Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Simon G. Gindikin

Komplexní vesmír Rogera Penrose

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 31 (1986), No. 2, 83--95

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138676

Komplexní vesmír Rogera Penrose

S. G. Gindikin, Moskva

Původní myšlenkou, stojící u zrodu twistorové teorie Rogera Penrose je možnost uvažovat body čtyřrozměrného prostoročasu (Minkowského nebo Euklidovského) jako přímky v trojrozměrném komplexním prostoru – prostoru twistorů. Nebylo náhodou, že R. Penrose nazval svou přednášku na Mezinárodním matematickém kongresu v Helsinkách „Komplexní geometrie reálného světa".

V jistém smyslu Penrosova myšlenka nebyla nová: komplexní realizaci Minkowského prostoru je možno nalézt (nepříliš skrytou) již v teorii symetrických prostorů Elié Cartana. Hlavní význam této myšlenky netkví jen v samotné geometrické skutečnosti, ale v tom, že tato skutečnost je zdrojem řady analytických konstrukcí – integrálních reprezentací pro řešení některých důležitých lineárních i nelineárních rovnic matematické fyziky. Počáteční nedůvěru k Penrosovu přístupu pomáhaly postupně překonávat významné nové výsledky dosažené pomocí twistorové teorie (například pro instantonová řešení Yangových-Millsových rovnic nebo pro samoduální řešení Einsteinovy rovnice). Je třeba podotknout, že k odvození těchto výsledků bylo nutné použít obecný a složitý matematický aparát (fibrované prostory nad projektivními prostory, Cauchy-Riemannovu kohomologii atd). Shodou okolností byl potřebný aparát vytvořen ve vhodném tvaru v algebraické geometrii a v teorii funkcí více komplexních proměnných.

Vraťme se zpět k Penrosově geometrické myšlence. Co se na ní zdá být neobvyklé, je skutečnost, že se používá komplexních čísel pro studium čistě reálného objektu – prostoročasu. Geometrům druhé poloviny 19. století by to však připadalo naprosto přirozené. Penrosova konstrukce je totiž založena na myšlence staré více než sto let, v posledních desetiletích neprávem opomíjené. Jde o myšlenku Julia Plückera (1801 až 1868), který zkoumal prostor, jehož prvky (body!) jsou přímky v standardním trojrozměrném prostoru. Plücker na tomto tématu pracoval několik let a výsledky, které získal byly uveřejněny v článku *Nová geometrie prostoru, jehož body jsou přímky*, který po jeho smrti vydali Klein a Clebsch. Prostor přímek v trojrozměrném prostoru má dimenzi 4 a je to pravděpodobně první čtyřrozměrný prostor, který se vyskytl ve vědě. Je poněkud zvláštní, že v období, kdy se čtyřrozměrné variety staly módní v teorii relativity, nikdo neporovnal Minkowského prostoročas s Plückerovou varietou popsanou o padesát let dříve. To je to, co v jistém smyslu udělal po dalších padesáti letech Penrose,

---

S. G. Gindikin: *The Complex Universe of Roger Penrose.* The Mathematical Intelligencer Vol. 5 (1983), No. 1, 27—35. Přeložili Jarolím Bureš a Vladimír Souček.

a to s velkým úspěchem. Pokusme se popsat tuto cestu od Plückera k Minkowskému. Nejprve ale musíme připomenout události ještě dřívější.

„Zlatý věk geometrie“

Takto nazývá N. Bourbaki 19. století, století rozkvětu projektivní geometrie s její skvělou geometrickou intuicí a mocnými analytickými metodami. Vedoucí roli projektivní geometrie v geometrii 19. století nelze popřít. Typický je například fakt, že mnoho matematiků akceptovalo neeukleidovskou geometrii až na základě její realizace pomocí projektivní geometrie (tj. v Kleinově interpretaci). Ale projektivní geometrie (také nazývaná „nová geometrie“) byla zavedena mnohem dříve.

Gerard Desargues (1593–1662), architekt z Lyonu, vydal v roce 1639 knihu s názvem *První náčrt pokusu porozumět průnikům kužele a roviny.* Desargues rozvinul teorii perspektivy a studoval centrální promítání jedné roviny na druhou. Povšiml si, že v první rovině existují body, které se nikam nezobrazí a že v druhé rovině jsou body, které neleží v obrazu první roviny. Rozhodl se tuto situaci zlepšit zavedením ideálních bodů, bodů „v nekonečnu“. (Dále o nich v souladu s užívanou českou terminologií budeme hovořit jako o nevlastních bodech – pozn. překl.) V moderní řeči jde o myšlenku, že všechny rovnoběžné přímky se „protínají“ v jednom bodě, nevlastním bodě, a že všechny nevlastní body roviny tvoří nevlastní přímku, kterou je třeba přidat k původní rovině. V takto rozšířené (projektivní) rovině jsou všechna tvrzení o rovnoběžných přímkách speciálními případy obvyklých tvrzení o průsečících dvou přímek, která lze pak vyslovit bez jakýchkoli omezení (libovolné dvě různé přímky se protínají v jediném bodě, který ovšem může být nevlastním bodem). Desargues nebyl však schopen vysvětlit ideje projektivní geometrie tak, aby byly jiným pochopitelné.

Mezi členy Mersennské skupiny – což byl zárodek budoucí Akademie – Desargues nalezl jen jediného žáka. Byl jím 16letý Blaise Pascal (1623–1662), který dokázal významnou větu o šestiúhelníku vepsaném do kuželosečky. Metody projektivní geometrie umožnily Pascalovi redukovat obecný případ na případ kružnice, protože přímo podle definice je libovolná kuželosečka obrazem kružnice při středové projekci.

Desarguovým a Pascalovým cílem bylo pomocí projektivní geometrie popsat Appolloniovu teorii kuželoseček, což byl vrchol geometrie ve starém Řecku. Již jistou dobu se totiž evropští matematici – nepopíratelní mistři v algebře a analýze – pokoušeli překonat staré Řeky na jejich vlastní půdě, v geometrii. Desarguovi a Pascalovi se to podařilo, ale bohužel ostatním byly Desarguovy práce nesrozumitelné a také Pascal nikdy nedokončil zamýšlený úplný výklad projektivní geometrie a zanechal po sobě pouze malý zlomek – větu o šestiúhelníku. Jejich práce byla zapomenuta a objevena znovu až po 200 letech díky Michelu Chaslesovi (1793–1880). Většina jejich výsledků už byla mezitím znovu objevena.

Nový rozvoj projektivní geometrie začal pracemi Gaspara Mongea (1776–1818) a jeho žáků. Mezi nimi význačné místo zaujímal Victor Poncelet (1788–1867). Felix Klein (1849–1925) tvrdil, že v Ponceletově díle se objevuje nový typ geometrického myšlení – „projektivní způsob myšlení“. Během svého zajetí v Saratově (v době po Napoleonově tažení do Ruska v roce 1812) Poncelet povolil uzdu své geometrické fantazii a seznámil své kolegy v zajetí, studenty G. Mongea z Polytechniky, se svými novými objevy. Tiskem vyšly jeho výsledky až po deseti letech pod názvem *Pojednání o projektivních vlastnostech obrazců*. Vzhledem k jeho vojenské a státní službě, vyučování, studiu opevnění a teorie mechanismů (jmenujme například Ponceletovo vodní kolo) se už nikdy nevrátil k systematickému studiu geometrie. Teprve na sklonku svého života se ke geometrii vrátil, litoval, že se nemůže věnovat matematice soustavně a že projektivní geometrie není využívána tak, jak by si zasloužila. Litoval též, že Chasles připomněl Desargua dosti povrchně.

Poncelet vycházel z poznatku, že v projektivní rovině žádné dvojice přímek nemají význačnou vzájemnou polohu a usoudil, že podobně by žádné dvě křivky druhého stupně neměly mít význačnou vzájemnou polohu. Ale proč se pak elipsy obvykle protínají ve čtyřech bodech zatímco kružnice, jejich speciální případ, vždy jen ve dvou bodech. Poncelet našel odpověď na tuto otázku: Všechny kružnice procházejí dvěma pevnými body (které se nazývají cyklickými body). Tyto body jsou ovšem imaginární a nevlastní body. Tak se v reálné geometrii objevují komplexní čísla (nedlouho předtím se začala komplexní čísla používat v algebře). Cyklické body se staly základními geometrickými objekty, ukázalo se, že jsou odpovědné za všechny jevy související s reálnou metrikou v rovině.

Jiný ohromující Ponceletův objev byl princip duality (objevil ho spolu s Josephem Gergonem (1771–1859)), nová procedura pro tvoření geometrických vět. Zhruba řečeno tento princip tvrdí, že jestliže v jakémkoli správném tvrzení o vzájemné poloze přímek a bodů v projektivní rovině vzájemně zaměníme slova „přímka“ a „bod“, pak po nezbytné gramatické úpravě dostaneme nové správné tvrzení. Nejjednodušším příkladem může být tvrzení „každé dvě různé přímky se protínají v jediném bodě“, které se takto změní na tvrzení „každými dvěma různými body prochází jediná přímka“.

V období, které pak následovalo, se projektivní přístup stal nejobvyklejší metodou geometrie. Přesto však po dlouhou dobu byla projektivní ideologie považována jen za jakousi černou skříňku, umožňující vyrábět nová tvrzení v euklidovské geometrii. Nevlastní prvky byly považovány za cizí, ideální body, které pouze zjednodušují úvahy (podobně byla kdysi chápána i komplexní čísla). Konzistentní projektivní přístup však vyžaduje považovat vlastní i nevlastní body za rovnocenné; studium vlastností křivek v nevlastních bodech (asymptoty a podobné pojmy) by například nemělo být důležitější než studium křivek v kterémkoliv jiném bodě.

V té době geometři diskutovali zásadní koncepční otázky. Povšimněme si zejména německé geometrie poloviny 19. století, tj. období skvělých geometrů jako byli Ferdinand Möbius (1790–1868), Julius Plücker, Jacob Steiner (1796–1863) a Cristian von Staudt (1796–1867). Tvořili uprostřed prudké bitvy mezi „analytickým“ a „syntetickým“ přístupem [2], i když z dnešního hlediska nám tyto jejich spory nepřipadají o nic důležitější než spory postav Swiftových knih (diskutující o tom, z které strany se má začít jíst vejce). Analytikové dávali přednost souřadnicovému popisu geometrických útvarů, protože jim to umožňovalo používat metody algebry a analýzy, zatímco syntetikové tvrdili, že tyto metody zbavují geometrii jejího skutečného ducha, opravdové geometrické intuice.

Jedním z nejaktivnějších syntetiků byl Steiner, který se narodil na venkově a do svých 19 let jezdil s pluhem. Pak se stal žákem a později kolegou proslulého učitele Pestalozziho, který mimochodem přikládal největší význam vizuálním metodám vyučování. Teprve později se začal Steiner věnovat matematice. Měl neobyčejně vyvinutou geometrickou intuici. Tok jeho prostorových představ nebylo možno nakreslit. Proto se Steiner vzdal kreslení jakýchkoli obrázků během svých přednášek a dokonce přednášel v zatemněné místnosti, aby pomohl studentům se soustředit. Steiner obzvlášť důrazně bojoval proti komplexním číslům – těmto „duchům království stínů v geometrii" – které byly běžně užívány analytiky. Klein tvrdil, že to byl pravděpodobně nedostatek Steinerovy tolerance, který přinutil Plückera (který byl typický analytik) vzdát se dočasně studia geometrie a vrátit se k němu až po Steinerově smrti.

Projektivní souřadnice

Analytici především usilovali o zavedení souřadnic do projektivní roviny tak, aby byly popsány dohromady vlastní i nevlastní body. Zásadní konstrukci (homogenní souřadnice) navrhl Plücker. Body v projektivní rovině $\mathbf{P}^2$ popisoval ne dvěma, ale *třemi* čísly $(x_0, x_1, x_2) \neq (0, 0, 0)$ za předpokladu, že trojice, které se liší společným násobkem $\lambda \neq 0$, popisují týž bod roviny. Pak můžeme například předpokládat, že body s $x_0 = 0$ jsou „vlastní" a u těchto bodů položit $x_0 = 1$ a dostaneme jejich popis ve tvaru $(1, X_1, X_2)$, kde $X_1 = x_1/x_0$ $X_2 = x_2/x_0$ jsou nehomogenní (kartézské) souřadnice. Body s $x_0 = 0$ vytvářejí nevlastní přímku. Ovšem výběr této přímky byl náhodný. Projektivní transformace roviny zobrazující přímky na přímky odpovídají lineárním transformacím homogenních souřadnic. Přímky v projektivní rovině jsou určeny rovnicemi tvaru $\xi_0 x_0 + \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 = 0$, kde $(\xi_0, \xi_1, \xi_2) \neq (0, 0, 0)$ jsou určeny až na skalární násobek. Tento fakt umožnil Plückerovi považovat (ξ_0, ξ_1, ξ_2) za homogenní souřadnice přímek, což znamená, že přímky vytvářejí jinou (duální) projektivní rovinu. Tato interpretace umožňuje jednoduše vysvětlit Ponceletův-Gergonův princip duality. Při použití homogenních souřadnic je snadné porozumět Ponceletově větě o protínání kružnic, zatímco syntetická varianta vyžaduje vysokou geometrickou intuici. Rovnice kružnic v nehomogenních souřadnicích jsou $X_1^2 + X_2^2 + aX_1 + bX_2 + c = 0$, v odpovídajících homogenních souřadnicích jsou

$$x_1^2 + x_2^2 + ax_1x_0 + bx_2x_0 + cx_0^2 = 0 .$$

Je zřejmé že všechny tyto křivky obsahují dvojici $(0, 1, \mathrm{i})$, $(0, 1, -\mathrm{i})$ a tyto body jsou nevlastní a imaginární ($\{x_0 = 0\}$ je nevlastní přímka).

V trojrozměrném projektivním prostoru $\mathbf{P}^3$ je popsán bod čtveřicí čísel $(x_0, x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0, 0)$, určenou až na násobek. Můžeme předpokládat, že $\{x_0 = 0\}$ je nevlastní rovina. Roviny jsou určeny rovnicemi $x_0\xi_0 + \ldots + x_3\xi_3 = 0$, je tedy také dualita mezi projektivním prostorem bodů a projektivním prostorem rovin.

Varieta přímek (Plückerovy souřadnice)

Další přirozený problém, který vzbudil Plückerovu pozornost, byl problém, jak popsat systém přímek v $\mathbf{P}^3$. Ukázalo se, že na rozdíl od rovin (a od přímek v rovině) obdržíme zde zcela nový geometrický útvar. Varieta přímek v $\mathbf{P}^3$ je čtyřparametrický útvar. V kartézských souřadnicích X_1, X_2, X_3 jsou skoro všechny přímky určeny rovnicemi tvaru $X_1 = \alpha_1 X_3 + \beta_1$, $X_2 = \alpha_2 X_3 + \beta_2$. Takto nezachytíme přímky, které jsou rovnoběžné s osou X_1 a přímky v nevlastní rovině.

Plücker chtěl zavést souřadnice, které by popisovaly systém všech přímek. Postupoval takto: Každá přímka je určena dvojicí svých různých bodů, tj. v homogenních souřadnicích v $\mathbf{P}^3$ body $x = (x_0, \ldots, x_3)$ a $\tilde{x} = (\tilde{x}_0, \ldots, \tilde{x}_3)$, kde x a $\tilde{x}$ jsou nezávislé. Takováto dvojice bodů ovšem může být zvolena mnoha různými způsoby. Aby se zbavil této libovůle, Plücker uvažoval výrazy

$$p_{ij} = x_i \tilde{x}_j - \tilde{x}_i x_j\,, \tag{1}$$

které již nezávisejí na volbě bodů. Zřejmě platí $p_{ii} = 0$, $p_{ij} = -p_{ji}$. Šestici čísel p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{12}, p_{13}, p_{23} budeme nazývat *Plückerovými souřadnicemi přímky.* Protože body byly dány homogenními souřadnicemi, množiny $\{p_{ij}\}$ a $\{\lambda p_{ij}\}$ odpovídají stejné přímce. Kdyby všechna čísla p_{ij} byla nulová, x a $\tilde{x}$ by byly závislé, což není přípustné. Shrneme-li přechozí úvahy dostaneme, že je přirozené uvažovat nenulové šestice čísel $\{p_{ij}\}$ jako homogenní souřadnice bodu v pětirozměrném projektivním prostoru $\boldsymbol{P}^5$. Takže množinu přímek lze přirozeně vnořit do $\mathbf{P}^5$, ale poněvadž závisí pouze na čtyřech parametrech, musí splňovat ještě nějakou relaci. Není těžké se přesvědčit, že tato relace je rovnice

$$p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12} = 0\,. \tag{2}$$

Podobně se snadno můžeme přesvědčit, že je to jediná relace, která pro množinu přímek musí být splněna (z nenulové množiny $\{p_{ij}\}$ splňující (2) lze určit x a $\tilde{x}$ splňující (1)).

Z geometrického hlediska rovnice (2) definuje kvadriku v $\mathbf{P}^5$. Jestliže provedeme transformaci souřadnic

$$p_{01} = u_0 - u_3\,, \quad p_{23} = u_0 + u_3\,, \quad p_{02} = u_4 - u_1$$
$$p_{13} = u_4 + u_1\,, \quad p_{03} = u_2 - u_5\,, \quad p_{12} = u_2 + u_5$$

rovnice (2) přejde na rovnici

$$u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2 - u_5^2 = 0\,. \tag{2'}$$

Tedy *množina všech přímek v trojrozměrném projektivním prostoru může být vnořena jako kvadrika* (2)–(2′) *do pětirozměrného projektivního prostoru* $\mathbf{P}^5$.

Tento Plückerův objev byl přínosem pro tehdejší matematické uvažování. Ukázal totiž, že zcela odlišné geometrické struktury mohou být izomorfní: zde jsou to varieta přímek v $\mathbf{P}^3$ a jistá kvadrika v $\mathbf{P}^5$. V následujících letech pak nejvýznamnější geometři, Sophus Lie (1842–1899), Felix Klein a Elié Cartan (1869–1951), se zaujetím shromažďovali podobné izomorfismy. Později se zájem přesunul na zkoumání obecných variet a přestala se věnovat pozornost geometrické povaze bodů.

Plückerovy následovníky zajímala především tato otázka: Zkoumejme kvadriky v $\mathbf{P}^5$, jejichž signatura není (3,3) jako v (2'), ale je (4,2) nebo (5,1). Je možné pro tyto kvadriky také najít podobnou geometrickou interpretaci? Sophus Lie zjistil, že na množině všech sfér v trojrozměrném prostoru lze zavést homogenní souřadnice tak, že dostaneme kvadriku signatury (4,2) v $\mathbf{P}^5$ (geometrie Lieových sfér). Felix Klein zavedl jemnější „hexosférické" souřadnice pro body čtyřrozměrného prostoru; body s těmito souřadnicemi odpovídají kvadrice se signaturou (5, 1) v $\mathbf{P}^5$. K tomuto problému se později vrátíme a ukážeme jiný způsob, jak ho řešit.

Při přechodu ke komplexnímu prostoru se setře rozdíl mezi kvadrikami rozdílných signatur, protože násobení komplexní jednotkou i umožňuje zavést souřadnice, v nichž má daná kvadrika rovnici $z_0^2 + \ldots + z_5^2 = 0$. Tento fakt se obvykle vyjadřuje slovy: všechny reálné kvadriky jsou „reálnými formami" jediné komplexní kvadriky. Při přechodu od jedné reálné formy k jiné nás vede logika projektivní geometrie, abychom problém komplexifikovali, tedy přešli do komplexního prostoru.

Komplexifikace

Uvažujme komplexní projektivní prostor $\mathbf{CP}^3$ s homogenními souřadnicemi $z = (z_0, \ldots, z_3)$. Komplexní přímka, která spojuje body $z = (z_0, \ldots, z_3)$ a $\tilde{z} = (\tilde{z}_0, \ldots, \tilde{z}_3)$, sestává z bodů tvaru $\lambda z + \mu \tilde{z}$. Do množiny komplexních přímek v $\mathbf{CP}^3$ lze opět zavést Plückerovy souřqdnice p_{ij}, splňující rovnici (2). Stejně jako předtím lze rovnici (2) převést na rovnici (2'), kde u_j jsou komplexní čísla.

U komplexní kvadriky $Q \subset \mathbf{CP}^5$ definované rovnicí (2') můžeme studovat její reálné formy.*) Zúžením na reálné souřadnice u_j dostaneme případ uvažovaný v předchozí části. Pokud uvažujeme u_0, u_1, u_2 a u_5 reálné a $u_3 = iv_3$, $u_4 = iv_4$ ryze imaginární, nebo $u_3 = iv_3$ ryze imaginární a ostatní u_i reálná, dostaneme reálné plochy (u_i, v_i jsou reálná čísla), které jsou

$$\text{(S)} \qquad u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + v_3^2 + v_4^2 - v_5^2 = 0\,,$$

$$\text{(H)} \qquad u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + v_3^2 - u_4^2 - u_5^2 = 0\,,$$

což je sféra a jednodílný hyperboloid (v homogenních souřadnicích). Protože tyto reálné plochy leží na komplexní kvadrice Q a body kvadriky Q odpovídají komplexním přímkám v $\mathbf{CP}^3$, je přirozené zkoumat množiny přímek, které odpovídají bodům ploch S a H.

---

*) Na první pohled se zdá, že komplexní lineární prostor je komplexifikací kanonického reálného lineárního podprostoru určeného vnořením $\mathbf{R}$ do $\mathbf{C}$. Tento podprostor ovšem závisí na volbě souřadnic. Uvažujme například $\mathbf{C}^n$ jako reálný prostor $\mathbf{R}^{2n}$, na kterém je zadán operátor „násobení komplexní jednotkou i", pak $\mathbf{C}^n$ je komplexifikací prostoru $L \cong \mathbf{R}^n$ (tj. L je reálná forma $\mathbf{C}^n$), právě když $L \cap iL = 0$. Reálná forma komplexního projektivního prostoru může být definována pomocí homogenních souřadnic (tj. pomocí přechodu od $\mathbf{CP}^n$ k $\mathbf{C}^{n+1}$) a reálná forma kvadriky $Q \subset \mathbf{CP}^n$ je pak průnik Q s reálnou formou $\mathbf{CP}^n$.

Interpretace reálné kvadriky pomocí komplexních přímek (případ sféry)

V případě (S) platí vztahy

$$p_{01} = u_0 - iv_3\,, \quad p_{23} = u_0 + iv_3\,, \quad p_{02} = iv_4 - u_1\,, \quad p_{13} = iv_4 + u_1\,,$$
$$p_{03} = u_2 - u_5\,, \quad p_{12} = u_2 + u_5\,.$$

V Plückerových souřadnicích body plochy S splňují vztahy

$$p_{23} = \bar{p}_{01}\,, \quad p_{13} = -\bar{p}_{02}\,, \quad \operatorname{Im} p_{03} = \operatorname{Im} p_{12} = 0$$

a body na (S) jsou těmito podmínkami zcela popsány. Je snadné ukázat, že jestliže přímka s těmito Plückerovými souřadnicemi prochází bodem $z = (z_0, \ldots, z_3)$, prochází také bodem $\tilde{z}$ se souřadnicemi $\tilde{z} = (-\bar{z}_3, \bar{z}_2, -\bar{z}_1, \bar{z}_0)$. Body reálné kvadriky S tedy odpovídají komplexním přímkám v $\mathbf{CP}^3$, spojujícím body z a $\tilde{z}$.

Co je pozoruhodné na těchto přímkách? Každým bodem $z \in \mathbf{CP}^3$ prochází právě jedna takováto přímka. Celý projektivní prostor $\mathbf{CP}^3$ je tedy rozdělen na disjunktní sjednocení neprotínajících se přímek. Toto rozdělení (fibrace) v současné době patří mezi důležité pojmy v matematice a objevilo se v matematice poměrně nedávno, zcela nezávisle na Plückerově postupu. Budeme-li uvažovat průniky zmíněné fibrace s reálným projektivním prostorem $\mathbf{P}^3$, dostaneme rozklad $\mathbf{P}^3$ do přímek spojujících dvojice bodů $(x_0, \ldots, x_3)$ a $(-x_3, x_2, -x_1, x_0)$. Ve „školské" terminologii zde máme rozklad obyčejného trojrozměrného prostoru do vzájemně mimoběžných přímek (takto byl formulován tento problém na Moskevské matematické olympiádě v roce 1979).

Ztotožnění sféry S s bází tohoto fibrovaného prostoru je první z hlavních konstrukcí twistorové teorie.

Realizace hyperboloidu jako systému křivek

V případě (H) dostaneme v Plückerových souřadnicích vztahy

$$p_{23} = \bar{p}_{01}\,, \quad \operatorname{Im} p_{13} = \operatorname{Im} p_{03} = \operatorname{Im} p_{12} = \operatorname{Im} p_{02} = 0 \tag{4}$$

Řešit tento případ je obtížnější. Pro jednoduchost předpokládejme nejprve, že $p_{03} \neq 0$. Protože pracujeme s homogenními souřadnicemi, můžeme dokonce předpokládat, že $p_{03} = 1$ a hledat na příslušných přímkách body se souřadnicemi $z_0 = \tilde{z}_3 = 1$, $z_3 = \tilde{z}_0 = 0$. Tyto body jsou jednoznačně určeny. Ze vztahu (4) plyne, že je pak $z = (1, a, c, 0)$, $\tilde{z} = (0, \bar{c}, b, 1)$, kde a a b jsou reálná čísla. Co je pozoruhodné na přímkách spojujících tyto dva body? Přímým výpočtem se snadno zjistí, že všechny body takovéto přímky (tj. body tvaru $w = \lambda z + \mu \tilde{z}$, kde $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$) splňují podmínku

$$\operatorname{Im}(w_1 \bar{w}_0 + w_2 \bar{w}_3) = 0\,. \tag{5}$$

Vynecháme-li podmínku $p_{03} \neq 0$, zjistíme, že neexistují žádné další přímky, jejichž všechny body splňují podmínku (5). Rovnicí (5) je definována v $\mathbf{CP}^3$ plocha N reálné dimenze 5 taková, že všechny komplexní přímky, které leží v N, jsou ty přímky, jejichž

Plückerovy souřadnice vyhovují (4), tj. ty přímky, které odpovídají bodům reálné plochy H. Plocha N obsahuje celý reálný projektivní prostor $\mathbf{P}$. Poznamenejme, že z dimenzionálních důvodů by systém komplexních přímek závisící na 4 reálných parametrech měl obecně vyplnit celý $\mathbf{CP}^3$. Dá se tedy očekávat, že N bude mít nějaké pozoruhodné vlastnosti. Skutečně, prostor N je jediná (až na projektivní transformaci) zakřivená plocha v $\mathbf{CP}^3$, která obsahuje čtyřparametrický systém komplexních přímek.

Tento výsledek má analogii i v reálném případě. Existuje mnoho ploch (přímkové plochy) v trojrozměrném prostoru, které obsahují jednoparametrickou soustavu přímek, ale pouze jednodílný hyperboloid obsahuje dvě takové soustavy (mezi plochami s nenulovou křivostí má tuto vlastnost ještě hyperbolický parabolid, z projektivního hlediska je však tato plocha ekvivalentní s jednodílným hyperboloidem).

Celkově vypadá situace takto: Vyšli jsme z kvadriky reálných přímek v $\mathbf{P}^3$ a pak přešli ke kvadrice komplexních přímek v $\mathbf{CP}^3$. Mezi reálné kvadriky, které leží v této komplexní kvadrice, náleží varieta všech reálných přímek a dva další typy variet. Variety prvního typu odpovídají rozkladům $\mathbf{CP}^3$ do komplexních přímek, zatímco variety druhého typu odpovídají pětirozměrným reálným varietám v $\mathbf{CP}^3$ obsahujícím systém komplexních přímek závislý na čtyřech parametrech. Tento příklad dobře ilustruje jev, který byl výsledkem usilovné práce geometrů 19. století. Především: reálné objekty mají často vhodnou interpretaci pomocí komplexních objektů, a když uvažujeme komplexifikaci reálného problému a pak zkoumáme jiný reálný problém. mající stejnou komplexifikaci, často získáme nové zajímavé geometrické problémy.

Metrika na varietě přímek

Plücker a jeho následovníci pečlivě zkoumali geometrii variety přímek $Q \subset \mathbf{CP}^3$. Popsali, jak je možno převést různé geometrické údaje z původního prostoru $\mathbf{CP}^3$ na kvadriku Q. Bodům v $\mathbf{CP}^3$ takto odpovídají dvourozměrné plochy v Q těch přímek, které těmito body procházejí, rovinám v $\mathbf{CP}^3$ odpovídají dvourozměrné plochy v Q těch přímek, které v příslušných rovinách leží (takto získáme dva systémy dvourozměrných podprostorů na kvadrice Q – generátorů Q).

Opačný postup byl také užitečný: v $\mathbf{CP}^3$ byly zkoumány systémy přímek, jejichž Plückerovy souřadnice splňovaly jednu relaci (komplexy) nebo dvě relace (kongruence). Předveďme si na ukázku řešení jednoho typického problému.

Přímky v trojrozměrném prostoru se mohou někdy protínat. Dá se ale tento případ popsat pomocí Plückerových souřadnic? Lze ukázat, že jsou-li $\{p_{ij}\}$ a $\{p'_{ij}\}$ Plückerovy souřadnice dvou přímek, tyto přímky se protínají, právě když

$$(6) \qquad p_{01}p'_{23} - p_{02}p'_{13} + p_{03}p'_{12} + p_{23}p'_{01} - p_{13}p'_{02} + p_{12}p'_{03} = 0 .$$

Abychom se nemuseli zabývat determinanty čtvrtého řádu, odvodíme vztah (6) za zjednodušujícího předpokladu $p_{03} \neq 0$ a $p'_{03} \neq 0$. Pak můžeme předpokládat, že $p_{03} = p'_{03} = 1$ a přímky jsou určeny body $(1, \alpha_1, \alpha_2, 0)$ a $(0, \beta_1, \beta_2, 1)$, resp. $(1, \alpha'_1, \alpha'_2, 0)$, $(0, \beta'_1, \beta'_2, 1)$ (jinak řečeno, přešli jsme k nehomogenním souřadnicím). Body přímky

p splňují rovnice $z_1 = \alpha_1 z_0 + \beta_1 z_3$, $z_2 = \alpha_2 z_0 + \beta_2 z_3$, body přímky p' rovnice $z_1 = \alpha'_1 z_0 + \beta'_1 z_3$, $z_2 = \alpha'_2 z_0 + \beta'_2 z_3$. Tyto dvě přímky se protínají, právě když existuje společné nenulové řešení odpovídajícího systému těchto čtyř rovnic nebo ekvivalentně systému dvou rovnic o dvou neznámých

$$\begin{aligned} z_0(\alpha_1 - \alpha'_1) + z_3(\alpha_2 - \alpha'_2) &= 0\,, \\ z_0(\beta_1 - \beta'_1) + z_3(\beta_2 - \beta'_2) &= 0\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Přímky p a p' se tedy protnou, právě když číslo

$$\varrho(\alpha, \beta; \alpha', \beta') = (\alpha_1 - \alpha'_1)(\beta_2 - \beta'_2) - (\alpha_2 - \alpha'_2)(\beta_1 - \beta'_1) \tag{8}$$

je rovno nule. Při pohledu na výraz na pravé straně moderní matematik by pravděpodobně měl neodolatelnou chuť ho nazvat „vzdáleností“ p a p'. Číslo ϱ sice pro některé dvojice p, p', $p \neq p'$ může být nula a obecně je to komplexní číslo, geometři 19. století by však na tom neviděli nic zvláštního. Klein vzpomíná [2], že s oblibou používali takové přímky, jejichž všechny body měly mezi sebou nulovou vzdálenost (izotropní neboli nulové přímky). Lie nazýval takovéto přímky „bláznivé“ a tvrdil, že „francouzští geometři užívali tyto přímky, aby vykouzlili důkazy z ničeho“. V současné době již nepovažujeme tyto přímky za nic neobvyklého.

Nazvěme tedy číslo ϱ *vzdáleností* mezi přímkami $p = (\alpha, \beta)$ a $p' = (\alpha', \beta')$. Vzdálenost ϱ je rovna nule, pokud se přímky protínají. Touto podmínkou je vzdálenost charakterizována téměř úplně. Přesněji řečeno, vzdálenost je určena až na konformní násobek. To znamená, že v okolí libovolného pevně zvoleného bodu jsou úhly a poměry vzdáleností určeny až na odchylku, která je malá ve srovnání se vzdáleností od tohoto pevně zvoleného bodu.

Pro každý bod $p \in Q$ označme V_p množinu bodů, které mají od p nulovou vzdálenost, tj. $V_p = \{p' | (p, p') = 0\} = \{p' |$ přímky p a p' se protínají$\}$. Množina V_p se obvykle nazývá *izotropický kužel*, je průnikem kvadriky Q s tečnou rovinou ke Q v bodě p.

Vzdálenosti na S a H

Zkoumejme, jak vypadá zúžení vzdálenosti ϱ na S. I zde se omezíme jen na body, pro něž je $p_{03} = 1$. Ze vztahu (3) máme pro tyto body rovnosti $\beta_1 = \bar{\alpha}_2$, $\beta_2 = -\bar{\alpha}_1$, takže za souřadnice na S můžeme vzít čísla (α_1, α_2). Dostaneme

$$\varrho_S(\alpha, \alpha') = |\alpha_1 - \alpha'_1|^2 + |\alpha_2 - \alpha'_2|^2\,. \tag{9}$$

Takto definovaná vzdálenost ϱ_S nemá žádný z nedostatků obecné vzdálenosti ϱ, je nedegenerovaná, je rovna nule jen pro $\alpha = \alpha'$ v souladu s tím, že přímky odpovídající bodům S se neprotínají. Takže jako výsledek dostaneme obvyklou euklidovskou vzdálenost na čtyřrozměrné sféře v pětirozměrném euklidovském prostoru.

Dále zúžíme vzdálenost ϱ na hyperboloid H a omezíme se opět na body, pro něž je $p_{03} = 1$. Tuto množinu označme M. Ze vztahu (4) plyne, že α_1 a β_2 jsou reálná čísla a platí $\beta_1 = \bar{\alpha}_2$. Po substituci $\alpha_1 = t - x_1$, $\beta_2 = t + x_1$, $\beta_1 = x_2 + ix_3$ (kde t, x_1, x_2, x_3 jsou reálná čísla) vztah (8) přejde do

$$(10) \qquad \varrho_H(t, x, t', x') = (t - t')^2 - (x_1 - x'_1)^2 - (x_2 - x'_2)^2 - (x_3 - x'_3)^2 .$$

Takto dostaneme Minkowského vzdálenost (je reálná, ale není pozitivně definitní). Průnik kužele V_p v bodě $p \in M$ s M je pak *světelný kužel* s vrcholem v p. Vidíme tedy, že vzdálenost p na kvadrice Q, která je odvozena přirozeným způsobem z geometrie přímek, indukuje na sféře S euklidovskou vzdálenost a na hyperboloidu H Minkowského vzdálenost.

Body množiny $M \subset H$ odpovídají přímkám na N, které neprotínají přímku $z_0 = z_3 = 0$. Varieta H hraje důležitou roli v teoretické fyzice: H je konformní rozšíření Minkowského prostoru M. Dá se vytvořit z M přidáním světelného kužele „v nekonečnu" (podobně euklidovský prostor může být rozšířen přidáním jediného bodu, projektivní prostor přidáním celé „nevlastní" roviny).

Uvažujme projektivní transformace prostoru $\mathbf{CP}^3$ zachovávající N. Tyto transformace převádějí přímky ležící v N opět v přímky ležící v N a dvojice protínajících se přímek opět na dvojice protínajících se přímek.

Na prostoru H z těchto transformací získáme transformace permutující světelné (tečné) kužely V_p, a tím získáme i všechny konformní transformace Minkowského prostoru (posunutí, stejnolehlosti, inverze). Vůči těmto transformacím jsou často invariantní ty vztahy teoretické fyziky, které popisují nehmotná pole. Poincarého grupu získáme, omezíme-li se na transformace, které zachovávají přímku $z_0 = z_3 = 0$. Platí tedy, že geometrie Minkowského prostoru může být odvozena z Plückerovy geometrie prostoru přímek.

Je možné postupovat také opačným směrem? Je možné vyjít z Minkowského prostoru a najít pomocný trojrozměrný prostor (Penrosův prostor twistorů), jehož přímky by odpovídaly bodům Minkowského prostoru? Pro řešení tohoto problému můžeme využít kužele V_p. Stačí si totiž uvědomit, že body kuželu V_p odpovídají těm přímkám, které protínají přímku p. Všechny přímky, které odpovídají bodům z téže generující přímky (světelného paprsku) kuželu V_p, protínají přímku p v témže bodě. Vzájemně si tedy odpovídají body množiny N a světelné paprsky v H. V komplexifikaci si body $\mathbf{CP}^3$ odpovídají s komplexními světelnými paprsky v Q (tj. s jednou třídou dvourozměrných generátorů kuželu V_p).

Poznámka o analytických aplikacích

Účinnost výše popsaného geometrického přístupu je mimo pochybnost. Je to však, jak již bylo řečeno, pouze základ pro nové analytické konstrukce. Bohužel o tomto tématu je možné zde udělat pouze stručnou poznámku. Základní Penrosova myšlenka je, že objektům (polím) matematické fyziky na čtyřrozměrné varietě M (v eukleidovském případě na S) odpovídají ekvivalentní objekty na N nebo $\mathbf{CP}^3$. Hypotézou pak je, že popis na twistorovém prostoru bude jednodušší než popis na M nebo S. A skutečně mnoho rovnic matematické fyziky lze popsat jako podmínku toho, že příslušné pole na M nebo na S odpovídá při výše uvedené korespondenci nějakému vhodnému objektu na twistorovém prostoru.

Obecněji je možno říci, že mnohé diferenciální rovnice jsou v podstatě vztahy, které vznikají při přechodu (pomocí integrálních transformací) k varietám vyšších dimenzí. Tento přístup je důležitý a v současnosti ještě málo využívaný zdroj informací o diferenciálních rovnicích a o jejich řešeních. V nejjednodušším případě, který byl popsán Fritz Johnem, integrujeme funkce definované na trojrozměrném (reálném) prostoru přes přímky a jako výsledek obdržíme funkce definované na čtyřrozměrném prostoru všech přímek, které jsou navíc řešeními (ultrahyperbolické) diferenciální rovnice 2. řádu. Penrose a po něm další se setkali s podobnou situací v složitějším, komplexním případě. V těchto případech bylo nutné nahradit funkce kohomologiemi s koeficienty ve vhodných svazcích.

Přechod od M nebo S k $\mathbf{CP}^3$ vede na jednodušší, klasičtější rovnice. Jde ve skutečnosti o variantu Cauchyových-Riemannových rovnic teorie holomorfních funkcí. Tímto postupem se zkoumají nejen některé lineární rovnice matematické fyziky (Diracova-Weylova, Maxwellova a linearizovaná Einsteinova rovnice), ale dokonce i některé nelineární rovnice (Yangovy-Millsovy), jejichž přehled lze nalézt v [4], [5].

Křivočaré twistory a Einsteinova rovnice

Základní úlohu v obecné teorii relativity má zakřivený prostoročas. Na čtyřrozměrné (reálné) varietě X se zavádí metrika $ds^2 = \sum g_{ij}(x)\, dx^i\, dx^j$, kterou lze v každém bodě x převést na tvar $dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2$ (v případě Minkowského signatury (3, 1)) nebo na tvar $dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + d_3^2x$ (v případě euklidovské signatury (4, 0)). Riemannova křivost vyjadřuje odchylku od rovné metriky, kterou lze převést na kanonický tvar $dx_0^2 \pm dx_1^2 \pm dx_2^2 \pm dx_3^2$ globálně na celé varietě. Jde o problém nalezení ortogonální transformace $u(x)$ závislé na bodu x tak, aby ds^2 přešlo lokálně na kanonický tvar. Dostaneme vztah mezi $u(x)$ a $du(x)$, který ovšem nemusí být splněn pro žádnou funkci $u(x)$.

Nutnou podmínkou pro existenci řešení tohoto systému diferenciálních rovnic prvního řádu je nulovost Riemannova tenzoru křivosti. Einsteinova rovnice je požadavek, aby jistá část tenzoru křivosti — Ricciho tenzor — byl nulový. Je to komplikovaná nelineární diferenciální rovnice pro koeficienty metriky; získat alespoň částečné informace o jejím řešení je stále ještě obtížný problém. Zejména nalezení podmínek pro integrabilitu těchto rovnic a získání všech řešení je problém, kterým se zabývá řada matematiků.

R. Penrose přistupuje k tomuto problému takto: Nejdříve přejde ke komplexní verzi, kde důležité invarianty vytvořené z komponent tenzoru křivosti (Ricciho a Weylův tenzor) mají mnohem přirozenější geometrický význam. V tečném prostoru každého bodu x komplexního prostoročasu je definován nulový kužel V_x. Tento nulový kužel sestává z vektorů, které anulují kvadratickou formu ds^2. V tomto kvadratickém kuželu jsou dva systémy dvourozměrných rovin. Pomocí těchto systémů rovin (které v reálném případě existují pouze pro signaturu (2,2)), lze jednoduše popsat tenzor křivosti. Kužely V_x definují konformní třídu metriky (tj. definují metriku až na násobek nenulovou funkcí).

Další postup je založen na tom, že v rovném prostoročase lze metriku získat pomocí protínání přímek v trojrozměrném prostoru; analogicky by bylo možno uvažovat o získání metriky v zakřiveném prostoru pomocí protínání křivek. Výchozím bodem konstrukce je tedy čtyřparametrický systém křivek X v trojrozměrné varietě T (zakřivená twistorová varieta). Snažíme-li se definovat metriku na X tak, aby pouze protínající se křivky měly nulovou vzdálenost. máme určeny nulové kužely V_x, ale tyto kužely nemusí být „kvadratické". Podmínka kvadratičnosti totiž znamená, že všechny křivky jsou v jitém smyslu izomorfní s projektivní přímkou (takovéto křivky se nazývají *racionální*). Najít příklady systému křivek, které splňují podmínku kvadratičnosti není jednoduché. Na základě teorie deformací komplexních struktur Penrose ukázal, že deformacemi systému přímek je možno získat sytémy křivek splňující tuto kvadratickou podmínku, konkrétní příklady se však takto ihned přímo nezískaly.

Navíc podmínka protínání určuje pouze nulové kužely V_x, tj. konformní třídu metriky, ale Einsteinova rovnice není konformně invariantní. Penrose ukázal, že pro metriky definované pomocí protínání křivek Einsteinova rovnice má jednoduchý geometrický význam. Ve čtyřrozměrném případě je totiž grupa komplexních ortogonálních transformací reducibilní; to znamená, že ke každé takovéto transformaci u existují dvě komplexní matice druhého řádu v_1 a v_2, které mají determinant 1 a v jistém smyslu jí odpovídají a naopak. V případě redukovatelnosti ds^2 k rovnému kanonickému tvaru hledáme dvě takovéto funkce $v_1(x)$ a $v_2(x)$. Existence obou těchto funkcí odpovídá rovnému případu; jestliže existuje pouze jedna z funkcí $v_1(v_2)$, metrika se nazývá *zleva rovná* (resp. *zprava rovná*). Ukázalo se, že metrika, která vznikne výše popsanou konstrukcí pomocí systému křivek a splňuje Einsteinovu rovnici je zleva rovná metrika. Penrosova konstrukce tedy vede k sestrojení zleva rovných metrik pomocí twistorů, avšak je v ní několik ne zcela explicitních míst. Později byla získána tímto způsobem některá explicitní řešení Wardem, Lernerem, Hitchinem a dalšími.

Spolu s J. N. Bernsteinem jsme navrhli jinou metodu pro konstrukci systému křivek splňujícího podmínku „kvadratičnosti". Začínáme z nějakého systému pěkných racionálních křivek, například ze systému všech (rovinných) křivek druhého stupně v trojrozměrném prostoru. Tento systém závisí na osmi parametrech a dvě křivky systému se protínají, právě když jistý polynom dosti vysokého stupně v koeficientech křivek (v 16 proměnných) se anuluje. Zjednodušme poněkud situaci tím, že se omezíme jen na šestiparametrický systém křivek $L(a, b)$ tvaru

$$
\begin{aligned}
x &= a_2 z^2 + a_1 z + a_0 , \\
y &= b_2 z^2 + b_1 z + b_0 .
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Křivky $L(a, b)$ a $L(a', b')$ se protínají, právě když polynom $R(a, b, a', b') = (\tilde{a}_0 \tilde{b}_2 - \tilde{a}_2 \tilde{b}_0)^2 - (\tilde{a}_1 \tilde{b}_0)^2 - (\tilde{a}_1 \tilde{b}_2 - \tilde{a}_2 \tilde{b}_1)(\tilde{a}_0 \tilde{b}_1 - \tilde{a}_1 \tilde{b}_0)$ (kde jsme položili $\tilde{a}_i = a_i - a'_i$, $\tilde{b}_i = b_i - b'_i$) je roven nule. Polynom $R(a, b, a', b')$ je rezultant polynomů $\tilde{a}_2 z^2 + \tilde{a}_1 z + \tilde{a}_0$ a $\tilde{b}_0 z^2 + \tilde{b}_1 z + \tilde{b}_0$. Naším cílem nyní bude nalézt vhodný čtyřparametrický podsystém, na němž by se podmínka protínání mohla redukovat na kvadratickou podmínku; přesněji: zúžení polynomu R na tento podsystém by byl rozložitelný polynom a podmínka protínání pro křivky podsystému by byla podmínka odpovídající činiteli druhého stupně v rozkladu.

Je zřejmé, že tato podmínka je velmi silná, nicméně takové podsystémy existují a navíc mohou být zcela explicitně popsány. Abychom nějaký čtyřparametrický systém vybrali, musíme přidat další dvě podmínky na systém parametrů (a, b). Následující dva typy podmínek nazveme *regulárními* podmínkami: první typ podmínky je, že křivky $L(a, b)$ protínají nějaou pevnou křivku E v $\mathbf{C}^3(x, y, z)$, druhý typ je, že křivky $L(a, b)$ se dotýkají pevné plochy F v $\mathbf{C}^3$. Pro čtyřparametrický systém křivek tvaru (11) je podmínka protínání v obecném případě kvadratická, právě když tento systém je určen dvěmi regulárními podmínkami. Ukázalo se, že metriky, které vzniknou výše popsanou konstrukcí pomocí systémů křivek a splňují Einsteinovu rovnici jsou právě zleva rovné metriky.

Nebudeme zde diskutovat obecný případ, ale omezíme se na jeden konkrétní příklad. Mějme systém křivek $L(a, b)$, které protínají křivky $(z = 0, y = \phi(x))$ a $(z = \infty, y/z^2 = \psi(x/z^2))$, tj. $b_0 = \psi(a_0)$, $b_2 = \psi(a_2)$. Nechť $\phi' = f_0$, $\psi' = f_2$. Na systému křivek L(a, b) máme pak zleva rovnou metriku

$$g = (f_0(a_0) - f_2(a_2))^{-1} (f_2(a_2)\, da_1 - db_1)(f_0(a_0)\, da_1 - db_1) + \\ + (f_0(a_0) - f_2(a_2))\, da_0\, da_2\,. \tag{12}$$

Předpokládejme, že platí $\overline{f_2(\bar{z})} = f_0(z)$. Pak metrika (12) je reálná. Poznamenejme, že zleva rovné metriky, které nejsou rovné, nemohou mít signaturu (3, 1), ale mohou mít signaturu (4, 0). Zkoumejme průniky $L(a, b)$ s reálným podprostorem $\{a_0 = \bar{a}_2 = u, a_1 = ix, b_1 = iy\}$. Na těchto průnicích zvolme jako souřadnice $(x, y, \mathrm{Re}\, u, \mathrm{Im}\, u)$. Pak (12) určuje reálnou metriku

$$(\mathrm{Im} f(u))^{-1} (f(u)\, dx - dy)(\overline{f(u)}\, dx - dy) + \mathrm{Im} f(u)\, du\, d\bar{u}\,,$$

která je pozitivně definitní, je-li $\mathrm{Im} f > 0$.

Takovými postupy můžeme získat další (euklidovská) řešení Einsteinovy rovnice [7], [8].

Literatura

[1] R. Penrose (1977): *The twistor program.* Reports on Math. Phys. *12*, 65—76.

[2] F. Klein (1926): *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert, Teil I.* Springer, Berlin.

[3] F. Klein (1926): *Vorlesungen über höhere Geometrie.* Springer, Berlin.

[4] S. G. Gindikin, G. M. Khenkin: *The complex integral geometry and the Penrose transform,* In the Collection „Modern problems of Mathematics" v. *17*, Moscow, VINITI, Acad. Sci. USSR (rusky).

[5] Ju. I. Manin: *Gauge fields and homomorphic geometry,* ibid.

[6] R. Penrose (1976): *Nonlinear gravitons and curved twistor theory.* Gen. Rel and Grav. *7*, 31—52.

[7] S. G. Gindikin: *Integral geometry and twistors.* Lect. Notes in Math. *970*, pp. 2—42.

[8] S. G. Gindikin (1982): *Bunches of differential forms and the Einstein equation.* Nucl. Phys. *32*, 538—547. (rusky)