Daniela Hricišáková

Zovšeobecnená Liénardova diferenciálna rovnica

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 39 (1994), No. 1, 26--34

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/138632`

[20] J. A. VOLLGRAFF: *De Kromme van Johann Bernoulli volgens Christiaan Huygens en anderen, of Zijn en Worden in de Wiskunde en het Leven.* De Tijdstroom Lochem 1945.

[21] R. WOLF: *Biographien zur Kulturgeschichte der Schweiz; Johannes Bernoulli von Basel.* Verlag Von Drell 1859.

GERARD SIERKSMA, *Department of Econometrics, University of Groningen, P. O. Box 800, 9700 AV Groningen, The Netherlands.*

Gerard Sierksma studoval matematiku a fyziku na univerzitě v Groningen, kde získal roku 1977 Ph.D. za práci o zobecněné konvexitě. Působil jako hostující profesor na Western Washington University v Bellinghamu, stát Washington. Nyní je docentem pro operační výzkum na univerzitě v Groningen. K oblastem jeho vědeckého zájmu patří konvexita, teorie grafů, lineární algebra, kombinatorická optimalizace a operační výzkum.

Zovšeobecnená Liénardova diferenciálna rovnica

Daniela Hricišáková, Bratislava

V tomto článku sa budeme zaoberať jednou rovnicou 2. rádu, ktorá zohrala a ešte aj dnes hrá dôležitú úlohu v teórii nelineárnych diferenciálnych rovníc.

Začiatok teórie nelineárnych diferenciálnych rovníc spadá na koniec minulého storočia. Jej základy boli vytvárané geometrickými úvahami H. Poincarého [26] o krivkách definovaných pomocou diferenciálnych rovníc a analytickými metódami použitými v jeho práci [27] *O nebeskej mechanike.* Ďalším impulzom bola dizertácia A. M. Ljapunova [18] pojednávajúca o stabilite pohybu. V prvých tridsiatych rokoch nášho storočia podstatnou mierou k rozvoju teórie nelineárnych diferenciálnych rovníc prispeli práce matematikov, ktorí sa zaujímali o fyzikálne problémy. Medzi týmito treba predovšetkým menovať I. Bendixona [1], I. Levi-Civitu [17], E. Cottona [5] a hlavne G. D. Birkhoffa [3], ktorý položil základy teórie dynamických systémov. Uvedieme niektoré základné pojmy.

RNDr. DANIELA HRICIŠÁKOVÁ, CSc., (1948) je odborná asistentka Katedry matematiky a výpočtovej techniky Pedagogickej fakulty UK, Moskovská 3, 813 34 Bratislava.

Nech

$$(*) \qquad \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = f_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

je systém diferenciálnych rovníc. Vyznačuje sa tým, že pravá strana nezávisí od t. Predpokladajme, že Cauchyho úloha pre systém $(*)$ s počiatočnou podmienkou $x(t_0) = x^0$, kde $x(t_0) = (x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0))$, $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in R^n$ (R^n je Euklidov n-rozmerný priestor), má jediné riešenie, ktoré označme $x(t, x^0)$, definované pre všetky $t \in (-\infty, \infty)$. Zrejme $x(t, x^0)$ je spojitá funkcia t a $x(t_0, x^0) = x^0$. Tieto riešenia majú nasledujúci grupovú vlastnosť

$$x(t + t_0, x^0) = x(t, x(t_0, x^0)).$$

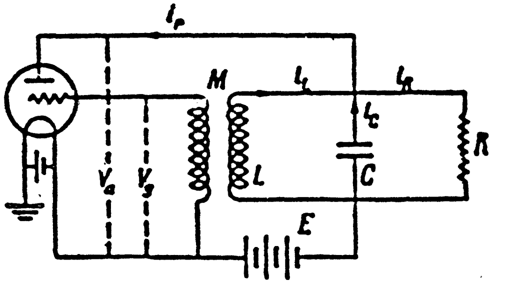
Systém funkcií majúci takúto grupovú vlastnosť sa nazýva dynamickým systémom a množina bodov $C = \{x;\ x = x(t, x^0),\ t \in (-\infty, +\infty)\}$ sa nazýva trajektória prechádzajúca cez x^0 pre $t = t^0$. Časť trajektórie pre $t_0 \leqq t < \infty$ (pre $-\infty < t \leqq t_0$) nazýva sa kladná (záporná) polotrajektória, označuje sa C^+, resp. C^-. Bod $\xi \in R^n$ sa nazýva ω-limitný (α-limitný) bod polotrajektórie C^+ (C^-), ak existuje postupnosť $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergujúca do $+\infty$ ($\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergujúca do $-\infty$) taká, že $\{x(t_n, x^0)\} \to \xi$ ($\{x(s_n, x^0)\} \to \xi$). Označme $L(C^+)$ ($L(C^-)$) množinu všetkých ω-limitných (α-limitných) bodov polotrajektórie C^+ (C^-). Riešenie $x(t)$ systému $(*)$ sa nazýva periodickým, ak existuje také $T > 0$, že $x(T + t, x^0) = x(t, x^0)$ pre každé $t \in (-\infty, \infty)$. Jeho trajektória je uzavretá krivka a $L(C^+) = L(C^-) = C$. Nech $x = x_0(t)$ je periodické riešenie diferenciálnej rovnice a nech jeho trajektória (označme C_0) nachádza sa v $L(C^+)$ pre nejakú trajektóriu $C^+ \not\subset C_0$; potom C_0: $x = x_0(t)$ sa nazýva ω_0-limitný cyklus. Riešenie $y(t)$ nejakej diferenciálnej rovnice, existujúce na intervale $[t_0, \infty)$, sa nazýva oscilatorickým na $[t_0, \infty)$, ak pre každé $t_i > t_0$ existuje nulový bod väčší ako t_i.

Keď teória nelineárnych diferenciálnych rovníc nebola ešte dostatočne vybudovaná, nelineárne problémy v technike boli riešené metódou linearizácie, spočívajúcej v tom, že sa nelineárne funkcie nahradili lineárnymi dobre aproximujúcimi nelineárne funkcie (aspoň v istom okolí bodu nula). Táto metóda sa čím ďalej ukazovala ako nevhodná, napr. na skúmanie kmitajúcich procesov. Nedali sa ňou zachytiť mnohé úkazy, ktoré sa v lineárnych prípadoch nevyskytovali, avšak v nelineárnych áno. Jasne to ukázal v r. 1920 B. van der Pol [28], ktorý sa zaoberal kmitaním okruhu, v ktorom bola zapojená trióda. Pozri obr. 1.

Použijúc Ohmove zákony, dostaneme

$$LC\left(\frac{\mathrm{d}^2 i_L}{\mathrm{d}t}\right) = i_C = i_P - i_L - i_R = f(u) - i_L - LR^{-1}\left(\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\right),$$

kde je $u = v_g + DV_a$, V_g napätie na mriežke, V_a napätie na anóde a D konštanta. Ak $f(u) = a(u-E) - \sqrt{\frac{b}{3}}\,(u-E)^3$, $a > 0$, $b > 0$, a ak položíme $V = (M - LD)\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mu}{D}x$, dostaneme po úprave známu van der Polovu rovnicu $x'' + \mu(x^2 - 1) + x = 0$, $\mu > 0$. B. van der Pol dokázal grafickou metódou existenciu izolovaných limitných cyklov,



Obr. 1.
R je ohmický odpor,
C kapacita kondenzátora,
L koeficient samoindukcie,
M koeficient vzájomnej indukcie,
$i_P = f(u)$ anódový prúd.

ktoré sa metódou linearizácie dokázať nedali. Neskôr to E. a H. Cartan [4] a A. Liénard [19] dokázali analytickou metódou. Liénard sa snažil zovšeobecniť výsledky van der Pola. Metóda, ktorá sa používala na riešenie van der Polovej rovnice spočívala v tom, že sa riešenie hľadalo v tvare mocninného radu podľa parametru μ. Pre konvergenciu toho radu bolo potrebné žiadať, aby parameter μ bol malý.

Liénard upustil od tejto metódy a úvahy začal robiť čisto geometricky. V tom prípade už nebolo potrebné brať do úvahy prítomnosť parametra a diferenciálnu rovnicu uvažoval v tvare

$$x'' + f(x)x' + x = 0,$$

ktorá sa dnes nazýva Liénardova diferenciálna rovnica.

Liénardove výsledky boli potom zovšeobecnené a vylepšené v tom zmysle, že sa uvažovali diferenciálne rovnice

$$x'' + f(x)x' + g(x) = 0 \tag{1}$$

a

$$x'' + f(x, x')x' + g(x) = 0, \tag{2}$$

resp.

$$x'' + f(x)x' + g(x) = e(t), \tag{3}$$

$$x'' + f(x, x')x' + g(x) = e(t) \tag{4}$$

a

$$x'' + F(x') + g(x) = e(t). \tag{5}$$

Pritom rovnice (1) a (3) sa uvádzajú ako zovšeobecnená rovnica Liénardova a rovnice (2), (4), (5) ako Rayleighova rovnica. Pomocou týchto rovníc možno popísať rôzne dynamické systémy, ktoré majú podstatný nelineárny charakter.

Tieto rovnice sú zovšeobecnenie lineárneho prípadu

$$x'' + ax' + x = e(t),$$

kde sa množina riešení dá explicitne vyjadriť. Vychádzajúc z mechanickej interpretácie zaužívali sa nasledujúce pomenovania pre $f(x)$, $f(x, x')$, $F(x')$, $g(x)$, $e(t)$:

$g(x)$ – príťažlivá sila, alebo sila vracajúca do kľudovej polohy;

$f(x)$ – koeficient tlmenia;

$f(x, x')$ – koeficient tlmenia závisiaci ako od polohy x, tak od rýchlosti x'. Pre pomalé kmitanie býva záporný, pre rýchle kmitanie a dosť veľké x kladný;

$F(x')$ – hnacia sila v prípade malých rýchlostí ($F(x') < 0$), pohybový odpor v prípade veľkých rýchlostí ($F(x') > 0$);

$e(t)$ – vonkajšia sila, ktorá je pre $t \geqq 0$ ohraničená, zväčša oscilatorická, alebo dokonca periodická.

Čo sa týka tvaru nelineárnych členov v rovniciach (1)–(5), nie je náhodný, ale vyplýva z jednoduchých fyzikálnych úvah. Avšak sám tvar nie je postačujúci, aby sa riešili konkrétne otázky, napr. existencia riešení na nekonečnom intervale, existencia periodických riešení, atď. Je potrebné dodať doplňujúce predpoklady, okrem spojitosti napr. kladnosť, (zápornosť), párnosť, (nepárnosť), atď. Pre $g(x)$ sa všeobecne užíva predpoklad $xg(x) > 0$, čo vyplýva z fyzikálnych úvah. Miesto predpokladov na funkcie $f(x)$, resp. $g(x)$ sa ukázalo, že niekedy je vhodnejšie robiť predpoklady na primitívne funkcie

$$F(x) = \int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s \quad \text{a} \quad G(x) = \int_0^x g(s)\,\mathrm{d}s.$$

V ďalšom budeme hovoriť len o Liénardovej zovšeobecnenej rovnici (1) a (3).

Definícia 1. Budeme hovoriť, že riešenia rovnice (1) ((3)) sú rovnomerne ohraničené, ak pre každé $r > 0$ existuje také $R > 0$, že pre každé také riešenie $x(t)$ rovnice (1), pre ktoré je $|x(t_0)| < r$, $|x'(t_0)| < r$, platí

$$|x(t)| < R, \quad |x'(t)| < R \quad \text{pre všetky} \quad t > t_0.$$

Ďalej budeme hovoriť, že riešenia rovnice (1) ((3)) sú v konečnej fáze rovnomerne ohraničené, ak existuje taká konštanta $k > 0$, že pre každé riešenie $x(t)$ rovnice (1) ((3)) existuje $T > 0$, že pre všetky $t > T$ je $|x(t)| < k$, $|x'(t)| < k$.

Od r. 1928, kedy Liénard [19] uverejnil svoju prácu, stala sa Liénardova rovnica predmetom výskumu mnohých matematikov. Obsiahle pojednanie o nej možno nájsť v knihe N. Minorského [22] *Nonlinear Oscillations* z roku 1962, v ktorej podáva popis fyzikálnych problémov viažúcich sa na rovnice (1) a (3).

Skoro kompletná literatúra a prehľad získaných výsledkov do roku 1960 sa nachádza vo vynikajúcej knihe Reissig, Sansone a Conti [30] *Qualitative Theorie nichtlinearer Differentialgleichungen* z roku 1963. Článok J. R. Graefa [9] dopĺňa túto literatúru do roku 1970. Liénardova zovšeobecnená diferenciálna rovnica a jej ďalšie zovšeobecnenia sú predmetom stáleho záujmu aj v súčasnosti. V nasledujúcom uvádzame niekoľko z veľmi mnohých výsledkov dosiahnutých rôznymi autormi.

Poznámka. V ďalšom sa stále predpokladá spojitosť funkcie f a g. Používa sa označenie

$$\lim_{x\to\infty} = F(\infty), \quad \lim_{x\to-\infty} = F(-\infty),$$

$$F(\pm\infty) = \pm\infty \quad \text{značí sa} \quad F(+\infty) = +\infty, \quad F(-\infty) = -\infty.$$

PRÍKLAD 1 (G. Sansone [31]).

Rovnica: $x'' + f(x)x' + x = 0.$

Predpoklady: (a) existuje $\delta_1 < 0 < \delta_2$, že $f(x) < 0$ na (δ_1, δ_2),
$f(x) > 0$ na $(-\infty, \delta_1) \cup (\delta_2, \infty)$;

(b) $N = F(\delta_1) - F(\delta_2) = \int_{\delta_1}^{\delta_2} |f(x)|\,\mathrm{d}x,$

$4N(x_0 + N) \leqq (F(x_0) - F(\delta_2))^2$ pre $x_0 > \delta_2$ alebo $F(\pm\infty) = \pm\infty$.

Tvrdenie: Existuje aspoň jedno periodické riešenie.

PRÍKLAD 2 (Z. Opial [25]).

Rovnica: $x'' + f(x)x' + g(x) = 0.$

Predpoklady: (a) $f(-x) = -f(x)$, $g(-x) = -g(x)$, $xg(x) > 0$ pre každé $x \neq 0$;

(b) existujú $a > 0$ a $\Sigma > 0$ také, že $\int_0^x \frac{g(s)}{|F(s)|}\,\mathrm{d}s \geqq \left(\frac{1}{4} + \Sigma\right)|F(x)|$
pre $0 \leqq x \leqq a$.

Tvrdenie: Pre dostatočne malé $x(0) = x_0$, $x'(0) = x'_0$ je riešenie $x(t)$ periodické. Ak miesto (b) platí

(b') $$\int_0^x \frac{g(s)}{|F(s)|}\,\mathrm{d}s \leqq \frac{1}{4}|F(x)|,$$

tak pre ľubovoľné malé x_0 a x'_0 existuje neperiodické riešenie. Ak $a = \infty$, tak periodické riešenie neexistuje.

PRÍKLAD 3 (S. Lefschetz [16], X. Zeng [34]).

Rovnica: $x'' + f(x)x' + g(x) = 0.$

Predpoklady: (a) f párna, $f(0) < 0$;
(b) g nepárna, $xg(x) > 0$ pre $x \neq 0$;
(c) existuje $a > 0$, že $F(x) \cdot (x - a) > 0$ pre $x > 0$ a $x \neq a$,
$F(x)$ monotónne rastie pre $x > a$, $F(\infty) = \infty$.

Tvrdenie: Existuje stabilný limitný cyklus.

PRÍKLAD 4 (V. V. Nemickij, V. V. Stepanov [24], K. Wu [32]).

Systém: $x' = \varphi(y) - F(x),$
$y' = -g(x).$

Predpoklady: (a) $xg(x) > 0$ pre $x \neq 0$, $G(\pm\infty) = \infty$;
(b) $xf(x) < 0$ pre $|x| > 0$ malé,
$F(x) \geqq k$ pre $x \geqq a$,
$F(x) \leqq k' < k$ pre $x \leqq -a$;
(c) $y\varphi(y) > 0$, $y \neq 0$, $\varphi(\pm\infty) = \pm\infty$.

Tvrdenie: Existuje periodické riešenie.

Príklad 5 (S. Lefschetz [15]).

Rovnica: $x'' + f(x)x' + g(x) = e(t)$; $e(t)$ periodické.

Predpoklady: (a) $\dfrac{g(x)}{x} \to \infty$ pre $|x| \to \infty$;

(b) existuje $B > 0$, $C > 0$, že $|F(x) - Cg(x)| \leqq B|x|$ pre všetky x.

Tvrdenie: Existuje periodické riešenie.

Príklad 6 (S. Mizohata, M. Yamaguti [23]).

Rovnica: $x'' + f(x)x' + g(x) = e(t)$.

Predpoklady: (a) existuje $M > 0$, že $|E(t)| = \left|\int_0^t e(s)\,\mathrm{d}s\right| \leqq M$ pre všetky $t > 0$;

(b) $F(\pm\infty) = \pm\infty$;

(c) existuje $\delta > 0$, že $g(x)\operatorname{sgn} x \geqq 0$ pre $|x| \geqq \delta$.

Tvrdenie: Riešenia sú ohraničené pre $t \geqq 0$.

Príklad 7 (J. R. Graef [9]).

Rovnica: $x'' + f(x)x' + g(x) = 0$.

Predpoklady: (a) existuje $k > 0$ a $C > 0$, že $xF(x) > 0$ pre $|x| \geqq k$;

(b) $F(x) \geqq C > 0$ pre $x \geqq k$ alebo $F(x) \leqq -C < 0$ pre $x \leqq -k$;

(c) $xg(x) > 0$ pre $|x| \geqq k$;

(d) $\displaystyle\int_0^{\pm\infty} (f(x) + |g(x)|)\,\mathrm{d}x = \pm\infty$.

Tvrdenie: Riešenia sú v konečnej fáze rovnomerne ohraničené. Ak miesto (c) platí $xg(x) > 0$ pre $x \neq 0$, g spĺňa Lipschitzovu podmienku a naviac je $f(0) < 0$, tak existuje netriviálne periodické riešenie.

Príklad 8 (J. R. Graef [9]).

Rovnica: $x'' + f(x)x' + g(x) = 0$.

Predpoklady: (a) $xg(x) > 0$ pre $x \neq 0$;

(b) $f(0) < 0$, existuje $k > 0$, že $xF(x) > 0$ pre $|x| \geqq k$;

(c) $\displaystyle\int_0^{\pm\infty} (f(x) + |g(x)|)\,\mathrm{d}x = \pm\infty$.

Tvrdenie: Všetky riešenia oscilujú.

Príklad 9 (T. Hara, T. Yoneyama [10], [11]).

Rovnica: $x'' + f(x)x' + g(x) = 0$.

Základné predpoklady: $xg(x) > 0$ pre $x \neq 0$, $F(0) = 0$ a jednoznačnosť riešenia Cauchyho úlohy.

Za ďalších predpokladov, hlavne za predpokladu zovšeobecnenej symetrie, t.j.

$$F(G^{-1}(-\beta)) = F(g^{-1}(\beta)) \quad \text{pre všetky } \beta \geqq 0,$$

pričom

$$G(x) = \int_0^x |g(s)| \, \mathrm{d}s,$$

dokazuje sa existencia periodických riešení. Ďalej sa stanovujú podmienky zaručujúce existenciu oscilatorických riešení, rovnomerná asymptotická stabilita nulového riešenia, v konečnej fáze rovnomerná ohraničenosť riešení.

PRÍKLAD 10 (D. Hricišáková, [12], [14]).

Rovnica: $x'' + f(x)x' + g(x) = 0$,
f, g sú spojité funkcie na $R = (-\infty, \infty)$.

Predpoklady: $xf(x) > 0$, $xg(x) > 0$ pre každé $x \neq 0$.
Nech existuje $k > 1$ a $0 < A < \infty$ také, že je pre všetky $x \in (0, A)$,

$$\frac{g(x)}{f(x)} < \frac{k-1}{k^2} F(x).$$

Tvrdenia: Ak $A < \infty$, tak existuje r (dosť malé), že v kruhu $x^2 + y^2 < r^2$ neleží uzavretá trajektória $(x(t), x'(t))$ (t.j. periodické riešenie) uvažovanej rovnice. Ak $A =$ $= \infty$, tak rovnica nemá žiadne netriviálne periodické riešenie.

Ako je vidieť z uvedených príkladov, vyšetrovala sa zovšeobecnená Liénardova diferenciálna rovnica za rôznych predpokladov, čo sa týka znamienok funkcií f a g. V mnohých prípadoch sa žiada zápornosť funkcie f v okolí nuly a jej kladnosť pre $|x| >$ $> a$. O funkcii g sa zväčša predpokladá $xg(x) > 0$ pre $|x| \geqq d > 0$, lebo to odpovedá klasickej podmienke. Boli však vyšetrované i prípady, kedy miesto tejto podmienky platí podmienka

$$xg(x) < 0 \quad \text{pre veľké } |x|$$

(napr. R. Reissig [29]), alebo $g(x)$ oscilatorická (napr. F. Zanolin [33], J. Mawhin [20], J. Mawhin, M. Willem [21]).

Ešte sa zmienime o zovšeobecneniach Liénardovej rovnice, resp. jej odpovedajúceho systému. Vyšetrované sú prípady

$$\begin{aligned} x' &= \varphi(y) - F(x), \\ y' &= -g(x), \end{aligned}$$

resp.

$$\begin{aligned} x' &= p(t)\,(\varphi(y) - F(t, x, y)), \\ y' &= -g(x) - P(t, x, y) \end{aligned}$$

a tiež prípady takých systémov, kde x a y sú vektory (R. J. P. de Figueiredo [6], D. C. Benson [2], W. Ding [7]).

Literatúra

[1] Bendixon I.: *Sur les courbes définies par des équations differentielles.* Acta Math. *24* (1901), 1–88.

[2] Benson D. C.: *Asymptotic directions for solutions of Liénard systems.* Nonlinear Anal. Theory Method Appl. *6* (1982), 293–301.

[3] Birkhoff G. D.: *Dynamical Systems.* Amer. Math. Soc. Coll. Publ., New York 1927.

[4] Cartan E. a H.: *Note sur la génération des oscillations entretenues.* Ann. Postes Télégraph *14* (1925), 1196–1207.

[5] Cotton E.: *Sur les solutions asymptotiques des équations différentielles.* Ann. Sci. École Norm. Sup. *28* (1911), 473–521.

[6] De Figueiredo R. J. P. and Chang C.-Y.: *On the boundedness of solutions of classes of multidimensional nonlinear autonomous systems.* SIAM J. Appl. Math. *17* (1969), 672–680.

[7] Ding W.: *On the existence of periodic solutions for Liénard systems.* Acta Math. Sinica *25* (1982), 626–632.

[8] Fučík Sv., Mawhin J.: *Periodic solutions of some nonlinear equation of higher order.* Čas. pěst. mat. *100* (1975), 276–283.

[9] Graef J. R.: *On the generalized Liénard equation with negative damping.* J. Differential Equations *12* (1972), 34–62.

[10] Hara T., Yoneyama T.: *On the Global Center of Generalized Liénard Equation and its Application to Stability Problems.* Funkcial. Ekvac. *28* (1985), 171–192.

[11] Hara T., Yoneyama T.: *On the Global Center of Generalized Liénard Équation and its Application to Stability Problems II.* Funkcial. Ekvac. *31* (1988), 221–225.

[12] Hricišáková D.: *Existence of ultimately positive (negative) solutions of generalized Liénard equation.* EQUADIFF 7, Praha 1989.

[13] Hricišáková D.: *Continuability and (non)oscilatory properties of solutions of generalized Liénard equation.* Hiroshima Math. J. Vol. *20*, No. 1., March 1990, 11–22.

[14] Hricišáková D.: *Existence of positive solutions of Liénard differential equation.* J. of Mathematical analysis and applications, San Diego, California, Vol. *176*, No. 2, July 1, 1993, 545–553.

[15] Lefschetz S.: *Existence of periodic solutions for certain differential equations.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA *29* (1943), 29–32.

[16] Lefschetz S.: *Lectures on differential equations.* Ann. Math. Stud. *14*, Princeton 1948.

[17] Levi-Civita T.: *Sopra alcuni criteri di instabilita.* Ann. Mat. Pura Appl. *5* (1901), 221–301.

[18] Ljapunov M. A.: *Das allgemeine Problem der Stabilität einer Bewegung.* Math. Gesselsch. Charkov 1892.

[19] Liénard A.: *Étude des oscillations autoentretenues.* Rev. Gén. Élec. *23* (1928), 901–902, 946–954.

[20] Mawhin J.: *Periodic oscillations of forced pendulum-like equations.* In *Ordinary and Partial Differential Equations* . (W. N. Everitt and B. D. Sleeman, Eds.) Lecture Notes in Mathematics Vol. *924*, Springer-Verlag Berlin/New York 1982, 458–476.

[21] Mawhin J. and Willem M.: *Multiple solutions of the periodic boundary value problem for some pendulum-type equations.* J. Differential Equations *52* (1984), 264–287.

[22] Minorsky N.: *Nonlinear Oscillations.* Van Nostrand, Princeton, NJ, 1962.

[23] Mizohata S. and Yamaguti M.: *On the existence of periodic solutions of the nonlinear differential equation* $\ddot{x} + \alpha(\dot{x}) + Q(x) = p(t)$. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto Sect. *A 27* (1952), 142–156.

[24] Nemickij V. V., Stepanov V. V.: *Theorie der Differentialgleichungen.* Moskva 1949.

[25] Opial Z.: *Sur un théoréme de A. Filippoff.* Ann. Polon. Math. *5* (1958), 67–75.

[26] Poincaré H.: *Mémoires sur les courbes définies par une équation différentielle.* J. Math. Pures Appl. *7* (1881), 375–422, *8* (1882), 251–296, *1* (1885), 167–224, *2* (1886), 151–217.

[27] Poincaré H.: *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*. Paris 1892.
[28] Van der Pol B.: *A theory of the amplitude of free and forced triode vibrations*. Radio Reviews *1* (1920), 701–710.
[29] Reissig R.: *Schwingungssätze für die verallgemeinerte Liénardsche Differentialgleichung*. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg *44* (1957), 45–51.
[30] Reissig R., Sansone G., Conti R.: *Qualitative Theorie Nichtlinearer Differentialgleichungen*. Edizioni Cremonese, Roma 1963.
[31] Sansone G.: *Sopra l'equazione di A. Liénard per le oscillazioni di rilassamento*. Ann. Mat. Pura Appl. *28* (1949), 153–181.
[32] Wu K.: *The existence of limit cycles for a nonlinear system*. Acta Math. Sinica *25* (1982), 456–463.
[33] Zanolin F.: *Remarks on multiple periodic solutions for nonlinear ordinary differential systems of Liénard type*. Boll. Un. Mat. Ital. *8*(6) (1982), 683–698.
[34] Zeng X.: *An existence and uniqueness theorem of limit cycles of Liénard equation*. Acta Math. Sinica *21* (1978), 263–269 (Chinese).

Přestavba systému vědy v nových zemích Spolkové republiky Německo

Jitka Brockmeyerová-Fenclová

Ke sjednocení demokraticky a pluralisticky řízené Spolkové republiky Německo (BRD) a nedemokraticky a centrálně řízené Německé demokratické republiky (DDR) došlo 3. 10. 1990. V následném integračním procesu je za jednu z nejvýznamnějších úloh pokládána přestavba vědeckého systému v nových spolkových zemích.

Smlouvou o sjednocení byla s okamžitou platností zrušena Akademie věd DDR jako centrální řídící instituce vědy. Již v roce 1991 vznikla radikálně odlišná nosná struktura mimouniverzitního výzkumu a v roce 1992 byla dokončena strukturální přestavba vysokého školství. Bylo ukončeno řízení, při němž vzniklo nové vědecké společenství převodem odborně kvalifikovaných a minulostí nepříliš zatížených vědců DDR. Byla ukončena personální přestavba a redukce mimouniverzitních ústavů. Částečné výsledky má již také personální přestavba vysokých škol, včetně ustanovování univerzitních profesorů z převedených vysokoškolských učitelů a vědeckých pracovníků Akademie. Současně probíhá vnitřní strukturace vysokých škol a jejich vědních oborů.

Doc. RNDr. Jitka Brockmeyerová-Fenclová, CSc., (1926) je em. vědecká pracovnice FÚ ČSAV; D-91207 Lauf a. d. Pegn., Eichenhainstr. 40.