evropy; mělo to být v červnu 1960. Konalo se tam známé *Arbeitstagung*, každoroční matematická událost organizovaná Hirzebruchem. Potom měla následovat konference o topologii v Zürichu, na kterou jsem byl pozván. Tato dvě setkání poskytovala dobrou příležitost, abych předložil své výsledky. Pro zpestření uvádím dále v příloze dva nedávné dopisy Stallingse Zeemanovi — činím tak se souhlasem autora (viz Přílohu 2). Tyto dopisy dobře vystihují, co se tehdy událo v Evropě. Zatímco moje vzpomínky se vcelku shodují se Stallingsovými, nemyslím si, že by mi Hirsch byl pomáhal tak, jak se domnívá Stallings. Vzpomínám si jen, že jsem s Moe Hirschem a Raoulem Bottem společně strávil několik poklidných dnů ve Sv. Mořici po skončení dramatického a traumatického týdne v Bonnu.

Někdy bývám rozrušen tím, co pociťuji jako nepřesnosti v historii řešení vícerozměrné Poincarého hypotézy. Například Andy Gleason napsal v roce 1964 [1]: „... Bylo to proto velké překvapení, když Stallings v roce 1960 (4) dokázal, že zobecněná Poincarého hypotéza platí od dimenze sedm výše. Jeho výsledek byl krátce potom rozšířen Zeemanem (10) i na dimenze 5 a 6. (O mně nebyla v článku zmínka.)

Paul Halmos ve své autobiografii ([8], str. 398) píše o tom, jak jsem se na něho zlobil. Lituji, že jsem se hněval na Paula a přál bych si, abych dokázal o celé této záležitosti uvažovat klidněji. Moje nedávná korespondence s Jackem Milnorem dokresluje, oč jde.

Milý Jacku,

chci se vyjádřit k Tvému článku o vědeckém díle M. Friedmana*) v souvislosti s udělením Fieldsovy medaile (Proc. of the Int. Congress 1986). Když pojednáváš o „n-rozměrné Poincarého hypotéze", říkáš toto:

> Případy $n = 1,2$ byly známy již v devatenáctém století, zatímco případy $n \geqq 5$ byly dokázány Smalem a nezávisle na něm Stallingsem i Zeemanem a také Wallacem v letech 1960—61.

Slovo „nezávisle" se mi zdá být v rozporu s historií tohoto objevu.

Stallings ve svém preprintu „The topology of high-dimensional piecewise-linear manifolds" píše:

> Když jsem se dozvěděl, že Smale dokázal zobecněnou Poincarého hypotézu pro variety dimenze 5 a vyšší, začal jsem hledat vlastní důkaz tohoto faktu.

Vzpomínám si, že Zeeman popsal tyto události přesně a jeho verze je podobná.

Potom, co vyšlo moje předběžné sdělení, napsal mi Wallace (29. září 1960), žádal

---

*) M. Friedman nedávno dokázal zobecněnou Poincarého hypotézu v dimenzi $n = 4$ (pozn. překl.).

mě o detaily mého důkazu a vylíčil mi, v kterém místě selhaly jeho pokusy. Poslal jsem mu preprinty s důkazem, jejichž doručení potvrdil v říjnu (jeho dopisy stále ještě mám).

V první verzi svého důkazu jsem udělal chybu, kterou jsem snadno napravil; to však nijak neovlivnilo běh věcí.

Je jisté, že Stallings se Zeemanem a Wallace vykonali v této oblasti kus pěkné práce. Byl bych však přece jen rád, kdyby si matematikové lépe uvědomili skutečnosti, které jsem právě popsal. Kopie tohoto dopisu posílám Stallingsovi, Zeemanovi a Wallaceovi a několika dalším matematikům.

Srdečně zdraví

Steve Smale

Milnor odepsal (a původní text nyní ještě trochu pozměnil a rozšířil).

27. února 1988

Milý Steve,

je mi velmi líto, že můj stručný nástin historie Poincarého hypotézy byl nepřesný. To bylo zčásti způsobeno tím, že jsem věci řádně neprostudoval, ale hlavně tím, že jsem se velmi nešikovně vyjádřil. Měl jsem samozřejmě říci, že Stallingsův důkaz, doplněný pro dimenze 5 a 6 Zeemanem, byl *logicky* nezávislý na Tvém důkazu; ale je zajisté pravda, že Tvůj důkaz zde byl první. Podobně jsem měl říci, že Wallaceův důkaz pro dimenze větší než pět se samozřejmě objevil později a ve skutečnosti se příliš nelišil od Tvého důkazu.

Stojí za zmínku, že Smaleův (nebo Wallaceův) důkaz dává díky silnějšímu předpokladu hladkosti také mnohem silnější závěr. Ukazuje totiž, že hladká n-rozměrná varieta obsahuje hladce vloženou standardní $(n - 1)$-rozměrnou sféru, která ji rozděluje na dvě hladce vložené standardní n-rozměrné koule. Stallingsův a Zeemanův důkaz vychází ze slabšího předpokladu, že totiž M je kombinatorická varieta a dochází k slabšímu závěru, že M je po odstranění jednoho bodu kombinatoricky homeomorfní se standardním euklidovským prostorem.

Se srdečným pozdravem

John Milnor

Napsal jsem mu, a poděkoval za jeho dopis.

Po konferenci v Zürichu jsem se vrátil ke své rodině v Riu a brzy potom jsem dostal zaměstnání v Berkeley.

Během dalšího roku jsem napsal několik prací, ve kterých byly rozšířeny předchozí výsledky a vše vyvrcholilo článkem, ve kterém byla (v červnu 1961) dokázána „věta o h-kobordismu". Přehled celé problematiky i s odkazy je podán v [17].

Protože jsem nemohl odolat nabídce Serge Langa z Kolumbijské univerzity (v New Yorku), prodali jsme dům a v létě 1961 jsme opustili Berkeley. Po třech letech studia rozličných aspektů globální analýzy jsme se vrátili z New Yorku do Berkeley, kde byla vyhlídka na lepší pracovní podmínky.

Byl podzim 1964 a já jsem byl zaujat hnutím Free Speech Movement (FSM). Po velké okupační akci jsem pomáhal dostat z vězení matematické aspiranty Davida Franka a Mikea Shuba.

Počátkem roku 1965 došlo k drastické eskalaci vietnamské války.

Měl jsem pocit, že těžké bombardování Vietnamu je neobhajitelné a že ohrožuje světový mír. Moje zapojení do protestů vzrůstalo, organizoval jsem diskusní semináře a účastnil jsem se bojovných demonstrací proti vojenským kolonám. Společně s Jerrym Rubinem jsme předsedali výboru VDC, tj. Vietnam Day Committee. (Náš hlavní stan v blízkosti univerzity byl později zničen bombou.)

Již během podzimu 1965 jsem začal být rozčarován činností VDC a vrátil jsem se k dokazování matematických vět. Další pokračování příběhu je popsáno v [16]. V srpnu 1966 jsem kritizoval [na kongresu] v Moskvě USA za jejich politiku ve Vietnamu (a stejně tak Rusko) a po návratu domů se na mne snesla bouře kritiky. Kalifornská univerzita zastavila vyplácení mého platu od NSF za letní měsíce.

Dan Greenberg popisuje podrobně v [2], co se stalo potom.

> Když se Smale dověděl o agitaci soustředěné kolem jeho osoby a o tom, že mu nebude vydán šek, poslal Connickovi přehled své vědecké činnosti za letní měsíce — ten se pravděpodobně stane klasickou ukázkou literatury o vztazích mezi vědou a úřady. Ve svém přehledu snadno prokázal, že splnil požadavek dvou měsíců vědecké práce odpovídající dvěma měsícům platu.

Connick byl prorektorem pro akademické záležitosti v Berkeley. Překvapilo mě, že Greenberg nazval můj dopis „klasickým dokumentem", ale je pravda, že v něm byl obsažen můj nejznámější výrok. Jak připomíná Greenberg, psal jsem Connickovi:

> Ovšem ve zbytku této doby jsem se také zabýval matematikou, například v kempincích, hotelových pokojích nebo na parníku. Například na *S. S. France* jsem diskutoval o vědeckých problémech s předními matematiky a zabýval jsem se matematikou v lodní klubovně. (Moje nejznámější práce vznikla v roce 1960 na plážích Ria de Janeira.)
>
> Rád bych zopakoval, že se cítím být dotčen tím, že jste zastavili můj plat od NSF kvůli nepodstatným detailům. Skutečným důvodem je to, že jsem byl předvolán před komisi pro neamerickou činnost a že na mne potom útočili kongresmani i noviny.

Zanedlouho jsem dostal svůj plat od NSF a situace se uklidnila. Ovšem během jediného roku vybuchla mnohem větší bomba, když mi NSF vrátila moji novou žádost o grant, a to na nátlak Kongresu.

Články [3–7] v časopisu *Science* napsané Danem Greenbergem zachycují tyto události. Viz též [11] a [12].

Když byly konečně věci opět na dobré cestě, proniklo na veřejnost moje prohlášení týkající se pláží v Riu. Tentokrát to byl poradce prezidenta Johnsona Donald Hornig [9], který napsal ve Science:

> Lehkovážná povaha vede matematiky k tomu, že docela vážně navrhují, aby obyčejný člověk platící daně pokládal za hodnou podpory z veřejných prostředků matematickou tvořivost provozovanou na plážích Ria de Janeira nebo na Egejských ostrovech.

(Řecké ostrovy jsem rovněž navštívil v srpnu 1966, ale ovšemže nikoli za peníze od NSF.)

Velmi mě potěšila odpověď výboru Americké matematické společnosti a jejího předsedy C. Morreye. Morreyův dopis [10] ve Science začíná slovy:

> Výbor Americké matematické společnosti mě požádal na svém zasedání 28. srpna, abych sdělil časopisu *Science* tyto poznámky:
>
> Mnozí matematikové byli ohromeni a šokováni výňatky z projevu Donalda Horniga, poradce prezidenta pro vědu (19. července, str. 248). Jeho ... poznámky o matematice a matematicích jsou ... nemístné. V Hornigových poznámkách o dovolených na plážích v Riu nebo na Egejských ostrovech je obsažen špatně zastřený útok na Stephena Smalea. Obvinění vůči Smaleovi byla dostatečně vyvrácena Danielem S. Greensbergem v jeho článcích v *Science* o sporu mezi Smalem a NSF.

Současně udělal za věcí tečku dopis otištěný v časopise Notices:

... politika vytváření velkého skandálu a mlčky připouštějící politická kritéria v udělování grantů jen proto, aby byl zmírněn a odražen demagogický útok jednoho kongresmana není politikou, která by kohokoli (a nejméně členy Kongresu) přesvědčila o principiálnosti a mravní integritě těch, kteří jí používají. Podezřelé veřejné mlčení celé třídy úředníků řídících federální vědu je, pokud jde o budoucí účinky současného způsobu vojenských odvodů a vietnamské války na americkou vědu, určitě zcela zvukotěsné. V této souvislosti bychom Hornigův zjevný pokus přeměnit diskusi o současné krizi federálního financování základního výzkumu v honičku na obětní beránky, jako jsou „matematikové na plážích", mohli pokládat za směšný, kdyby nebyl tak destruktivní.

Hyman Bass	E. R. Kolchin
F. E. Browder	S. Lang
William Browder	M. Loēve
S. S. Chern	R. S. Palais
Robert A. Herrmann	M. H. Protter
I. N. Herstein	G. Washnitzer

Obzvláště mi udělalo radost, když jsem viděl takovou podporu ze strany svých přátel.

Dovolte, abych skončil stejnými slovy jako ve Phoenixu: „Upřímně Vám děkuji, že jste vyslechli můj příběh."

Literatura

[1] GLEASON, A.: *Evolution of an active mathematical theory.* Science *145* (July 31, 1964) 451—457.

[2] GREENBERG, DAN: *The Smale case: NSF and Berkeley pass through a case of jitters.* Science *154* (Oct. 7, 1966), 130—133.

[3] —: *Smale and NSF: A new dispute erupts.* Science *157* (Sept. 15, 1967) 1285.

[4] —: *Handler statements on Smale case.* Science *157* (Sept. 22, 1967) 1411.

[5] —: *The Smale case: Tracing the path that led to NSF's decision.* Science *157* (Sept. 29, 1967) 1536—1539.

[6] —: *Smale: NSF shifts position.* Science *158* (Oct. 6, 1967) 98.

[7] *Smale: NSF's records do not support the charges.* Science *158* (Nov. 3, 1967), 618 až 619.

[8] HALMOS, P.: *I Want to be a Mathematician, an Automathography.* New York: Springer-Verlag (1985).

[9] HORNIG, D.: *A point of view.* Science *161* (July 19, 1968) 248.

[10] MORREY, C.: Letter to the editor. Science *162* (Nov. 1, 1968) 514—515.

[11] —: *The case of Stephen Smale.* Notices of the American Math. Soc. *14* (Oct. 1967) 778—782.

[12] —: *The case of Stephen Smale: Conclusion.* Notices of the American Math. Soc. *15* (Jan. 1968) 49—52 and *16* (Feb. 1968) 297 (by SERGE LANG)

[13] POINCARÉ, H.: *Oeuvres, VI.* Gauthier-Villars, Paris 1953, *Deuxième Complemént àL'Analysis Situs*, 338—370.

[14] —: *Cinguième Complément à L'analysis Situs*, 435—498.

[15] SMALE, S.: *On How I Got Stored in Dynamical Systems. The Mathematics of Time.* New York: Springer-Verlag (1980).

[16] —: *On the Steps of Moscow University.* Math. Intelligencer *6* no. 2 (1984) 21—27.

[17] —: *A survey of some recent developments in differential topology.* Bull. Amer. Math. Soc. *69* (1963) 131—145.

[18] TAUBES, G.: *What happens when Hubris meets Nemesis.* Discover, July 1987.

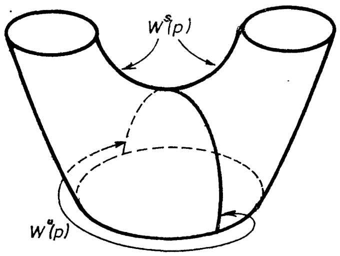
Department of Mathematics
University of California
Berkeley, CA 94720 USA

Příloha 1: Dynamika a rozklad variet.

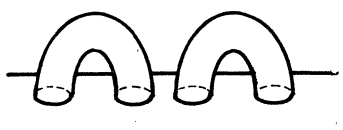
Uvažujme varietu M^n s nějakou Riemannovou metrikou a dále nějakou funkci $f : M^n \to R$. Sestrojme dynamický systém definovaný na M diferenciální rovnicí $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = -\operatorname{grad} f$.

Jestliže p je nedegenerovaný kritický

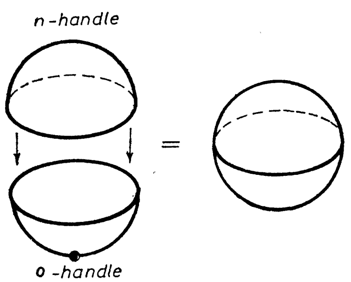
bod funkce f, pak množina $W^s(p)$ všech bodů přibližujících se k p v dané dynamice pro $t \to +\infty$ je vložená buňka; totéž platí pro množinu $W^u(p)$ bodů přibližujících se k p pro $t \to -\infty$. Ve dvourozměrném obrázku (obr. 1) jsou obě množiny $W^s(p)$ a $W^u(p)$ jednorozměrné buňky (neboli oblouky křivek).



Obr. 1.



Obr. 2.



Obr. 3.

Předpokládejme nyní, že f má pouze nedegenerované kritické body. Můžeme předpokládat, že $W^s(p) \pitchfork W^u(q)$ pro všechny kritické body p, q funkce f, nebo jinými slovy, že „stabilní a nestabilní variety pole grad f se stýkají transverzálně". Za tohoto předpokladu dávají množiny $W^s(p)$ pěkný rozklad variety M. Hranice každé buňky je složena z buněk nižší dimenze. René Thom uvažoval takový rozklad již dříve, ale bez podmínky transverzality, takže hranice buňky mohla být obsažena ve vícerozměrných buňkách.

Potom jsem z daného dynamického systému sestrojil to, čemu říkám „tělesa s držadly" (handlebodies).

Na obr. 2 je těleso s „1-rozměrnými držadly", které se skládá ze „zhmotnělých" 1-rozměrných buněk připojených k 3-rozměrné buňce. Potom lze přidat současně všechna „2-rozměrná držadla" atd., dokud varieta není opatřena filtrací pomocí držadel.

To dává základ pro jejich eliminaci, vždy po dvou současně, a zde se nakonec použije i předpoklad o homotopickém typu a o dimenzi variety M.

Nakonec se dostane rozklad naší původní variety znázorněný na obr. 3, což je náš výsledek.

Příloha 2: Dopisy Johna Stallingse Christopheru Zeemanovi

10. března 1988

Milý Chrisi,

dostal jsem kopii Tvého dopisu Milnorovi, který se určitě týká něčeho, co Milnor řekl nebo napsal nám dvěma o Smaleovi v šedesátých letech. Myslím, že jsem k tomu také dostal nějaký komentář od Smalea, ale mezitím jsem dělal pořádek ve své pracovně a nemám vůbec tušení, co vlastně Smale řekl; a nevím ani, co řekl Milnor. A asi bych teď měl jít zpátky do postele.

Tvoje paměť je v tomto ohledu mnohem přesnější než moje. Vzpomínám si na jaro 1960. Vzpomínám si na pověsti o Smaleovi, kterým jsem nevěřil, dokud mě nenavštívil Papakyriakopoulos; myslím, že Papa řekl něco v tom smyslu, že Eilenberg si prohlížel Smaleův důkaz vícerozměrné Poincarého hypotézy a uznal jej za správný. Mlhavě si vzpomínám na tvou přednášku – byla o práci Penrosea, Whiteheada a Zeemana; bylo v ní něco připomínající teorii pohlcování*), a nejvíce mě překvapilo, že Ty nebo někdo jiný řekl, že to je jediný článek, jehož byl JHC Whitehead spoluautorem a ve kterém jeho jméno není uvedeno až jako poslední v abecedě. Vzpomínám si, že jsem seděl ve své malé pracovně v tehdejším matematickém ústavu v Oxfordu a zíral na tabuli a snažil se přemýšlet o eliminaci „držadel". Z nějakého důvodu jsem si představoval, že takto postupoval i Smale, ale nemyslím, že mi o tom někdo řekl. Nedokázal jsem vymyslet, jak se zbavit těch otravných držadel, protože znám některé hrozné prezentace triviální grupy. Pak mě napadlo, že bych mohl tak říkajíc vypudit všechny potíže do nekonečna s využitím té pohlcovací teorie a také myšlenky, která snad patří Barrymu Mazurovi a kterou zformuloval Morton Brown.

Potom si vzpomínám, jak mě vezl Ioan James do Bonnu; byl s námi další Američan, snad Bob Hunter nebo Dick Swan. Někde uprostřed Holandska vystoupil Ioan z auta a šel se vyčurat u jednoho statku; my Američané jsme to pokládali za cosi typicky britského a byli jsme z toho příliš vyděšeni, než abychom udělali totéž. Vzpomínám si, že A. Borel si stěžoval během mé přednášky, že příliš často odbývám mávnutím ruky záležitosti ze základů PL topologie**), které nebyly řádně dokázány; touto stížností jsem byl pak posedlý během příštích šesti nebo sedmi let. Pokud jde o Smaleovu přednášku, vzpomínám si na své úvahy o tom, že skutečně nebral v potaz, že by mohly existovat zapeklité prezentace triviální grupy; jinými slovy, snažil se pouze eliminovat jednorozměrná držadla pomocí dvourozměrných, aniž by o tom příliš přemýšlel. Považoval jsem to za osudnou chybu Smaleovy metody a vzbudilo to ve mně utajovanou, avšak značnou škodolibost. Ovšem další týden v Zürichu to Smale dal do pořádku; kdybych se byl totiž naučil Whiteheadovu knihu „Simplicial Spaces, Nuclei and *m*-Groups", byl bych to byl svedl i já sám. Mám dojem, který není vůbec ničím podložen, že totiž Moe Hirsch, který je pravděpodobně mnohem lepší vědec než Smale (jinými slovy, Smale je potrhlý génius a Hirsch velký pracant), poradil Smaleovi, jak dát všechno do pořádku. Pointa byla v tom, že můžete dodat triviální dvojice dvourozměrných a třírozměrných buněk, což je na dvojrozměrném skeletonu ekvivalentní přidání triviálních relátorů; to je zvláštní a jemná odrůda „Tietzeho transformace", která je potřebná, abyste mohli algebraicky manipulovat s dvojrozměrnými buňkami tak, abyste se zbavili jednorozměrných buněk. Jestliže je dimenze dosti vysoká, potom tato manipulace může být provedena geometricky. Myslím, že právě kvůli těmto geometrickým jemnostem vyvstala otázka, zda Smale skutečně podal důkaz v dimenzi pět nebo ne.

Potom si vzpomínám, že jsem se těšil z Tvé pohostinnosti, když jsem přestupoval v Bletchley, a že jsem v létě 1960 udělal mnoho hezké geometrické matematiky.

Skutečně nevidím důvod, proč se lidé tolik zajímají o to, co se přesně stalo potom. Nakonec nejde o velkou nacionalis-

*) V originále: engulfing theory.

**) PL topologie: „po částech lineární" nebo také „kombinatorická" topologie. (Pozn. překl.).

tickou záležitost typu „Newton versus Leibniz". Všichni jsme od té doby udělali v matematice mnoho a mě doopravdy zajímá jen to, co dělám a studuji právě teď. Smale je kolega, který znamená skutečně mnoho pro Berkeley i pro mne.

Je zde jedna zábavná věc, která se týká času. Naše bytí se nekonečně rozvětvuje nejen směrem do budoucnosti, ale i směrem k minulosti. Jinými slovy, když se mi podaří přejít ulici, aniž by mě porazil náklaďák, potom v alternativním světě platí, že mě přejel náklaďák; já osobně sice nejsem přítomen na této alternativní cestě do budoucnosti, ale moje jiné já tam určitě je. Měl jsem možnost uvítat u sebe na návštěvě matematika, kterého jsem neviděl od roku 1977, totiž Passiho. Jeho vzhled z roku 1977 si pamatuji velmi zřetelně. Nyní vypadá o 10 nebo 11 let starší, ale jinak je na sebe stále velmi podobný s výjimkou jediné věci: má nyní *úplně jiný nos!* Proto si myslím, že před deseti lety existovalo více osob jménem Passi; moje bytí se tehdy setkalo s jednou z nich, ale někdo trochu jiný a s jinou minulostí navštívil nedávno Berkeley. — A tak vzpomínám na to, co se stalo před 28 lety s trochou pobavení a předpokládám, že my všichni, jak tu jsme, máme trochu odlišnou minulost.

Tvůj

John R. Stallings

14. března 1988

Milý Chrisi,

10. března jsem Ti poslal vylíčení mých vzpomínek na PL topologii z roku 1960. Tentokrát se nebudu snažit být čistě věcný, ale chtěl bych dodat něco o svých dojmech a filozofii. Hodlám poslat kopii tohoto dopisu Smaleovi a Milnorovi.

V letech 1956—59 jsem byl v aspirantuře v Princetonu, nebyl jsem tak dobře připraven jako někteří jiní aspiranti a měl jsem představu, že zabývat se matematikou je mnohem důležitější, než se jí učit. Naučil jsem se něco z teorie, která je nutná k pochopení těch výsledků z vícerozměrné topologie, o kterých je řeč. Metody JHC Whiteheada, MHA Newmana, V. Guggenheima apod. se vyučovaly ve Foxových přednáškách. Milnor měl svou konstrukci exotických struktur na S^7 a přednášel o diferenciální topologii. Čas tedy dozrál k tomu, aby se něco stalo.

Většina aspirantů se očividně snažila vytahovat před druhými svými širokými vědomostmi a svou intelektuální břitkostí; svazky a spektrální posloupnosti byly velkými tématy pro konverzaci. Potom přišla Mazurova věta o vkládání sféry. Najednou (v zimě nebo na jaře na přelomu let 1957 až 58) se znovu objevil Barry Mazur, po dlouhé přestávce, kdy se v Paříži zabýval bůhvíčím, a přišel se svou větou. Byl to velmi snadný a srozumitelný důkaz něčeho, co se zdálo být tak složité, že se nikdo neodvážil ani vyslovit takovou domněnku. Výsledek byl doplněn a vybroušen dalšími matematiky, ale geniální nápad patří Mazurovi; tato genialita spočívala v drzosti a prostotě neopeřeného mládí (na matematický způsob).

V matematice je spousta lidí, kteří jsou rychlí, a docela dost je i těch, kteří do podrobna vstřebali celé učené svazky. Považuji zjev jako byl Mazur za mnohem přitažlivější a důležitější. Poté co někdo jako Mazur provede svůj vpád na nové teritorium, matematické masy ho následují, lízají kapky předákova potu a sestavují seznamy a tabulky i obstrukce a svazky a spektrální posloupnosti. To poskytne mnohým zaměstnání.

Já jsem obhájil doktorskou práci o Gruškově větě, a to na úrovni, která se v té době zdála být přízemní (na stará kolena jsem se naučil svou tehdejší práci lépe ocenit). Ale ten, koho jsem obdivoval, komu jsem záviděl a koho jsem se snažil napodobit, byl Barry Mazur.

Zde je můj příběh o tom, jak Smale vyřešil vícerozměrnou Poincarého hypotézu. Smale již tehdy pracoval ve vícerozměrné diferenciální topologii; byl pouze několik kroků za Milnorem v jeho invazi do tohoto oboru. Potom ho napadla myšlenka řešení „na plážích Ria".

Dovedu si představit, že kdybych já byl tehdy na plážích Ria, nenapadla by mě ta myšlenka tak snadno, protože, jak už jsem poznamenal, považoval jsem za velký problém zbavit se držadel dimenze 1. Představuji si, že Smale nebyl natolik informován, aby si s tím vůbec dělal starosti a tak se prodral ke svému velkému výsledku. Myslím, že v jeho důkazu byl malý kaz, ale ten nebyl podstatný. Problém jednorozměrných držadel byl v trochu jiném kontextu studován před dvaceti lety JHC Whiteheadem. Skutečně si myslím, že Smaleova Velká Věta vznikla tak, že se spojilo nové nadšení pro vícerozměrnou topologii s postupy z dob Whiteheada a Whitneye a se Smaleovým vlastním vědeckým vývojem. Dovedení této věty do konce a další pokračování (výpočty a obstrukce a tabulky) bylo asi dílem jiných. Myslím, že Milnor měl hodně práce s vytvořením základních postupů diferenciální topologie a s jejich jasným výkladem, a že největším plodem tohoto úsilí bylo, že důkaz Smalovy věty byl učiněn naprosto spolehlivým.

Potom přišel důkaz vícerozměrné Poincarého hypotézy používající teorii pohlcování. Budu to nazývat „moje věta". Ve skutečnosti jsou moje věta a Smaleova věta, ačkoli zní stejně, logicky různé. Smaleova věta říkala, že jestliže diferencovatelná varieta je homotopicky sféra, potom má stejnou PL strukturu jako sféra. Moje věta říkala, že jestliže PL varieta je homotopicky sféra, potom její podřízená topologická struktura je stejná jako u sféry.

Bylo zde několik okolností, které vydláždily cestu k mé větě. Byl jsem seznámen s Mazurovým důkazem (myslím, že jsem byl první, koho přesvědčil – a ještě jako student jsem přišel se zábavným faktem, že grupa, v níž můžeme definovat nekonečný součin, je triviální grupa, což je ovšem triviální). A z Foxových přednášek jsem znal PL topologii. Psychologická bariéra bránící dokázat něco o vícerozměrných homotopických sférách se zmenšila, když jsem se dověděl, že údajný Smaleův důkaz byl příznivě přijat. A konečně, jak jsi poznamenal, dokonale jsem ovládal Penroseův-Whiteheadův-Zeemanův trik.

Když už mluvíme o mé větě, zdá se mi, že její důkaz byl mnohem jednodušší a zřejmější než Smaleův důkaz jeho věty. Ačkoliv Ty, já i další jsme napsali hodně o základech PL topologie, pravda je, že v ní není nic hlubokého a zajímavého (dá se to srovnat třeba se Sardovou větou v diferenciální topologii); celá tato teorie je pro obecný případ jaksi nepříliš imponující nebo překvapující, přestože detaily jsou hrozně pracné. Na knihách o PL topologii byly zajímavé konečné výsledky, jako jsou věty o rozplétání uzlů nebo věty o h-kobordismech a s-kobordismech; většina těchto výsledků má dvě verze, a to v pojmech teorie pohlcování i v pojmech „držadel". A později se ovšem tyto výsledky zasloužily o zrod nových generací matematických teorií.

Jak moje věta, tak věta Smaleova platí od dimenze 5 výše. Je snazší je dokázat pro dimenze od sedmi nahoru. Intuitivní pocit, že všechno funguje v dimenzi 5, zde byl od počátku. Byla to hlavně otázka formulace správných lemmat a srozumitelné argumentace. Odvoláme-li se na mou větu, pak byla Tvoje myšlenka „odpumpování singularit nejvyšší dimenze" dobře zformulována.

Napadlo mě teď něco, co by potěšilo Thurstona a Gromova. Matematické zločiny Thurstona a Gromova záležejí v tom, že říkají tvrzení, která jsou pravdivá jen v určité správné interpretaci a pro něž nemají skutečně dobré důkazy; tím si přisvojují celé oblasti matematiky i všechny věty v těchto oblastech a připravují tím poctivé pracanty o právem zaloužený kredit. Něčeho takového jsme se dopustili i Smale a já v roce 1960, protože jsme věděli, že určité věty platí a také jsme to říkali, přinejmenším v soukromí, aniž bychom skutečně věděli, jak je dokázat, nebo možná aniž bychom si chtěli připustit tu práci, kterou by to vyžadovalo.

Jak já to vidím, Smale pracoval většinou sám, snad s velmi nepatrnou spoluúčastí Hirschovou. Ty a já jsme spolupracovali ve značném rozsahu v létě 1960, a to ve vybrušování důkazů směrem k nejmenší dimenzi 5 i v tom, že jsme používali podobné postupy při dokazování různých výsledků o rozplétání uzlů. Nakonec jsme své práce publikovali každý zvlášť, ačkoli tu a tam se vyskytly malé části společné práce. Kdyby nám bylo opravdu záleželo na tom, kdo si co myslel jako první, byli bychom museli mít sekretářku, která by zapisovala všechny naše konverzace. Nikdo z nás neměl zájem psát společné práce. Ale ta spolupráce byla stimulující a pomohla nám vytvořit dostatečně mnoho dobrých výsledků pro nás pro oba.

Nakonec poslední slovo: Když jsem v té oblasti pracoval několik let, ztratil jsem o ni zájem. Byly zde ty velké a snadno pochopitelné věty. To už bylo uděláno. Tečka. Jestliže někdo další chce o nich přednášet, je vítán. Jestliže někdo chce použít tyto věty pro výpočty a klasifikace, má moje zdrženlivé požehnání. Ale pro mne to všechno zní nyní únavně a nudně.

S pozdravem

John R. Stallings