Ivan Netuka; Jiří Veselý

Rudinovy učebnice matematické analýzy

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 40 (1995), No. 1, 11–17

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138592

Rudinovy učebnice matematické analýzy

Ivan Netuka, Jiří Veselý, Praha

1. Steeleova cena

Rudinovy učebnice matematické analýzy Principles of Mathematical Analysis [1], Real and Complex Analysis [2] a Functional Analysis [3] zná řada českých čtenářů především z jejich překladů [1a], [2a] a [3a]. Bez ohledu na to, že první jmenované učebnici bylo již čtyřicet let, tvoří stále Rudinovy knihy obecně akceptovaný standard. Čtou se lehce a vynikají elegancí výkladu — i dnes jsou studenti ochotni překonat svůj problematický vztah k ruštině a učit se z nich.

Walter Rudin se narodil ve Vídni r. 1921. Působil na amerických univerzitách (např. MIT, University of Rochester, University of Wisconsin) a kromě již uvedených učebnic je i autorem čtyř monografií [4], [5], [6] a [7] a mnoha článků s příbuznou problematikou. Jeho učebnice byly přeloženy nejméně do 13 jazyků (viz úvod k třetímu vydání [2]).

Existují nejméně dva důvody, pro které jsme se rozhodli napsat tuto poznámku. Chronologicky prvním byl fakt, že učebnice [2] vyšla v r. 1987 ve třetím, zajímavým způsobem přepracovaném vydání. Druhé vydání této knihy jsme kdysi překládali a nejednou jsme se zamýšleli nad možností vydat český překlad třetího vydání; bohužel jsme dospěli k názoru, že by vzhledem k ceně takový překlad hledal jen stěží cestu ke čtenáři. A tak jsme se rozhodli alespoň s nejzásadnějšími změnami české čtenáře při vhodné příležitosti seznámit.

Vhodný okamžik nastal v minulém roce. Dne 15. srpna 1993 byli vyhlášeni nositelé Steeleovy ceny. Za učebnicovou literaturu obdržel cenu právě Walter Rudin, a to za své knihy, zejména za [1] a [2]; viz [8]. Dalšími odměněnými byli George Daniel Mostow za významnou vědeckou práci a Eugene B. Dynkin za celoživotní dílo.

Steeleova cena se udílí ve třech kategoriích každoročně od r. 1970. Z prostředků pocházejících z odkazu Leroye P. Steelea získává každý z odměněných 4000 $; cena je určena k poctě George Davida Birkhoffa, Williama Fogga Osgooda a Caspara Grausteina. Cenu udílí komise AMS složená z významných matematiků (předseda komise se každý rok střídá). Poznamenejme, že ve stejné kategorii jako Rudin získali v posledních letech toto ocenění např. Daniel Gorenstein (za knížku o grupách), R. D. Richtmyer (za knížku o numerických metodách pro PDE) a Jean-François Treves (za dvoudílnou monografii o pseudodiferenciálních operátorech). Stojí za povšimnutí, že zmíněná ocenění získávají knížky často až za deset let od jejich vydání.

Prof. RNDr. Ivan Netuka, DrSc. (1944), doc. RNDr. Jiří Veselý, CSc. (1940), pracují v Matematickém ústavu MFF UK, Sokolovská 83, 186 00 Praha 8.

Vraťme se znovu k Rudinovým učebnicím a uveďme několik informací z jeho osobního komentáře. Když v r. 1949 získal Ph. D. na Duke University, nastoupil jako Moore Instructor na MIT (1950–1952). Jeho úvazek zahrnoval Advanced Calculus; ke stanovenému sylabu nenalezl vhodnou učebnici, a tak ji, povzbuzen vedoucím Departmentu, napsal — to byl vznik knížky [1]. Uvádí, že chtěl vyložit krásné a důležité partie matematiky podle možností přímočaře s úplnými, přesnými a přitom stručnými důkazy. Psaní této knížky mu působilo opravdovou radost (myslíme, že se to promítlo do výsledku práce). Hlavní motivací pro vznik [2] byla tradiční izolovanost reálné a komplexní matematické analýzy.

Z Rudinova stylu psaní je patrné nejen jeho pedagogické mistrovství, ale též vynikající přehled o vývoji analýzy (z dodatku k [3] lze získat na nemnoha stránkách obrázek o vývoji funkcionální analýzy).

Snad je vhodné tuto část zakončit zmínkou o dalších důvodech pro napsání této poznámky: je to obdiv k výjimečnému autorovi, od něhož jsme se pro učitelskou práci mnoho naučili, a dále zájem informovat vlastníky překladu [2a] o zlepšeních, která přináší poslední vydání [2].

2. Analýza v reálném a komplexním oboru

Rudinova kniha „Real and complex analysis" vyšla poprvé v r. 1966; viz [2]. V pražských knihovnách se objevila v r. 1967 (MFF UK Karlín) a v r. 1972 (MÚ ČSAV). Na přelomu šedesátých a sedmdesátých let jsme se začali zabývat myšlenkou pořídit český překlad knihy. Aby však měl takový projekt smysl, bylo třeba vydat překlad za dostupnou cenu. Proto bylo nutné nejen přesvědčit nakladatelství Academia o vhodnosti a užitečnosti takového překladu, ale získat i od tehdejšího ministerstva školství schválení překladu jako vysokoškolské učebnice (to mělo za následek získání příslušné dotace). V r. 1972 jsme se v Litvě u Zelených jezer setkali s Viktorem Petrovičem Chavinem, profesorem tehdejší Leningradské státní univerzity, který přeložil do ruštiny Rudinovu učebnici „Principles of Mathematical Analysis" [1]; viz [1a]. Kdyby se počítalo s ruským překladem [2], neměl by náš záměr smysl. Zjistili jsme však, že se o ruském překladu [2] v dohledné době neuvažuje; to byla pro naše rozhodování příslovečná poslední kapka. Nakladatelství Academia zahájilo příslušný postup a přes velmi zdlouhavá jednání přece jen české vydání potkalo štěstí. V r. 1974 vyšlo totiž 2. vydání knihy, které obsahovalo řadu změn. Nejpodstatnějšími změnami bylo jednak zařazení jednoduchého důkazu globální (homologické) formulace Cauchyovy věty a větší úpravy doznala i kapitola o derivování. Nezanedbatelné změny se objevily také ve cvičeních uvedených v knize na konci kapitol. Český překlad [2a] druhého vydání [2] vyšel v nákladu 3000 výtisků a stál i na tehdejší dobu velmi málo: vázaný výtisk se prodával za 31 Kčs. Tato kniha dodnes slouží studentům, aspirantům, doktorandům a koneckonců i učitelům MFF UK a dalších škol jako standardní text z matematické analýzy.

3. Třetí vydání

V r. 1987 vyšlo třetí vydání [2], které přineslo oproti druhému vydání nejen řadu drobnějších změn (úpravy výkladu i souborů cvičení), ale i jednu změnu větší. Došlo k přehození dvou kapitol: V třetím vydání je jako 7. kapitola zařazeno „Derivování“ a jako 8. kapitola „Integrace na kartézském součinu“. Podstatnější však je, že kapitola o derivování je přepracována zásadním způsobem, a proto se o ní chceme zmínit podrobněji.

Úvodní tvrzení se prakticky nezměnilo a má motivační charakter: Je-li μ komplexní borelovská míra na $\mathbf{R}^1$ a $f(x) = \mu\big((-\infty, x)\big)$, $x \in \mathbf{R}^1$, potom lze $f'(x)$ (pokud existuje) spočítat jako limitu podílů $\mu(I)/m(I)$ pro intervaly smršťující se k bodu x. (Zde je $m(I)$ délka (= Lebesgueova míra) intervalu I.)

Další výklad se týká prostoru $\mathbf{R}^k$; m značí k-rozměrnou Lebesgueovu míru a $B(x, r)$ je otevřená koule o středu x a poloměru r.

Nechť μ je komplexní borelovská míra v $\mathbf{R}^k$. Pro $x \in \mathbf{R}^k$ a $r > 0$ označme

$$(Q_r\mu)(x) = \frac{\mu\big(B(x,r)\big)}{m\big(B(x,r)\big)}$$

a definujme

$$(D\mu)(x) = \lim_{r\to 0+} (Q_r\mu)(x)$$

pro všechna x, pro něž limita existuje. [Číslo $(D\mu)(x)$ se pak nazývá *symetrická derivace míry μ v bodě x*.]

Podstatný nástroj pro studium derivace $D\mu$ představuje *maximální funkce $M\mu$*. Pro $\mu \geqq 0$ je definována vztahem

$$(M\mu)(x) = \sup_{0<r<\infty} (Q_r\mu)(x), \quad x \in \mathbf{R}^k,$$

a pro komplexní borelovskou míru μ se definuje $M\mu = M|\mu|$. Lehce se ukáže, že $M\mu$ je zdola polospojitá funkce.

Je pozoruhodné, že se pro získání níže uvedených hlubokých výsledků vystačí s následující slabou verzí věty o pokrytí (srovnej s podobným lemmatem 8.4 v [2a]):

LEMMA. *Je-li W sjednocení konečného systému koulí $B(x_j, r_j)$, $1 \leqq j \leqq n$, potom existuje množina $S \subset \{1, \dots, n\}$ tak, že*

(a) *koule $B(x_j, r_j)$ s indexy $j \in S$ jsou disjunktní,*

(b) $W \subset \bigcup_{j\in S} B(x_j, 3r_j)$,

(c) $m(W) \leqq 3^k \sum_{j\in S} m\big(B(x_j, r_j)\big)$.

Důkaz je velmi snadný: koule se srovnají od největší k nejmenší; první koule se ponechá a vyloučí se ty koule, které první kouli protínají. S následujícími koulemi se postupuje stejně — po konečně mnoha krocích se dostane požadovaný podsystém.

Tato jednoduchá pokrývací věta umožní dokázat následující odhad ukazující, že maximální funkce míry může nabývat velkých hodnot pouze na množině malé míry.

VĚTA. *Nechť μ je komplexní borelovská míra v $\mathbb{R}^k$ a $\lambda \geqq 0$. Potom $m(\{M\mu > \lambda\}) \leqq \leqq 3^k \lambda^{-1} \|\mu\|$.*

Důkaz není obtížný: Uvažujme kompaktní podmnožinu K množiny $\{M\mu > \lambda\}$. Podle definice maximální funkce, každý bod $x \in K$ je středem koule B, pro niž $|\mu|(B) > \lambda m(B)$. Kompaktnost nám umožňuje omezit se na konečné pokrytí a výše uvedené lemma dává konečný *disjunktní* systém koulí, řekněme $\{B_1, \ldots, B_n\}$, pro něž platí

$$m(K) \leqq 3^k \sum_{j=1}^{n} m(B_j) \leqq 3^k \lambda^{-1} \sum_{j=1}^{n} |\mu|(B_j) =$$
$$= 3^k \lambda^{-1} |\mu| \left(\bigcup_{j=1}^{n} B_j \right) \leqq 3^k \lambda^{-1} |\mu|(\mathbb{R}^k).$$

Nerovnost $m(K) \leqq 3^k \lambda^{-1} \|\mu\|$ platí pro každou kompaktní část množiny $\{M\mu > \lambda\}$. Odtud tvrzení okamžitě plyne.

Poznamenejme, že každá $f \in L^1(\mathbb{R}^k)$ patří do *slabého* L^1; podle definice to znamená, že funkce $\lambda \mapsto \lambda \cdot m\{|f| > \lambda\}$ je omezená na $(0, \infty)$. (Přitom např. funkce $1/x$ na $(0,1)$ nenáleží do $L^1(0,1)$, ale je prvkem slabého L^1; je tedy slabé L^1 opravdu větší než L^1.)

Dále autor směřuje k větě ukazující, že *Radonova-Nikodymova derivace* (= hustota) míry μ vzhledem k m je ve skutečnosti derivace ve výše uvedeném smyslu.

Jestliže $f \in L^1(\mathbb{R}^k)$ a $\mu = f\,\mathrm{d}m$, užíváme místo $M\mu$ symbol Mf. Pro $x \in \mathbb{R}^k$ je tedy

$$(Mf)(x) = \sup_{0<r<\infty} \frac{1}{m(B_r)} \int_{B(x,r)} |f|\,\mathrm{d}m,$$

kde ovšem píšeme B_r místo $B(x,r)$.

Již jsme ukázali, že „maximální operátor“ M zobrazuje L^1 do slabého L^1, neboť $\lambda \cdot m\{Mf > \lambda\} \leqq 3^k \|f\|_1$.

Pro další výklad je důležitý pojem Lebesgueova bodu. Je-li $x \in \mathbb{R}^k$, $f \in L^1(\mathbb{R}^k)$ a

$$(*) \qquad \lim_{r \to 0+} \frac{1}{m(B_r)} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|\,\mathrm{d}m(y) = 0,$$

nazývá se x *Lebesgueův bod* funkce f.

Pokud je funkce f v bodě x spojitá, $(*)$ zřejmě platí. Názorně řečeno, Lebesgueovy body jsou ty body, v nichž funkce f, ve smyslu jistého průměru, příliš neosciluje.

Následující věta (týkající se individuální funkce — nikoliv třídy ekvivalence!) podává podstatnou (a patrně vůbec ne zřejmou) informaci o velikosti množiny Lebesgueových bodů.

VĚTA. *Nechť* $f \in L^1(\mathbf{R}^k)$. *Potom skoro každý bod* $x \in \mathbf{R}^k$ *je Lebesgueovým bodem funkce* f.

Naznačme důkaz této věty. Pro $x \in \mathbf{R}^k$ a $r > 0$ položíme

$$(T_r f)(x) = \frac{1}{m(B_r)} \int_{B(x,r)} |f - f(x)|\, dm,$$
$$(Tf)(x) = \limsup_{r \to 0+} (T_r f)(x).$$

Máme dokázat, že $Tf = 0$ m-s. v. Pro spojitou funkci g je ovšem $Tg = 0$ všude, proto zkusíme f spojitými funkcemi dobře přiblížit.

Zvolme $y > 0$ a $n \in \mathbf{N}$. Víme, že existuje funkce g spojitá na $\mathbf{R}^k$ tak, že $\|f - g\|_1 < 1/n$. Pro funkci $h = f - g$ je

$$(T_r h)(x) \leqq \frac{1}{m(B_r)} \int_{B(x,r)} |h|\, dm + |h(x)|,$$

takže platí odhad $Th \leqq Mh + |h|$. Jelikož $T_r f \leqq T_r g + T_r h$ a $Tg = 0$ všude, dostáváme

$$(**) \qquad Tf \leqq Mh + |h|.$$

Nyní je vtip v tom, že funkce h je „malá" a pro maximální funkci umíme kvantitativně kontrolovat míru množiny $\{Mh > y\}$.

Je-li $x \in \mathbf{R}^k$ a $Tf(x) > 2y$, plyne z nerovnosti $(**)$ toto: buďto $Mh(x) > y$, nebo $|h|(x) > y$. Označíme-li tedy $E(y,n) = \{Mh > y\} \cup \{|h| > y\}$, platí inkluze $\{Tf > 2y\} \subset E(y,n)$. Ovšem $m(\{|h| > y\}) \leqq y^{-1}\|h\|_1 < 1/yn$. Dále již víme, že $m(\{Mh > y\}) \leqq 3^k y^{-1}\|h\|_1 < 3^k/yn$. Vidíme tedy, že $m(E(y,n)) \leqq (3^k + 1)/yn$, a protože $\{Tf > 2y\} \subset \bigcap E(y,n)$, má množina $\{Tf > 2y\}$ Lebesgueovu míru 0. Odtud plyne, že $Tf = 0$ m-s. v.

Z dokázané věty ihned dostáváme, že pro $f \in L^1(\mathbf{R}^k)$ a pro každý Lebesgueův bod x platí

$$(***) \qquad f(x) = \lim_{r \to 0+} \frac{1}{m(B_r)} \int_{B(x,r)} f\, dm.$$

Speciálně tedy platí následující tvrzení:

VĚTA. *Nechť* μ *je komplexní borelovská míra na* $\mathbf{R}^k$ *a nechť* μ *je absolutně spojitá vzhledem k* m. *Jestliže* f *je Radonova-Nikodymova derivace* μ *vzhledem k* m, *potom* $D\mu = f$ m-*s. v. a pro každou borelovskou množinu* $E \subset \mathbf{R}^k$ *platí*

$$\mu(E) = \int_E (D\mu)\, dm.$$

Další důsledek souvisí s pojmem metrické hustoty množiny.

Je-li $E \subset \mathbf{R}^k$ lebesgueovsky měřitelná, $x \in \mathbf{R}^k$ a

$$\lim_{r\to 0+} \frac{m(E\cap B(x,r))}{m(B_r)}$$

existuje, nazývá se toto číslo *metrická hustota množiny E v bodě x*. Z poslední věty (v zásadě se za f uvažuje charakteristická funkce množiny E) plyne tato tzv. *věta o hustotě*: Pro skoro všechny body z E je metrická hustota E rovna 1 (a je rovna 0 pro skoro všechny body doplňku množiny E).

V kapitole o diferencování vystupuje maximální funkce ještě jednou, a to při důkazu této věty:

VĚTA. *Nechť μ je komplexní borelovská míra a nechť μ a m jsou vzájemně singulární. Potom $(D\mu)(x) = 0$ m-s. v.*

Důkaz stačí provést pro nezápornou míru μ. Nejprve se zavádí přirozeným způsobem *horní derivace $\overline{D}\mu$*, totiž

$$(\overline{D}\mu)(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{0<r<\frac{1}{n}} (Q_r\mu)(x)\right), \quad x\in\mathbf{R}^k.$$

Snadno se nahlédne, že $\overline{D}\mu$ je borelovská funkce.

Zvolme $\lambda > 0$ a $\varepsilon > 0$. Protože μ a m jsou vzájemně singulární a míra μ je regulární, existuje kompaktní množina K taková, že $m(K) = 0$ a $\mu(K) > \|\mu\| - \varepsilon$. Označme μ_1 restrikci míry μ na K, $\mu_2 = \mu - \mu_1$. Potom $\|\mu_2\| < \varepsilon$ a pro každé $x \notin K$ platí podle definice horní derivace a definice maximální funkce

$$(\overline{D}\mu)(x) = (\overline{D}\mu_2)(x) \leqq (M\mu_2)(x).$$

Odtud dostáváme

$$\{\overline{D}\mu > \lambda\} \subset K \cup \{M\mu_2 > \lambda\},$$

takže podle dokázaného odhadu pro maximální funkci je

$$m(\{\overline{D}\mu > \lambda\}) \leqq 3^k\lambda^{-1}\|\mu_2\| < 3^k\lambda^{-1}\varepsilon.$$

Tato nerovnost platí pro každé $\lambda > 0$ a každé $\varepsilon > 0$; proto $\overline{D}\mu = 0$ m-s. v.

Shrnutím těchto poznatků se dostane toto tvrzení:

VĚTA. *Nechť μ je komplexní borelovská míra v $\mathbf{R}^k$ a nechť $\mathrm{d}\mu = f\,\mathrm{d}m + \mathrm{d}\mu_s$ je Lebesgueův rozklad míry μ vzhledem k m. Potom*

$$\lim_{r\to 0+} \frac{\mu(B(x,r))}{m(B_r)} = f(x) \quad m\text{-s. v.}$$

Speciálně míry μ a m jsou vzájemně singulární, právě když $(D\mu)(x) = 0$ m-s. v.

V zájmu přesnosti bychom měli říci, že v posledních dvou větách a v (***) připouští Rudin obecnější systémy množin, než smršťující se koule.

Takové *vhodně se smršťující* posloupnosti množin se vyskytují již ve druhém vydání [2] a příslušná tvrzení se v této obecnější situaci formulují přirozeným způsobem. Důkazy přitom fakticky nevyžadují dodatečnou práci. Zobecnění však umožňuje např. několikařádkový důkaz věty o derivování neurčitého integrálu.

Zbytek kapitoly představují výsledky o absolutně spojitých funkcích a o transformaci míry při diferencovatelných zobrazeních (věta o substituci). Tato část je také přepracována, změny jsou však koncepčně nepříliš velké, a proto se této partii nebudeme podrobněji věnovat.

V Rudinově učebnici [2] došlo tedy dvakrát k „modernizaci" výkladu o derivování — není to dostatečně výmluvné svědectví o pokroku, který zaznamenaly i vcelku klasické partie analýzy?

Literatura

[1] W. RUDIN: *Principles of Mathematical Analysis.* McGraw-Hill, Inc., New York 1953, 1964, 1976.

[1a] W. RUDIN: *Osnovy matěmatičeskogo analiza.* Mir, Moskva 1966, 1976.

[2] W. RUDIN: *Real and Complex Analysis.* McGraw-Hill Inc., New York 1966, 1974, 1987.

[2a] W. RUDIN: *Analýza v reálném a komplexním oboru.* Academia, Praha 1977.

[3] W. RUDIN: *Functional Analysis.* McGraw-Hill Inc., New York 1973.

[3a] W. RUDIN: *Funkcional'nyj analiz.* Mir, Moskva 1975.

[4] W. RUDIN: *Fourier Analysis on Groups.* McGraw-Hill Inc., New York 1962.

[5] W. RUDIN: *Function Theory in Polydiscs.* W. A. Benjamin, Inc., New York 1969.

[5a] W. RUDIN: *Těorija funkcij v polikruge.* Mir, Moskva 1974.

[6] W. RUDIN: *Function Theory in the Unit Ball of* $\mathbb{C}^n$. McGraw-Hill Inc., New York 1980.

[6a] W. RUDIN: *Těorija funkcij v jediničnom šare iz* $\mathbb{C}^n$. Mir, Moskva 1984.

[7] W. RUDIN: *New Constructions of Functions Holomorphic in the Unit Ball of* $\mathbb{C}^n$. American Mathematical Society, Providence, RI 1986.

[8] Editorial article: *1993 Steele Prizes.* Notices of the American Mathematical Society *40* (1993), pp. 973–975.