

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Filip Guldan

Je lepší hrát ruletu alebo blackjack?

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 38 (1993), No. 1, 29--39

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/138713>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1993

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

- [79] F. WAKAI, S. SAKAGUCHI, Y. MATSUNO: *Adv. Ceram. Mat.* 1 (1986), 259.
- [80] F. WAKAI, H. KATO: *Adv. Ceram. Mat.* 2 (1987), 21.
- [81] T. G. NIEH, C. M. McNALLY, J. WADSWORTH: *Scripta Metall.* 22 (1988), 1297.
- [82] T. G. NIEH, C. M. McNALLY, J. WADSWORTH: *Scripta Metall.* 23 (1989), 457.
- [83] H. GLEITER: *Europhysics News* 20 (1989), 130.
- [84] J. JING, A. KRÄMER, R. BIRRINGER, H. GLEITER, N. GONSER: *J. Non-Cryst. Solids* 113 (1989), 167.
- [85] J. WEISMÜLLER, R. BIRRINGER, H. GLEITER: *Phys. Lett A* 145 (1990), 130.
- [86] R. Z. VALIEV, R. R. MULYUKOV, KH. YA. MULYUKOV, V. I. NOVIKOV, L. I. TRUSOV: *Žurn. techn. fiz.* 15 (1989), 78.
- [87] R. Z. VALIEV, Y. D. VISHNYAKOV, R. R. MULYUKOV, G. S. FAINSTEIN: *Phys. stat. sol. (a)* 117 (1990), 549.
- [88] KH. YA. MULYUKOV, G. F. KORZNIKOVA, R. Z. VALIEV: *Mater. Sci. Forum* 62-64 (1990), 627.
- [89] KH. YA. MULYUKOV, G. F. KORZNIKOVA, R. Z. VALIEV: *Phys. stat. sol. (a)* 125 (1991), 609.

Je lepšie hrať ruletu alebo blackjack?

Filip Guldán, Bratislava

Medzi najčastejšie hrané hry v hazardných herniach patria ruleta a blackjack. Medzi týmito dvoma hrami je pre hráča z hľadiska stratégie hry diametrálny rozdiel. Kým v rulete stredná hodnota výhry, resp. prehry hráča vôbec nezávisí od spôsobu jeho hry (napriek existencii množstva rôznych systémov), ale len od výšky vkladu, u hry blackjack je naopak značne ovplyvnená spôsobom jeho hry.

Je všeobecne známe medzi ľuďmi so znalosťami základov pravdepodobnosti, že ak vsadíme v rulete, v priemere získame v každej hre nazad len 36/37 vkladu. Je to dané tým, že na rulete je 37 čísel (1 až 36 a 0), ale vyplácaná výhra pri uhádnutí je len 36-násobok vkladu. Tento istý pomer je zachovaný aj pri všetkých ostatných kombinovaných stávkach. Napríklad šanca uhádnuť pár je 18:37 (0 sa nepočíta v rulete medzi párne čísla), ale výhra je len dvojnásobok vkladu. Hoci bolo vymyslených nesčíslenne veľa systémov, ako vyhrať v rulete, pri regulárnej rulete (kde sú padajúce čísla náhodné, rovnomerne rozložené a kolá sú samozrejme navzájom nezávislé) v dlhodobom priemere vždy prehrávame na každej stávke $1/37 = 2,7\%$ vsadeného vkladu. Z toho vyplýva, že ak sa chceme spofahnúť na svoje šťastie a hrať, nemali by sme hrať príliš dlho, pretože pri dostatočne dlhej hre každý hráč prehrá všetky svoje peniaze, aj keď je výhoda bankára relatívne veľmi malá.

RNDr. FILIP GULDÁN, CSc., pracuje v Ústave aplikovanej kybernetiky, Hanulova 5a, 844 16 Bratislava.

Celkom odlišná situácia je pri hre blackjack. Tu šanca na výhru ani zručný matematik na posedenie nevyčíslí a dajú sa len zhruba odhadovať. Pretože blackjack u nás nie je ešte príliš známy, uvedieme najskôr jeho pravidlá.

Hrá sa s väčším množstvom sád bridžových kariet. Každá karta má svoju číselnú hodnotu: dvojka – 2, trojka – 3, . . . , desiatka – 10, J – 10, Q – 10, K – 10 a eso má hodnotu buď 11 alebo 1 podľa okolností. Každý hráč vsadí svoj základný vklad (jeho výška je určená dolnou a hornou hranicou podľa herného poriadku kasína) a bankár rozdá každému hráčovi a tiež aj sebe po jednej karte. Cieľom hry hráča je ťahať ďalšie karty tak, aby súčet jeho kariet nepresiahol 21, ale pritom bol čo najvyšší. Pritom platia nasledovné pravidlá:

1. Celá hra sa hrá s otvorenými kartami.
2. Ak súčet kariet hráča presiahne 21, je „trop“ a prehráva svoj vklad.
3. Po potiahnutí druhej karty hráč môže zdvojnásobiť svoj vklad, ale potom musí potiahnuť ešte jednu kartu a ďalšiu už ťahať nemôže. Toto je jediná možná zmena výšky vkladu počas hry.
4. Eso má základnú hodnotu 11. Ak však hráč alebo bankár prekročia súčet 21, môžu si eso počítať len za 1 bod.
5. Ak hráč dostane druhú kartu rovnakú ako prvú, môže ich „rozdeliť“, pridať základný vklad aj na druhú kartu a hrať s nimi dve samostatné hry. Pri ďalšej rovnakej karte môže toto zopakovať. Výnimkou sú esá, ktoré sa môžu rozdeliť iba raz a v prípade ich rozdelenia už hráč môže ku každému esu potiahnuť len jedinú kartu.

Keď všetci hráči ukončia ťahanie, ťahá bankár, ktorý je obmedzený tým, že ak má menej ako 17, musí vždy ťahať (aj keby mu daný súčet už stačil na výhru) a ak má viac ako 16, už nesmie ťahať (aj keď vidí, že mu jeho súčet na výhru nestačí). Vyhodnotenie hry sa riadi nasledovnými pravidlami:

1. Ak má hráč väčší súčet ako bankár, alebo je bankár „trop“, hráč dostane nazad svoj vklad a navyše vyhráva sumu vo výške svojho vkladu.
2. Ak má hráč menší súčet ako bankár, prehráva svoj vklad.
3. Ak hráč aj bankár majú rovnaký súčet, je remíza a hráč si berie nazad len svoj vklad.
4. Najvyššou hrou je tzv. blackjack, ktorý sa skladá z 2 kariet. Jedna musí mať hodnotu 11 (eso) a druhá 10 (10, J, Q, K).
5. Ak hráč dosiahne blackjack a bankár nie, hráč dostane nazad svoj vklad a navyše vyhráva 1,5 násobok svojho vkladu.
6. Ak hráč dosiahne súčet 21, ale nemá blackjack a bankár má blackjack, hráč prehráva svoj vklad.
7. Ak hráč aj bankár majú blackjack, je remíza.
8. Ak hráč rozdelil rovnaké karty na dve hry a potom dosiahol v niektorej z hier druhou kartou 21, neráta sa to ako blackjack, ale len ako obyčajný súčet 21.

Základný variant pravidiel hry, ktorý sme tu uviedli, sa v súčasnosti používa vo väčšine kasín v strednej Európe, aj keď sa niekde vyskytujú drobné modifikácie obmedzujúce hráča a tým zhoršujúce jeho situáciu.

Z uvedených pravidiel je možné hneď vidieť, že v tejto hre bankár vlastne ani nie je hráčom, ale automatom, ktorý o ničom nerozhoduje, len obracia karty. Dôsledkom

toho potom je, že stredná hodnota výhry hráča závisí jedine od spôsobu jeho hry a že nutne musí existovať optimálna stratégia hráča tejto hry. Posledné dva fakty a navyše jedna stávka boli motívom kompletnej pravdepodobnostnej analýzy blackjacku, ktorej výsledky v tomto článku predkladáme. Čo sa však spočiatku zdalo pomerne ľahko dosiahnuteľné, bolo nakoniec vykúpené vyše 200 hodinami tvrdej matematickej práce — analýzy, zostavovania vzorcov pravdepodobností a numerických výpočtov pomocou kalkulačky. Vo všetkých výpočtoch bol použitý predpoklad, že vyťahnutie ľubovoľnej hodnoty karty je stále rovnako pravdepodobné a má pravdepodobnosť $1/13 = 7,6923\%$.

Tabuľka 1.

Rozdelenie pravdepodobností konečných súčtov bankára pri danej prvej karte (v %)

Konečný súčet Prvá karta	17	18	19	20	21	blackjack	trop	súčet
2	13,9809	13,4907	12,9656	12,4026	11,7993	—	35,3608	99,9999
3	13,5034	13,0482	12,5580	12,0328	11,4700	—	37,3874	99,9998
4	13,0490	12,5938	12,1386	11,6485	11,1233	—	39,4468	100,0000
5	12,2251	12,2251	11,7699	11,3148	10,8246	—	41,6404	99,9999
6	16,5438	10,6266	10,6266	10,1715	9,7163	—	42,3151	99,9999
7	36,8566	13,7797	7,8625	7,8625	7,4074	—	26,2312	99,9999
8	12,8567	35,9336	12,8567	6,9395	6,9395	—	24,4741	100,0001
9	11,9995	11,9995	35,0765	11,9995	6,0824	—	22,8425	99,9999
10	11,1424	11,1424	11,1424	34,2194	3,4501	7,6923	21,2109	99,9999
eso	13,0789	13,0789	13,0789	13,0789	5,3866	30,7692	11,5286	100,0000
—	14,5127	13,9497	13,3464	18,0252	7,2730	4,7337	28,1593	100,0000

Tabuľka 2.

Pravdepodobnosti výskytu jednotlivých čiastkových a konečných súčtov bankára pri prvej karte štvorke (v %)

Súčet čiastkový	Pravdepodobnosť výskytu súčtu	Súčet čiastkový	Pravdepodobnosť výskytu súčtu	Súčet konečný	Pravdepodobnosť výskytu súčtu
4	100,0000	soft 15	7,6923	17	13,0490
6	7,6923	soft 16	0,5917	18	12,5938
7	7,6923	12	12,3490	19	12,1386
8	8,2840	13	13,2990	20	11,6485
9	8,8757	14	37,3988	21	11,1233
10	9,5130	15	11,2816	trop	39,4468
11	10,1957	16	11,6942	súčet	100,0000

Keďže bankár je pri hre vlastne automatom, celkom prvým krokom bolo zostavenie tabuľky pravdepodobností dosiahnutia jednotlivých možných záverečných súčtov ban-

kára (tabuľka 1). V tejto tabuľke sú v stĺpcoch uvedené možné záverečné súčty bankára a v riadkoch sú možné prvé karty bankára. Na príslušných miestach tabuľky je potom pravdepodobnosť toho, že ak bankár dostal ako prvú uvedenú kartu, dosiahne na záver príslušný súčet. Pravdepodobnosti sú kvôli lepšej zrozumiteľnosti uvedené v %. V poslednom riadku je vypočítaná pravdepodobnosť bez podmienky prvej karty. Ako boli tieto hodnoty vypočítané ilustrujeme na príklade, že bankár dostane ako prvú kartu 4. Postupne budeme počítat všetky jednotlivé pravdepodobnosti dosiahnutia čiastkových súčtov a tak zaplniať riadky tabuľky 2. Napríklad súčet 6 je možný len tak, že ďalšia karta bude dvojka. Pravdepodobnosť tejto udalosti je $1/13$, teda 7,6923 %. Rovnakú pravdepodobnosť má aj súčet 7, dosiahnuteľný jedine ako 4 + 3. Súčet 8 už môžeme dosiahnuť ako 4 + 4, ale aj 6 + 2, teda jeho pravdepodobnosť bude $7,6923 + 1/13 \times 7,6923 = 8,2840\%$. Pre súčet 9 máme: $9 = 4 + 5 = 6 + 3 = 7 + 2$, teda jeho pravdepodobnosť bude $7,6923 + 1/13 \times 7,6923 + 1/13 \times 7,6923 = 8,8757\%$. Takto budeme postupovať ďalej a zaplníme postupne kolonky tabuľky 2. Pod označením soft 15 sa nachádza pravdepodobnosť dosiahnutia čiastkového súčtu 15, pričom jedna z kariet je eso, ktoré sa započítava momentálne za 11 bodov. Je zrejmé, že v prípade prvej karty 4 to môže byť potom už len eso. Podobne soft 16 môžeme dostať jedine ako štvorku a 2 esá, z ktorých jedno je za 1 bod a druhé za 11. Rovnakou metódou výpočtu pravdepodobnosti daného súčtu z pravdepodobností všetkých možných predchádzajúcich čiastkových súčtov dostaneme aj ostatné hodnoty v tabuľke 2.

Tabuľka 3.

Stredná hodnota výhry, resp. prehry hráča pri danom dosiahnutom konečnom súčte a príslušnej bankárovej prvej karte (v % zo základného vkladu)

Prvá karta bankára	Konečný súčet hráča							
	do 16	17	18	19	20	21	blackjack	trop
2	-29,2784	-15,2975	+12,1742	+38,6305	+63,9987	+88,2006	+150,0000	-100,0000
3	-25,2252	-11,7218	+14,8298	+40,4360	+65,0268	+88,5296	+150,0000	-100,0000
4	-21,1064	-8,0574	+17,5854	+42,3178	+66,1049	+88,8767	+150,0000	-100,0000
5	-16,7192	-4,4941	+19,9561	+43,9511	+67,0358	+89,1752	+150,0000	-100,0000
6	-15,3698	+1,1740	+28,3444	+49,5976	+70,3957	+90,2835	+150,0000	-100,0000
7	-47,5376	-10,6810	+39,9553	+61,5975	+77,3225	+92,5924	+150,0000	-100,0000
8	-51,0518	-38,1942	+10,5970	+59,3873	+79,1835	+93,0625	+150,0000	-100,0000
9	-54,3150	-42,3155	-18,3165	+28,7595	+75,8355	+93,9174	+150,0000	-100,0000
10	-57,5782	-46,4358	-24,1510	-1,8662	+43,4956	+81,1651	+138,4613	-100,0000
eso	-76,9428	-63,8639	-37,7061	-11,5483	+14,6095	+33,0750	+103,8462	-100,0000
-	-43,6814	-29,1687	-0,7063	+26,5898	+57,9614	+83,2596	+142,8995	-100,0000

Ďalším krokom v našom postupe bolo zostavenie tabuľky 3, kde sú v riadkoch uvedené jednotlivé možnosti prvej bankárovej karty a v stĺpcoch možnosti konečného súčtu

hráča. V poliach tejto matice sú potom uvedené stredné hodnoty výhier resp. prehíer hráča (v % zo základného vkladu) pri danom dosiahnutom konečnom súčte hráča pri príslušnej prvej bankárovej karte. V poslednom riadku tabuľky 3 sú vypočítané hodnoty bez ohľadu na bankárovu prvú kartu.

Hodnoty v tabuľke 3 boli vypočítané priamo pomocou tabuľky 1 a pre objasnenie postupu opäť zvolíme jeden príklad. Predpokladajme, že bankár má štvorku a hráč skončil so súčtom 19. Potom hráč vyhrá v prípade, že bankár bude trop, alebo skončí na 17 alebo 18. Pravdepodobnosť toho je podľa tabuľky 1 $39,4468+13,0490+12,5938 = 65,0896\%$. Pravdepodobnosť remízy je $12,1386\%$ a pravdepodobnosť prehry je $11,6485 + 11,1233 = 22,7718\%$. Stredná hodnota výhry v tomto prípade je potom $65,0896 - 22,7718 = 42,3178\%$ zo základného vkladu.

Tabuľka 4.

Stredná hodnota výhry, resp. prehry hráča pri ťahaní jedinej karty za daného čiastkového súčtu pri príslušnej bankárovej karte — zvýšenie výhry za blackjack neuvažované (v % základného vkladu)

Prvá karta bankára	Konečný súčet hráča								soft
	2-5	6	7	8	9	10	11	12-16	
2	-29,2784	-28,2029	-21,7879	-10,2245	+3,0559	+17,9470	+23,5320	-3,5785	
3	-25,2252	-24,1865	-17,9892	-6,8110	+6,0406	+20,4658	+25,8895	-0,3616	
4	-21,1064	-20,1026	-14,1150	-3,3187	+9,0974	+23,0469	+28,3020	+2,9212	
5	-16,7192	-15,7788	-10,1365	+0,1728	+12,1528	+25,6258	+30,7349	+6,2977	
6	-15,3698	-14,0973	-6,9169	+4,3507	+15,8527	+28,7795	+33,3690	+8,9874	
7	-47,5376	-44,7025	-29,4669	-9,3866	+5,2124	+19,6205	+23,1443	-9,1934	
8	-51,0518	-50,0628	-42,3534	-22,5986	-1,3212	+14,3329	+17,5357	-15,7214	
9	-54,3150	-53,3920	-47,8537	-35,9252	-15,0499	+7,2163	+11,3890	-22,8184	
10	-57,5782	-56,7211	-51,5784	-42,1503	-29,2327	-8,0920	+0,6009	-31,4168	
eso	-76,9428	-75,9367	-69,9003	-58,8336	-45,7547	-31,2553	-26,9941	-52,3828	
-	-43,6814	-42,5650	-35,9102	-23,9365	-9,8187	+7,1856	+13,0237	-16,2704	

Pokračovanie tabuľky na nasledujúcej strane.

Tabuľka 3 môže byť už dobrým orientačným vodítkom pre hráča, avšak ešte ani zďaleka mu neposkytuje návod ako má kedy hrať. Ďalším krokom v tomto našom základnom smere bolo zostavenie tabuľky 4. Riadky sú rovnaké ako v predchádzajúcom prípade, ale v stĺpcoch sú uvedené všetky možné čiastkové súčty hráča, ktorý sa rozhoduje, či má ťahať ešte jednu kartu. Hodnoty tejto matice v príslušnom poličku potom vyjadrujú strednú hodnotu výhry hráča v prípade, že bude ťahať ešte presne jednu kartu. Táto tabuľka bude slúžiť ako neskôr uvidíme ako kritérium pre rozhodovanie hráča, či má duplovať základný vklad alebo nie. Výpočet hodnôt tabuľky opäť ilustrujeme na príklade. Predpokladajme, že hráč má čiastkový súčet 12 a bankár má deviatku. Pri výpočte strednej hodnoty výhry (prehry) hráča pri potiahnutí jedinej

		Čiastkový súčet hráča							
		soft 17	soft 18	soft 19	soft 20	soft 21	12	13	14
Prvá karta bankára									
2		-0,3522	+5,9875	+12,0928	+17,9470	+23,5320	-25,3390	-30,7791	-36,2192
3		+2,7545	+8,8818	+14,7910	+20,4658	+25,8895	-23,3693	-29,1212	-34,8731
4		+5,9326	+11,8501	+17,5576	+23,0469	+28,3020	-21,3537	-27,4224	-33,4912
5		+9,1189	+14,7613	+20,2986	+25,6258	+30,7349	-19,3271	-25,7333	-32,1396
6		+12,8052	+19,0753	+23,9798	+28,7793	+33,3690	-17,0526	-23,5626	-30,0726
7		-0,6880	+10,9973	+15,9916	+19,6205	+23,1443	-25,3357	-29,3712	-33,4068
8		-12,7543	-1,4948	+9,7645	+14,3329	+17,5357	-30,7824	-34,5476	-38,3129
9		-20,0493	-14,5111	-3,6474	+7,2163	+11,3890	-36,8754	-40,3896	-43,9038
10		-28,8454	-23,7028	-18,5601	-8,0920	+0,6009	-44,4696	-47,7328	-50,9961
eso		-49,3646	-43,3282	-37,2917	-31,2553	-26,9941	-59,4773	-61,2509	-63,0246
-		-12,9213	-6,3531	-0,0540	+7,1856	+13,0237	-33,5992	-37,9314	-42,2636

		Čiastkový súčet hráča						
		15	16	17	18	19	20	21
Prvá karta bankára								
2		-41,6593	-47,0994	-53,6151	-62,2439	-72,9077	-85,5230	-100,0000
3		-40,6250	-46,3769	-53,1675	-62,0006	-72,8034	-85,4977	-100,0000
4		-39,5599	-45,6287	-52,7012	-61,7462	-72,6937	-85,4710	-100,0000
5		-38,5458	-44,9520	-52,2986	-61,5260	-72,5992	-85,4481	-100,0000
6		-36,5826	-43,0926	-50,8753	-60,7479	-72,2554	-85,3628	-100,0000
7		-37,4424	-41,4779	-48,3486	-59,1144	-71,5450	-85,1852	-100,0000
8		-42,0781	-45,8434	-50,5977	-59,1051	-71,3657	-85,1490	-100,0000
9		-47,4180	-50,9323	-55,3696	-61,6529	-71,5575	-85,0833	-100,0000
10		-54,2592	-57,5225	-61,6428	-67,4773	-75,0261	-86,0642	-100,0000
eso		-64,798	-66,5718	-69,3515	-74,1434	-80,9473	-89,7635	-100,0000
-		-46,5958	-50,9280	-56,3766	-64,0146	-73,7522	-85,9031	-100,0000

karty využijeme tabuľku 3. Ak dostane hráč jednu z kariet 10, J, Q, K, bude trop a jeho výhra bude -100 %. Pravdepodobnosť tejto udalosti je 4/13. Z rovnakou pravdepodobnosťou 4/13 dostane hráč jednu z kariet A, 2, 3, 4, kedy dosiahne súčtu 13-16 a jeho výhra bude -54,3150 %. S pravdepodobnosťou 1/13 dostane kartu 5, dosiahne súčet 17 a výhru -42,3155 %, s pravdepodobnosťou 1/13 dosiahne súčet 18 a výhru -18,3165 %, atď. Jeho celková stredná hodnota výhry pri potiahnutí jedinej karty teda bude: $4/13(-100,0000) + 4/13(-54,3150) + 1/13(-42,3155) + 1/13(-18,3165) + 1/13(+28,7595) + 1/13(+75,8355) + 1/13(+93,9174) = -36,8754\%$ z vkladu. Keď

porovnáme toto číslo s hodnotou v tabuľke 3 ($-54,3150$), vidíme, že hoci hráč prehráva, ťahať sa oplatí, lebo prehra sa zmenší.

Po zostavení tabuľky 4 sme mali pripravené už všetky podklady, aby bolo možné hľadať optimálnu stratégiu hráča. Vzhľadom odhadovanému rozsahu výpočtov potrebných k určeniu optimálnej stratégie, rozhodli sme sa v prvej fáze rýchlo zrátať najskôr jej aproximáciu, „univerzálnu“ stratégiu hráča takú, pri ktorej sa neberie do úvahy prvá karta bankára, ale len rozloženie pravdepodobností jeho záverečných súčtov. K ďalším výpočtom sme teda využili len posledné riadky z tabuliek 3 a 4. Algoritmus bol pritom taký, že sme postupne vypočítavali strednú hodnotu výhry hráča pri dosiahnutí určitého konečného alebo čiastkového súčtu. Smer výpočtov bol pritom od najvyšších hodnôt súčtov postupne k nižším, takže sme postupne zapíňali riadky 2. stĺpca tabuľky 5. Najprv sme porovnaním tabuliek 3 a 4 zistili, že pri súčtoch 15–21 sa už ťahať neoplatí, takže ich stredné hodnoty výhry sme hneď prepísali

Tabuľka 5.

Stredná hodnota výhry, resp. prehry hráča pri hre univerzálnou stratégiou od dosiahnutého súčtu kariet (v % zo základného vkladu)

Dosiahnutý súčet kariet hráča	Stredná výhra hráča	Dosiahnutý súčet kariet hráča	Stredná výhra hráča	
trop	-100,0000	11	2 karty (dupľ)	+26,0474
blackjack	+142,8995	11	viac ako 2 karty	+14,4020
21	+83,2596	10	2 karty (dupľ)	+14,3712
20	+57,9614	10	viac ako 2 karty	+8,5640
19	+26,5898	10	1 karta	+13,1516
18	-0,7063	9	viac ako 1 karta	-3,9724
17	-29,1687	9	1 karta	-3,0766
16	-43,6814	8	viac ako 1 karta	-14,0713
15	-43,6814	8	1 karta	-11,0721
14	-42,2636	7	viac ako 1 karta	-22,9905
13	-37,8224	7	1 karta	-21,6480
12	-33,0395	6	viac ako 1 karta	-26,0118
soft 17	-11,5430	6	1 karta	-24,6694
soft 16	-13,5363	5	viac ako 1 karta	-24,5735
soft 15	-11,2174	5	1 karta	-23,2311
soft 14	-8,3930	4	viac ako 1 karta	-22,7087
soft 13	-4,7626	4	1 karta	-21,3663
soft 12	-1,1158	3	1 karta	-18,7634
2 esá (delené)	+26,0474	2	1 karta	-16,2178
eso 1 karta	+48,6183	0	začiatok hry	-2,9862

z tabuľky 3. Naopak pri súčte 14 sa oplatí potiahnuť ešte jednu kartu, lebo prehra sa zníži na hodnotu uvedenú v tabuľke 4. Rovnako sa oplatí ťahať aj pri ostatných nižších

súčtoch, ale tu už strednú hodnotu výhry nemôžeme opísať z tabuľky 4, lebo hráč môže ťahať aj viac než jeden raz a teda stredné hodnoty výhier pri danom čiastkovom súčte musíme vyrátať nanovo pomocou pravdepodobností dosiahnutia vyšších súčtov a ich stredných hodnôt výhier. Napríklad strednú hodnotu výhry pre súčet 13 dostaneme: $5/13(-100,0)+1/13(83,2596+57,9614+26,5898-0,7063-29,1687-43,6814-43,6814-42,2636) = -37,8224\%$. Ďalej strednú hodnotu výhry pre súčet 12 dostaneme: $4/13(-100,0)+1/13(83,2596+57,9614+26,5898-0,7063-29,1687-43,6814-43,6814-42,2637-37,8224) = -33,0395\%$. Od normálnych súčtov 12 – 21 musíme rozlíšiť tzv. soft súčty 12 – 21, t.j. také súčty, v ktorých je eso započítané zatiaľ za 11 bodov a kde je ešte prípadná možnosť zmeny jeho hodnoty na 1 pri ďalšom ťahaní. Pri tomto prepočítaní zistíme, že pri soft 18 – 21 sa už neoplatí ťahať, ale napríklad pri ťahaní na soft 17 nám vyjde stredná hodnota prehry $-11,5430\%$, čo je menej ako $-29,1687\%$, ktorá by bola, keby sme už neťahali. Tak isto u nižších soft 12 – 16 nám vždy vyjde, že treba ešte ťahať. Je to spôsobené tým, že u soft súčtov pri potiahnutí nemôže nastať trop. Po výpočte riadkov až po soft 12 sme vlastne už dostali optimálnu stratégiu toho, kedy ešte máme ťahať a kedy už nie. Ťahať treba u normálnych súčtov do 14 včítane, u soft súčtov do 17 včítane.

Ďalej budeme analyzovať prípad čiastkového súčtu 11. Tu musíme rozlíšiť 3 prípady: 11 na 1 kartu (eso), 11 na 2 karty a 11 na 3 a viac kariet. V prvom prípade musíme najskôr uvážiť, čo je výhodnejšie za situácie, že k prvému esu dostaneme druhé. Ak ich nerozdelíme, máme soft 12 a prehru $-1,1158\%$, ak ich rozdelíme máme na každom ese výhru $+13,0237\%$, takže je jasné, že ich treba deliť. Pri analýze druhého a tretieho prípadu dostaneme, že ak ťaháme na 11, stredná hodnota výhry bude $+14,4020$. Ak môžeme potiahnuť len jednu kartu, priemerná výhra bude $+13,0237$. Z toho vyplýva, že pri súčte 11 na 2 karty je výhodné zdvojnásobiť vklad a potiahnuť len jednu kartu — výhra bude $+13,0237 \times 2 = +26,0474\%$.

Obdobnými analýzami a výpočtami postupne zaplníme celú tabuľku 5 a dostaneme nasledovnú univerzálnu stratégiu:

- a) deliť esá a osmičky
- b) dupľovať pri súčtoch 10 a 11
- c) ťahať do 14 (včítane) pri normálnom súčte a do 17 (včítane) pri soft súčte

Nakoniec vyrátame ešte celkovú strednú hodnotu výhry pri dodržiavaní tejto stratégie ako priemer výhier pri jednotlivých samostatných kartách: $4/13(13,1516) + 1/13(48,6183 - 3,0766 - 11,0721 - 21,6480 - 24,6694 - 23,2311 - 21,366318,7634 - 16,2178) = -2,9862\%$.

Keďže pri tejto stratégii máme presne determinovaný spôsob hry hráča bez ohľadu na bankárovu kartu, môžeme si spočítať rozdelenie pravdepodobností konečných súčtov hráča podobným spôsobom ako sme to robili pri výpočte tabuľky 1. Pri počítaní musíme dať pozor na rozdeľovanie hier a dupľovanie, ktoré započítavame ako samostatné hry, takže vo výslednej tabuľke 6 dostaneme ako súčet všetkých pravdepodobností možných zakončení hráča nie 100 %, ale 110,3817, čo nie je chyba, ale presné číslo, iba že sa tu už nejedná o pravdepodobnosti zakončení, ale početnosti zakončení na 100 začatých hier. Pomocou týchto čísel a posledného riadku v tabuľke 3 si teraz

Tabuľka 6.

Priemerné počty konečných súčtov hráča pri hre univerzálnou stratégiou na 100 začatých hier

Konečný súčet hráča	Priemerný počet zakončení hráča
12-16	29,8612
17	12,0853
18	13,1857
19	12,2596
20	17,8364
21	7,4939
blackjack	4,7337
trop	12,9259
súčet	110,3817

môžeme prepočítať strednú hodnotu prehry hráča na jednu začatú hru: $0,298612 \times (-43,6814) + 0,120853 \times (-29,1687) + 0,131857 \times (-0,7063) + 0,122596 \times (+26,5898) + 0,178364 \times (+57,9614) + 0,074939 \times (+83,2596) + 0,047337 \times (+142,8995) + 0,129259 \times (-100,0000) = -2,9861\%$ základného vkladu. Dosiachnutie rovnakého výsledku ako predtým potvrdzuje správnosť našich výpočtov. Tento typ kontroly sme využili aj v ďalších výpočtoch.

Stredná hodnota prehry vo výške približne -3% z vkladu pri tejto stratégii sa nám zdala relatívne dobrá, keďže stratégia neuvažovala vôbec s bankárovou kartou a teda poskytovala ešte značný priestor na vylepšenie. Malá výška prehry istý čas dokonca vzbudzovala nádeje, že by celková stredná hodnota výsledku pri optimálnej stratégii mohla vyjsť kladná a hranie blackjacku v herniach by sa mohlo stať zdrojom príjmov autora. (V takomto prípade by však tento článok určite nevznikol.) Dali sme sa teda do ďalších výpočtov a presne rovnakou metódou ako pri prepočítavaní univerzálnej stratégie sme potom pokračovali vo výpočtoch za predpokladu jednotlivých konkrétnych prvých bankárových kariet, teda pracovali sme s riadkami 1 až 10 tabuliek 3 a 4.

Ako svedčia výsledky výpočtov v tabuľke 7, k obohrávaniu kasín neprišlo, celkový výsledok optimálnej stratégie ostal tesne záporný v hodnote $-0,6271\%$ vkladu. V tabuľke 7 sú v prvom stĺpci uvedené stredné hodnoty výhier hráča pri hre univerzálnou stratégiou v $\%$ na 1 začatú hru pri danej bankárovej karte. V druhom stĺpci je to isté pre optimálnu stratégiu, ktorá je pre každú kartu bankára popísaná v štvrtom stĺpci. V treťom stĺpci sú výsledky počítačovej simulácie hry za použitia optimálnej stratégie, za ktoré ďakujem dr. L. Kálnokimu z nášho ústavu. Simulácia bola vykonaná takým spôsobom, že pre každú možnú prvú kartu bankára boli nagenované všetky možné trojice prvých troch kariet, ktoré by mal ťahať hráč a všetky možné trojice prvých troch kariet, ktoré by mal ťahať bankár. Ak situácia vyžadovala, aby hráč alebo bankár ťahali štvrtú a ďalšiu kartu, táto bola určená generátorom náhodných čísel. Pre každú možnú prvú kartu bankára sa teda simulovalo $13^6 = 4826809$ hier. K simulácii bol vyvinutý vlastný program v jazyku PL/1 a jeho vykonávanie spotrebovalo približne

Tabuľka 7.

Optimálne stratégie a stredné hodnoty výhry, resp. prehry hráča pri danej karte bankára (v % zo základného vkladu)

Prvá karta bankára	Stredná výhra hráča	pri hre univerzálnou stratégiou	pri hre optimálnou stratégiou	počítačová simulácia optimálnej stratégie	Popis optimálnej stratégie
2	+7,9490	+9,0493	+8,9487	deliť A,9,8,7,6,3,2/duplovať 9,10,11 ŕahať do 12, soft do 17	
3	+10,3710	+12,3835	+12,2898	deliť A,9,8,7,6,3,2/duplovať 9,10,11, soft 17-18/ŕahať do 12, soft do 17	
4	+12,8561	+15,8532	+15,7730	deliť A,9,8,7,6,3,2/duplovať 9,10,11 soft 16-18/ŕahať do 11, soft do 17	
5	+15,2981	+19,6575	+19,6052	deliť A,9,8,7,6,4,3,2/duplovať 9,10, 11, soft 14-18/ŕahať do 11, soft do 17	
6	+18,8668	+23,4075	+23,3601	deliť A,9,8,7,6,4,3,2/duplovať 9,10, 11, soft 13-18/ŕahať do 11, soft do 17	
7	+12,2390	+14,4078	+14,5063	deliť A,8,7,3,2/duplovať 10,11 ŕahať do 16, soft do 17	
8	+4,0895	+5,8275	+5,9392	deliť A,9,8/duplovať 10,11 ŕahať do 16, soft do 17	
9	-5,4834	-4,0559	-3,9570	deliť A,9,8/duplovať 10,11 ŕahať do 16, soft do 18	
10	-18,7499	-17,6976	-17,5923	deliť A/neduplovať nič ŕahať do 16, soft do 18	
eso	-40,0074	-33,8919	-33,8327	nedeľiť nič/neduplovať nič ŕahať do 16, soft do 18	
priemer	-2,9862	-0,6271	-0,5924		

10 minút času CPU na počítači IBM 4341 pre každú prvú kartu bankára. Dosiahnuté výsledky sú vo veľmi dobrej zhode s našimi teoretickými výpočtami.

Ak chceme na záver zodpovedať otázku v nadpise nášho článku, musíme potvrdiť, že naše šance na výhru sú lepšie, ak budeme hrať blackjack optimálnou stratégiou namiesto rulety. Hoci v oboch hrách nám pravdepodobnosť ukazuje, že v dlhodobom priemere budeme prehrávať, pri rovnakom základnom vklade budeme pri blackjaku prehrávať približne 4 až 5krát pomalšie. Za túto relatívnu výhodu však hráč musí zaplatiť tým, že kým v rulete môže hrať ako chce a nemôže nič pokaziť, v blackjaku si pri optimálnej stratégii musí pamätať množstvo pravidiel a hrať podľa nich. Napriek všetkému naše výsledky hovoria niečo len o všeobecnej tendencii, ku ktorej sa výsledky hry približujú pri dlhodobom mnohonásobnom opakovaní a samozrejme nehovoria nič o konkrétnych jednotlivých hrách, pri ktorých môže hráč vyhrať alebo prehrať ľubovoľné sumy podľa svojho hráčskeho šťastia, čo práve robí hazardné hry vzrušujúcimi.

Po uvoľnení súkromného podnikania sa aj u nás objavilo množstvo kasín západného typu a náš človek má odrazu tiež možnosť hrať. Každý by si však pritom mal uvedomiť, že hra v kasíne nemôže byť pre hráča prostriedkom na zbohatnutie, ale len občasnou zábavou na spštenie voľného času.

Dodatok

V USA a západnej Európe majú hazardné hry v kasínach dlhoročnú tradíciu. Je preto prirodzené, že hľadanie úspešnej stratégie pre tieto hry bolo cieľom snaženia mnohých matematikov aj nematematikov a na túto tému vzniklo viacero publikácií. Jedným z prvých článkov na serióznej matematickej úrovni o blackjacku bol článok Baldwina a jeho kolegov [1] z roku 1956, kde je popísaná optimálna stratégia pre tzv. „jednobalíčkovú“ hru, ktorá sa hrá len s jedným balíčkom 52 kariet. Tu už platia trochu iné zákonitosti, pretože ak je napr. prvá karta eso, pravdepodobnosť ďalšieho esa sa už neuvažuje $1/13$, ale len $3/51$ a podobne. Pôvodne sa v kasínach hrávala len táto jednobalíčková verzia blackjacku.

Zlepšením Baldwinovho postupu sa preslávil americký matematik Thorp, ktorý vypracoval víťaznú stratégiu založenú na počítaní otočených kariet a identifikovaní situácií, ktoré sú pre hráča výhodné z hľadiska zostávajúceho zvyšku kariet. Táto stratégia však nie je pre obyčajných hráčov, je mimoriadne náročná na pamäť a sústredenie, treba sledovať meniace sa pravdepodobnosti jednotlivých kariet a podľa toho upravovať svoju taktiku. Napriek tomu Thorp svoju stratégiu úspešne vyskúšal v praxi a stal sa postrachom majiteľov amerických kasín. Neskôr, v roku 1966 svoju stratégiu prezentoval aj verejnosti v knižke [2]. Jeho činnosť samozrejme vyvolala poplach medzi majiteľmi kasín a spôsobila viaceré protiopatrenia. Najzásadnejším opatrením bolo zavedenie blackjacku, ktorý sa hrá s väčším počtom sád kariet s tým, že keď sa minie zásoba kariet približne do polovice, karty sa znovu miešajú. Toto takmer úplne vylučuje použitie všetkých metód počítania kariet, pretože len veľmi zriedka nastáva situácia, že vo zvyšku balíka sú pravdepodobnosti ťahania jednotlivých kariet dostatočne vychýlené.

V súčasnej dobe sa vo väčšine herní hrajú len viacbalíčkové hry. Jednobalíčkové hry sú ponúkané len zriedkavo a ak áno, bývajú pre ne určení špeciálni krupiéri, ktorí ostro sledujú spôsob hry hráča a v prípade podozrenia, že sa jedná o hráča, ktorý používa niektorú z metód počítania kariet, hráča jednoducho vykážu z herne.

Jednou z prác, ktorá obsahuje široký prehľad stratégií rôznych autorov (avšak len pre jednobalíčkovú hru), je knižka [3].

L i t e r a t ú r a

- [1] R. R. BALDWIN, W. E. CANTEY, H. MAISEL, J. P. MC DERMOTT: The Optimum Strategy in Blackjack, *Journal of the American Statistical Association* 51 (1956), 429–439.
- [2] E. O. THORP: *Beat the Dealer*, Random House, New York, 1966.
- [3] L. B. DUBEY: *No Need to Count*, Barnes and Company, New York, 1980.