Marcel Berger

Konvexita (2. část)

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 38 (1993), No. 4, 202--211

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138767

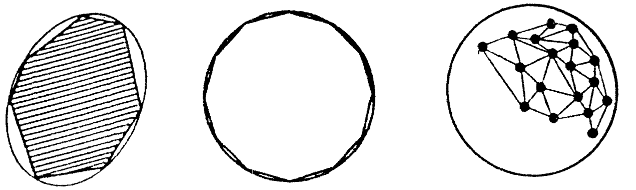
Konvexita

(2. část)

Marcel Berger

6. Dvě algebraické operace na množině všech konvexních těles: dualita a sčítání

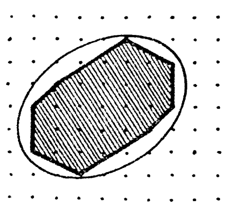
Typický vývoj matematického chápání spočívá v dosahování stále vyšších úrovní abstrakce vytvářením struktur. Místo jednotlivých konvexních těles budeme v této i v následující části studovat celou množinu všech těchto těles (řekněme v prostoru dané dimenze d); zavedeme na této množině algebraickou a topologickou strukturu. Pojem duality, který je v matematice velmi užitečný (připomeňme Fourierovu analýzu, homologii a kohomologii, ...), bude zaveden v návaznosti na řešení praktického problému, totiž výpočtu objemu konvexního tělesa pomocí počítače. Pokud se podíváme na vepsané polygony pro rovinné křivky, vypadá to jednoduše:



Obr. 29.

Ve vyšších dimenzích se však setkáme s překvapeními.

A. Výpočet objemu konvexního tělesa pomocí počítače



Obr. 30.

Předpokládejme, že je konvexní těleso K popsáno v počítači pomocí pravidla náležení: zadáme-li bod x, pravidlo dá odpověď na otázku, zda platí či neplatí $x \in K$.

R. 1985 Lovász nalezl algoritmus polynomiálně závislý na čase, který dává pro $\mathrm{vol}(K)$ dolní odhad, který označíme $\underline{\mathrm{vol}}(K)$. Zásadní problém spočívá v tom, jak dobrý je tento odhad. V roce 1987 Barany a Füredi ukázali, že je to úplná katastrofa. Dokázali, že pro vstupní data polynomiálně

Marcel Berger: *Convexity*. American Mathematical Monthly 97 (1990), 650-678. Přeložili Ivan Netuka a Jiří Veselý. Obrázky dle originálních náčrtů narýsovala Alena Šarounová.

(2. část překladu; první část byla otištěna v minulém čísle.)

závislá na d, řekněme pro $n = d^a$ bodů, *nelze obecně* dostat lepší výsledek než

$$\frac{\overline{\mathrm{vol}}(K)}{\underline{\mathrm{vol}}(K)} \leqq \left(\frac{d}{2ae\log d}\right)^{d/2}.$$

Pro důkaz uvažujeme nejjednodušší konvexní těleso, tj. jednotkovou kouli B^d. Dá se dokázat, že pro maximální objem $V(d,n)$ mnohostěnu s $n = d^a$ body obsaženého v B^d platí

$$\frac{V(d,n)}{\mathrm{vol}(B^d)} \leqq \left(\frac{2ae\log d}{d}\right)^{d/2}.$$

Myšlenka důkazu je zhruba následující: Podle Carathéodoryovy věty (viz část 8 E) každý bod konvexního obalu $n = d^a$ bodů leží v nějakém simplexu v $\mathbb{R}^d$. Jsou-li body vesměs v jednotkové vzdálenosti od počátku, lze obdržet jemné odhady objemu takových simplexů, pomocí jeho k-stěn. Takových situací nastane při vyplňování mnohostěnu celkem $\binom{n}{k}$ a faktor $1/k!$ přibude z objemu k-rozměrného simplexu. Jemnost spočívá v chytré volbě k: k cíli vede volba k jako celé části z $d/2\log n$. Pak totiž s ohledem na vzorečky uvedené na začátku části 3 pro objem jednotkové koule B^d a na vztah $\binom{n}{k} = n!/\big(k!(n-k)!\big)$ lze obdržet po výpočtu využívajícím Stirlingovy formule pro výpočet $p!$ s velkým p potřebný výsledek. Stirlingova formule dává pro $p \to \infty$

$$\frac{p!}{\sqrt{2p\pi}\,(p/\mathrm{e})^p} \longrightarrow 1.$$

Poznamenáváme, že elipsoidy jsou opravdu *nejhorší* konvexní množiny z pohledu uvedené nerovnosti. To dokázal v r. 1951 Macbeath. Je-li dán počet bodů n, pak pro konvexní tělesa K v daném prostoru $\mathbb{R}^d$ je mez

$$\frac{\sup\{\text{objem mnohostěnu } L \subset K \text{ o } n \text{ vrcholech}\}}{\mathrm{vol}(K)}$$

minimální pro elipsoidy.

Stále však máme ještě jednu naději. Pokusíme se odhadnout $\mathrm{vol}(K)$ zdola pomocí veličiny $\underline{\mathrm{vol}}(K)$ definované pravidlem náležení; dále se pokusíme o odhad shora pomocí veličiny $\overline{\mathrm{vol}}(K)$ generované na základě pravidla náležení a pravidla *oddělování*; toto pravidlo se dá jednoduše implementovat — když počítač odpovídá $x \notin K$, podává zároveň informaci o poloprostoru, který obsahuje K (obr. 31).

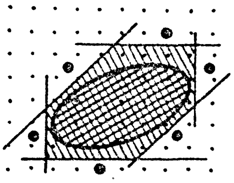
Z Lovászových výsledků plyne, že existuje polynomiální algoritmus, dávající $\overline{\mathrm{vol}}(K) \geqq \underline{\mathrm{vol}}(K)$. Navíc

$$\frac{\overline{\mathrm{vol}}(K)}{\underline{\mathrm{vol}}(K)} \leqq d^d,$$

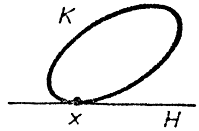
to je však špatné pro velká d. Bylo by však možné doufat v chytrou volbu bodů k nalezení dobré hodnoty $\overline{\mathrm{vol}}(K)/\underline{\mathrm{vol}}(K)$.

To však znamená být schopen si pohrát s body a poloprostory (resp., řekněme, s afinními nadrovinami). To však je přesně to, co nám poskytuje klasická dualita v euklidovských prostorech. Konečný výsledek uvedeme dále v části C (až v části B vysvětlíme tuto dualitu).

Než však skončíme s klasickou konvexitou, připomeňme, že Minkowski dokázal ještě před rokem 1900, že každé konvexní těleso má nejméně jednu *opěrnou* nadrovinu H (zde afinní) pro každý bod x ležící na jeho hranici (obr. 32).



Obr. 31.

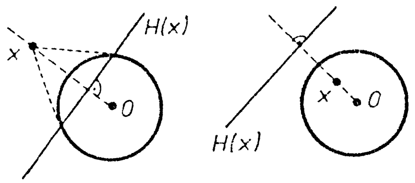


Obr. 32.

Tedy těleso K je celé obsaženo v jednom ze dvou uzavřených poloprostorů určených nadrovinou H. Ve většině knih se toto nazývá Hahnova-Banachova věta, protože Hahn a Banach ji dokázali (mnohem později) pro nekonečněrozměrný případ. Tento základní výsledek pro studium konvexních množin dává speciálně to, o čemž jsme se již zmínili v části 2: uzavřená konvexní množina je průnikem všech uzavřených poloprostorů, které ji obsahují.

B. Euklidovská dualita

Uvažujeme $\mathbb{R}^d$ se standardní euklidovskou strukturou. Dualita mezi body $\mathbb{R}^d$ a odpovídajícími afinními nadrovinami je geometricky definována následovně:



Obr. 33.

Bodu $x \neq 0$ přiřadíme přímku $0x$ a nazveme nadrovinou $H(x)$ *duální* k x, je-li $H(x)$ kolmá na $0x$ a protíná ji v bodě x' takovém, že $0x \cdot 0x' = 1$. Obráceně, jestliže H je libovolná nadrovina neobsahující počátek 0, příslušný bod x nazveme *duálem* (nebo *pólem*) k H. Zjistěte sami v rovině, co je duálem průsečíku dvou přímek (v $\mathbb{R}^2$). Algebraicky jsou věci mnohem jednodušší:

$$H(x) = \{\, y \in \mathbb{R}^d : (x \mid y) = 1 \,\},$$

kde $(\cdot \mid \cdot)$ značí obvyklý skalární součin.

Polární (reciproční) konvexní těleso K^* k danému konvexnímu tělesu K je buď konvexní obal pólů všech opěrných nadrovin H tohoto tělesa, nebo průnik poloprostorů vyťatých nadrovinami, které jsou duální k některému z bodů z K (samozřejmě, že musíme pracovat s hraničními body množiny K). Tato dualita je výborná, je-li K

konvexní těleso obsahující 0 ve svém vnitřku. V dalším uvažujeme pouze taková K. Pak platí $(K^*)^* = K$.

Za příklady poslouží:

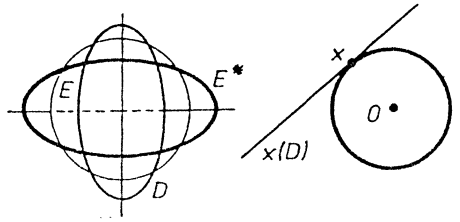
(i) Jednotková koule B^d je svým vlastním duálem.

(ii) Duály k elipsoidům jsou opět elipsoidy; ověřte, že platí:

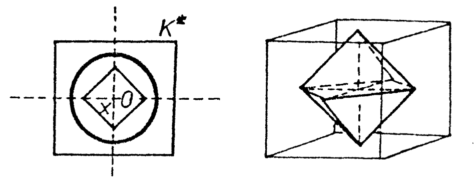
$$\mathrm{vol}(E)\,\mathrm{vol}(E^*) = \left(\mathrm{vol}(B^d)\right)^2 = \beta^2(d)\,.$$

(iii) Duálem ke krychli je mnohostěn nazývaný *křížový mnohostěn*. Přesněji, duál ke $K = [-1,1]^d$ je $K^* =$ konvexní obal bodů $\pm e_i$ (kde $\{e_i\}$ je standardní báze). Poznamenejme zde, že krychle má 2^d vrcholů, zatímco křížový mnohostěn jich má pouze $2d$. Dále je

$$\mathrm{vol}(K)\,\mathrm{vol}(K^*) = 2^d\frac{2^d}{d!} = \frac{4^d}{d!}\,.$$



Obr. 34.



Obr. 35.

(iv) Obecněji, duálem k mnohostěnu je mnohostěn, přičemž dualita zaměňuje vrcholy jednoho za stěny druhého.

C. Zpět k odhadům objemů: invariance součinu $\mathrm{vol}(K)\,\mathrm{vol}(K^*)$

V této části pracujeme s konvexními tělesy K, která jsou symetrická podle počátku. Obrázek a způsob, jak Lovász nachází $\overline{\mathrm{vol}}(K)$ a $\underline{\mathrm{vol}}(K)$, ukazují, že máme-li spočíst $\mathrm{vol}(B^d)$ jeho metodou, musíme odhadnout

$$\frac{\overline{\mathrm{vol}}(B^d)}{\underline{\mathrm{vol}}(B^d)} \geq \frac{\mathrm{vol}(K^*)}{\mathrm{vol}(K)}\,,$$

kde K je jeden z mnohostěnů obsažených v B^d, jako tomu bylo v části A. Přepišme pravou stranu předcházející nerovnosti do tvaru

$$\mathrm{vol}(K)\,\mathrm{vol}(K^*)\left(\frac{\mathrm{vol}(B^d)}{\mathrm{vol}(K)}\right)^2\frac{1}{\left(\mathrm{vol}(B^d)\right)^2}\,.$$

Poslední dva členy jsme již dříve odhadli. Náš plán spočívá v chytré volbě K, tj. v aproximaci B^d takovou K, pro kterou je součin $\mathrm{vol}(K)\,\mathrm{vol}(K^*)$ velmi malý.

Poznamenejme, že tento součin nezávisí na lineárních transformacích K, protože lineární transformace ovlivní $\mathrm{vol}(K)$ faktorem $\det f$ a $\mathrm{vol}(K^*)$ faktorem $(\det f)^{-1}$. Mahler vyslovil domněnku, že pro všechny množiny K a všechna d platí

$$\beta^2(d) \geqq \mathrm{vol}(K)\,\mathrm{vol}(K^*) \geqq \frac{4^d}{d!},$$

přičemž vlevo nastává rovnost charakterizující elipsoidy, zatímco rovnost vpravo charakterizuje krychle a křížové mnohostěny.

Uvažujeme Mahlerovu domněnku o rovnosti vpravo — pak se ale shora zmíněná naděje rozplývá, protože pak vždy platí

$$\frac{\mathrm{vol}(K^*)}{\mathrm{vol}(K)} \geqq \left(\frac{d}{ae\log d}\right)^d,$$

což plyne ze shora uvedených výsledků.

Jaká je dnešní situace s ohledem na Mahlerovu dvojitou domněnku? Odhad na levé straně je přesný a charakterizuje elipsoidy. Pro $d = 2, 3$ to dokázal Blaschke a s jistým omezeními pro všechna ostatní d obdržel výsledek L. Santalo. To, že rovnost charakterizuje elipsoidy pro všechna d, dokázal Saint Raymond teprve v r. 1981. Přesná hodnota odhadu vpravo není známa dodnes ani pro $d = 3$. Je známa jen pro $d = 2$ (zkuste si to dokázat a záhy pocítíte, že obtíže nastávají i v tomto případě). V r. 1985 J. Bourgain a V. Milman ukázali, že řádová velikost Mahlerova odhadu je v pořádku. Existuje $c > 0$ tak, že pro všechna K a všechna d platí

$$\mathrm{vol}(K)\,\mathrm{vol}(K^*) \geqq \frac{c^d}{d!}.$$

Z toho plyne, že chyba ve výpočtu objemů bude muset být tak špatná, jako

$$c\left(\frac{d}{\log d}\right)^d.$$

Proto je „nemožné spočítat objem s rozumnou chybou v polynomiálním čase“. Jinak řečeno: výpočet objemu použitelný pro libovolné konvexní těleso by měl být jiného typu.

Bourgainův a Milmanův důkaz je dost náročný. Využívá teorie pravděpodobnosti a jemných odhadů; viz [8] a [5].

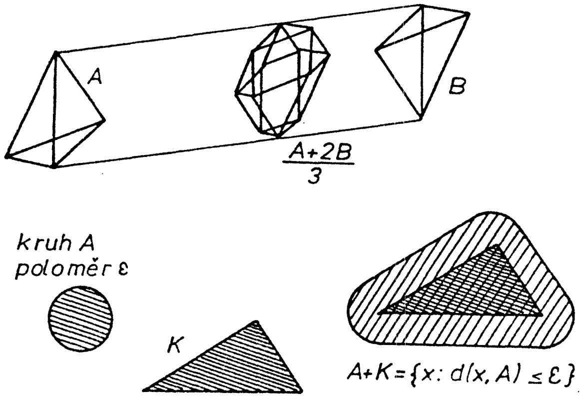
Poznamenejme ještě, že Mahlerova domněnka je užitečná v úplně jiném kontextu simultánní aproximace reálných čísel racionálními; viz [17], str. 31.

D. Minkowského sčítání

Pro konvexní množiny K, H v $\mathbb{R}^d$ je množina definovaná pomocí

$$K + H = \{\, x + y : x \in K,\ y \in H \,\}$$

opět konvexní.



Obr. 36.

Poznamenejme, že změna počátku v $\mathbb{R}^d$ vede pouze k posunutí množiny $K + H$, takže její tvar je dobře definován. Pojem je tedy afinní. Obecněji množina $\lambda K + \mu H = \{ \lambda x + \mu y : x \in K,\ y \in H \}$ je opět konvexní pro všechna $\lambda, \mu > 0$. Na obrázku je znázorněno

$$\frac{A + 2B}{3} = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B$$

pro dva simplexy v $\mathbb{R}^3$ a také součet K s koulí o poloměru ε, což není nic jiného než množina bodů vzdálených od K nejvýše o ε. Není dost času toto dále rozvíjet, stačí však poznamenat, že jde o počáteční bod úvah jednoho z prvních rigorózních důkazů standardní izoperimetrické nerovnosti v $\mathbb{R}^d$, která říká, že mezi všemi konvexními tělesy daného objemu mají koule nejmenší objem hranice (zde $(d-1)$-objem je délka pro $d = 2$ a povrch pro $d = 3$), viz část 8. Zmiňme se zde ještě o základní Brunnově-Minkowského nerovnosti

$$(\mathrm{vol}(A + B))^{1/d} \geqq (\mathrm{vol}(A))^{1/d} + (\mathrm{vol}(B))^{1/d} .$$

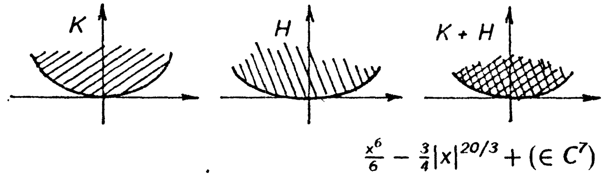
Byla v podstatě objevena Brunnem v r. 1888. Čtenář snadno nahlédne, že je ekvivalentní tvrzení, že $(d-1)^{-1}$ mocnina $(d-1)$-objemu řezu daného konvexního tělesa v $\mathbb{R}^d$ je *konkávní* funkce, pokud pohybujeme rovinou řezu zleva doprava, viz část 5 A.

V obou případech z obrázku má Minkowského sčítání *regularizační efekt*; v obou případech totiž má $K + H$ hladší hranici než K, H. Je to však nerealistické očekávat v obecném případě, ale to bylo objeveno až v r. 1988 Kieselmanem. Dokonce i v případě, že K a H mají nejlepší možnou hranici, regulární ve smyslu C^∞, nebo reálně analytickou nebo dokonce algebraickou, hranice $K + H$ nemusí být hladká. Výsledky jsou lokálního charakteru.

Negativní výsledek se týká nadgrafů K, H (viz část 4) hladkých funkcí $x^4/4$ a $x^6/6$, pro něž

$$K + H \text{ je nadgraf funkce } \frac{x^6}{6} - \frac{3}{4}|x|^{20/3} + \text{člen třídy } C^7 .$$

Množina $K + H$ má tedy pouze šestkrát diferencovatelnou hranici. Ale to je zároveň nejhorší možný výsledek — v pozitivním smyslu totiž dostáváme, že jsou-li hranice množin K, H třídy C^∞, potom hranice součtu $K+H$ je vždy třídy $C^{20/3} = C^{6+(2/3)}$; viz [26].



Obr. 37.

Minkowského sčítání nemá tedy regularizační efekt, pokud regularita znamená *lokální* hladkost (vlastnost diferencovatelnosti). Má ale *globální* regularizační efekt, interpretujeme-li regularitu jako blízkost k elipsoidálnímu tvaru. Skutečně, Vitali Milman dokázal, že pro libovolné konvexní těleso v $\mathbb{R}^d$ existují dva afinní izomorfismy A a B v $\mathbb{R}^d$ takové, že položíme-li $T = K + A(K)$, pak duál T^* pro T má tu hezkou vlastnost, že $T^* + B(T^*)$ má Banachovu-Mazurovu vzdálenost od sféry vždy omezenou číslem nezávislým na dimenzi d.

7. Topologie na množině všech konvexních těles: intuice je nebezpečná

A. Topologie

Pomocí topologie budeme moci opět nahlédnout, že intuice je zavádějící. Přesněji, i když libovolné konvexní těleso má hranici, která je skoro všude C^1 a C^2 diferencovatelná, v množině všech konvexních těles skoro všechna konvexní tělesa mají hranici, která není třídy C^2. Dále nahlédneme, že je to dokonce ještě horší. Topologie je zapotřebí k tomu, abychom dali přesný význam výroku „skoro všechna konvexní tělesa".

Budeme pro jednoduchost pracovat v množině $\mathcal{K}$ všech konvexních těles symetrických vzhledem k počátku, ležících v daném $\mathbb{R}^d$. Připomeňme znovu, že jsou to konvexní kompaktní množiny s neprázdným vnitřkem. Topologii na množině konvexních těles lze nejlépe zavést pomocí *Banachovy-Mazurovy metriky.*

V části 3 jsme se seznámili s Banachovou-Mazurovou vzdáleností na $\mathcal{K}$ — její předností je, že je invariantní vůči lineárním transformacím. Nicméně je to vzdálenost ve *striktním smyslu* pouze tehdy, ztotožníme-li konvexní množiny, které jsou stejné modulo lineární transformace. Hausdorffova vzdálenost není lineárně invariantní vzdáleností. Fixujme na $\mathbb{R}^d$ euklidovskou metriku. Definujeme $d(K,H)$ jako nejmenší ε takové, že $K \subset H + \varepsilon B^d$ a zároveň $H \subset K + \varepsilon B^d$, tj. K je ve vzdálenosti ε od H *a také* obráceně. Lze jednoduše dokázat, že Hausdorffova vzdálenost definuje na $\mathcal{K}$ stejnou topologii jako Banachova-Mazurova vzdálenost (stačí zohlednit faktorizaci).

Poznamenejme, že na $\mathcal{K}$ není známa žádná „rozumná míra". K čistě topologické definici pojmu „skoro všude" bez použití míry využijeme Baireovu myšlenku: zanedbatelné množiny jsou definovány jako takové, které jsou spočetnými sjednoceními řídkých množin (někdy používáme k jejich označení termínu množiny první kategorie).

B. Pravděpodobná hladkost hranice konvexních množin

Uvažujme konvexní těleso K a jeho hranici ∂K. Chceme studovat regularitu této množiny: pro $d = 2$ je to křivka a pro $d = 3$ plocha, obecně pak nějaká nadplocha. Jde o lokální problém. Speciálně, zvolíme-li $x \in \partial K$ a opěrnou nadrovinu H v x, můžeme K lokálně považovat za nadgraf konvexní funkce $f: U \to \mathbb{R}$, kde U je okolí x v H. Pak bude ∂K splývat lokálně s grafem funkce f.

Nyní můžeme použít výsledků citovaných v části 4. Ztotožníme-li systém všech takových ∂K s takovými výše uvažovanými grafy, víme, že ∂K jsou skoro všude (vzhledem k přirozeně definované míře na ∂K, kterou dostaneme z Lebesgueovy míry na H prostřednictvím f) diferencovatelné variety třídy C^2 (speciálně skoro všude třídy C^1). Obraťme se nyní k otázce: jaká je šance, že ∂K bude všude třídy C^1, pokud budeme vybírat K z $\mathcal{K}$ náhodně. Elegantní odpověď nalezl Klee již v r. 1959: dokázal, že až na zanedbatelnou množinu v $\mathcal{K}$ je ∂K vždy třídy C^1 všude, a je to tedy hezká C^1 varieta v $\mathbb{R}^d$ (kodimenze 1).

V protikladu k tomuto výsledku je situace s C^2 dramaticky odlišná. Gruber v r. 1977 dokázal, že množina těch K v $\mathcal{K}$, jejichž hranice je všude třídy C^2, je zanedbatelná. Je to dokonce mnohem horší: Zamfirescu v r. 1980 dokázal, že až na zanedbatelnou množinu má ∂K hodně špatné vlastnosti s ohledem na křivost: křivost neexistuje na nespočetné množině a tam, kde existuje, je rovna nule! To je tím, že tak se přesně chová křivost každého mnohostěnu a mnohostěny jsou husté v $\mathcal{K}$; viz [20], [37].

8. Stručný přehled dalších důležitých partií konvexity

S ohledem na nedostatek místa nemůžeme tato témata probrat podrobněji — zmíníme se jen povšechně, o čem jsou, a čtenáře odkážeme na citovanou literaturu.

A. Nerovnosti

Nejdůležitější je Brunnova-Minkowského nerovnost, zmíněná v části 6. Vede ke klasické izoperimetrické nerovnosti v $\mathbb{R}^d$. Jiné její důkazy a jiné nerovnosti, zejména nerovnosti se *smíšeným objemem,* které jsou velmi hluboké a obtížně dokazatelné, nalezne čtenář v [11] a [27].

B. Téměř sférické řezy, jevy koncentrace, aplikace

Izoperimetrickou nerovnost na sférách užil v třicátých letech Paul Lévy pro funkce k důkazu vlastností koncentrace. Byla dále použita v r. 1971 Milmanem k důkazu inspirativního tvrzení Dvoretského (1961), které říká, že každé konvexní těleso má skoro elipsoidální řezy pro vhodnou kodimenzi. To byl též počátek celé série nedávných prací v tomto duchu. Jejich důležitost spočívá kromě mimořádné geometrické zajímavosti, v jejich aplikacích. Prostřednictvím tzv. asymptotické metody jsou aplikovány na Banachovy prostory nekonečné dimenze; viz [28].

C. Konvexita v analýze

Nedávno byly objeveny různé funkce, které jsou logaritmicky konvexní, např. $\mathrm{vol}^{(1/d)}$ v Brunnově-Minkowského nerovnosti. Zdá se, že počátek leží v důležité Brascampově-Liebově nerovnosti, která řeší mj. dlouho odolávající domněnku: množiny, na nichž je první vlastní funkce Dirichletovy úlohy pro konvexní oblasti konstantní, jsou konvexní nadplochy. Dokonce platí, že fundamentální řešení rovnice vedení tepla má určitou vlastnost konvexity; viz [3], [9].

D. Vyplňování a pokrývání

Tyto dva pojmy (packing and covering) jsou velmi důležité. Jsou spojené již od éry Minkowského s geometrií čísel, s racionálními aproximacemi apod., ale také se samoopravujícími se kódy. Zajímavými odkazy jsou i [13], [17]. Jsou také spojeny s pojmy entropie a nekonečněrozměrné Banachovy geometrie; viz [28].

E. Carathéodory, Helly, Radon

Následující tři věty jsou elementární a přitom velmi názorné.

Carathéodoryova věta: Konvexní obal množiny v $\mathbb{R}^d$ je generován jako množina všech konvexních kombinací $(d+1)$-tic jejích bodů.

Hellyova věta: Systém kompaktních konvexních množin má neprázdný průnik, jakmile každý jeho konečný podsystém s $(d+1)$ členy má neprázdný průnik.

Radonova věta: Nechť T je konečná podmnožina alespoň $(d+2)$ bodů v $\mathbb{R}^d$; pak lze vždy nalézt disjunktní rozklad této množiny $T = T_1 \cup T_2$ takový, že $\mathrm{conv}(T_1) \cap \mathrm{conv}(T_2) \neq \emptyset$.

Žádná z těchto vět není obtížná, ale také není elementární. Je zajímavé, že z každé z nich vyplývají obě zbývající. Mají obrovské množství aplikací a jsou úzce spojeny s kombinatorikou; viz např. [15], [18].

F. Konvexita v jiných prostorech

Konvexitu lze definovat v mnohem obecnějších prostorech než např. euklidovských. Speciálně se používá v současné době v riemannovské geometrii; viz [4], [31].

G. V neposlední řadě: momentové zobrazení

Toto zobrazení bylo zavedeno zcela nedávno. To, že je v některých případech konvexní, dává velmi silný nástroj a představuje překvapivé spojení mezi mechanikou, Kählerovou geometrií, teorií Lieových grup a vlastními čísly matic; viz [1], [25].

Literatura

Kromě prací zmíněných v textu a uvedených v následujícím seznamu nalezne čtenář systematický (i když samozřejmě nikdy vyčerpávající) výklad o konvexitě v [6], [7], [10], [12], [16], [22], [27], [35].

[1] M. F. ATIYAH: *Angular Momentum. Convex Polyhedra and Algebraic Geometry.* Proc. Edinburgh Math. Soc. *26* (1983), 121–138.
[2] K. BALL: *Cube slicing in* $\mathbb{R}^n$. Proceed. A.M.S. *97* (1986), 465–473.
[3] K. BALL: *Logarithmically concave functions and sections of convex sets in* $\mathbb{R}^n$. Studia Math. *88* (1988), 69–84.
[4] W. BALLMANN, M. GROMOV, V. SCHROEDER: *Manifolds of Negative Curvature.* Birkhäuser 1985.
[5] I. BARANY, Z. FÜREDI: *Computing the volume is difficult.* Discrete and Computational Geometry *2* (1987), 319–326.
[6] M. BERGER: *Geometry I and II.* Springer 1987.
[7] T. BONNESEN, W. FENCHEL: *Theorie der konvexen Körper.* Springer (reprint) 1974.
[8] J. BOURGAIN, V. D. MILMAN: *New volume ratio properties for convex symmetric bodies in* $\mathbb{R}^n$. Inventiones Math. *88* (1987), 319–341.
[9] H. J. BRASCAMP, E. H. LIEB: *Best constants in Young's inequality, its converse and its generalization to more than three functions.* Advances in Math. *20* (1976), 151–173.
[10] A. BRONSTED: *An Introduction to Convex Polytopes.* Springer 1983.
[11] J. D. BURAGO, V. A. ZALGALLER: *Geometric Inequalities.* Springer 1988.
[12] H. BUSEMANN: *Convex Surfaces.* Interscience 1958.
[13] J. H. CONWAY, N. J. A. SLOANE: *Sphere Packings, Lattices and Groups.* Springer 1988.
[14] J. COOLIDGE: *Algebraic Plane Curves.* Dover 1959.
[15] L. DANZER, B. GRÜNBAUM, V. KLEE: *Helly's theorem and its relatives.* AMS Proc. Sympos. *7* (1963).
[16] H. G. EGGLESTON: *Convexity.* Cambridge University Press 1958.
[17] P. ERDÖS, P. M. GRUBER, J. HAMMER: *Lattice Points.* Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, No. *39*, John Wiley 1989.
[18] W. J. ELLISON: *Waring's problem.* Amer. Math. Monthly *78* (1971), 10–36.
[19] M. GRÖTSCHEL, L. LOVÁSZ, A. SCHRIJVER: *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization.* Springer 1988.
[20] P. M. GRUBER: *Aspects of convexity and its applications.* Expositiones Math. *2* (1984), 47–83.
[21] P. M. GRUBER, J. M. WILLS (editors): *Convexity and its Applications.* Birkhäuser 1983.
[22] B. GRÜNBAUM: *Convex Polytopes.* Interscience 1967; U.M.I. Out-of-Print Books on Demand 1989.
[23] B. GRÜNBAUM, G. C. SHEPHARD: *Tilings with Congruent Tiles.* Bull. AMS *3* (1980), 951–973.
[24] B. GRÜNBAUM, G. C. SHEPHARD: *Tilings and Patterns.* Freeman 1987.
[25] V. GUILLEMIN, S. STERNBERG: *Convexity properties of the moment mapping.* Inventiones Math. *67* (1982), 491–513.
[26] C. O. KISELMAN: *Smoothness of vector sums of plane convex sets.* Math. Scand. *60* (1987), 239–252.
[27] K. LEICHTWEISS: *Konvexe Mengen.* Springer 1980.
[28] V. D. MILMAN, G. SCHECHTMAN: *Asymptotic Theory of Finite Dimensional Normed Spaces.* Springer Lecture Notes in Math., No 1200, 1986.
[29] T. ODA: *Convex Bodies and Algebraic Geometry.* Springer 1988.
[30] C. A. ROGERS: *Packing and Covering.* Cambridge University Press 1964.
[31] K. SHIOHAMA: *Topology of complete and non-compact manifolds.* In Advanced Studies in Pure Mathematics, No 3: Geometry of Geodesics and Related Topics, Kinokumya and North Holland, 1984.
[32] R. P. STANLEY: *Combinatorics and Commutative Algebra.* Birkhäuser 1983.
[33] S. J. SZAREK, M. TALAGRAND: *An isomorphic version of the Sauer-Shelah lemma and the Banach-Mazur distance to the cube.* Preprint IHES, 1988.
[34] J. TÖLKE, J. M. WILLS (editors): *Contributions to Geometry.* Birkhäuser 1979.