Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Wolfgang Vogel
Klasický problém teórie kriviek

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 20 (1975), No. 2, 77--83

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138558

Klasický problém teórie kriviek*)

Wolfgang Vogel, Halle

V 92. čísle časopisu Journal für reine und angewandte Mathematik z r. 1882, ktoré bolo slávnostným číslom na počesť Kummera, v článku *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen* uvádza L. Kronecker na strane 30 vetu, ktorú v dnešnom jazyku možno formulovať takto: „Ľubovoľný systém algebraických rovníc o n neznámych možno nahradiť určitým systémom najviac $n + 1$ algebraických rovníc o n neznámych tak, že množiny všetkých koreňov oboch systémov sú totožné."

Uvedieme si najprv geometrickú a modernejšiu algebraickú interpretáciu tejto vety. Na to je potrebné oboznámiť sa s pojmom algebraickej afinnej, resp. projektívnej variety.**)

Nech k je pole a nech pole K je algebraicky uzavretým rozšírením poľa k. n-rozmerným afinným priestorom A_n^K nad poľom K sa nazýva množina všetkých bodov $(z_1, \ldots, z_n)$ (t.j. usporiadaných n-tíc), ktorých (nehomogénne) súradnice $z_1, \ldots, z_n$ sú prvkami poľa K. Nech $R = k[X] = k[X_1, \ldots, X_n]$ je okruh polynómov n neurčitých nad poľom k a nech $\mathfrak{a}$ je ideál okruhu R.***) Varietou ideálu $\mathfrak{a}$ sa nazýva množina všetkých takých bodov $(z) = (z_1, \ldots, z_n)$ priestoru A_n^K, že $f(z) = 0$ pre všetky polynómy $f(X_1, \ldots, X_n) \in \mathfrak{a}$. Algebraickou afinnou varietou priestoru A_n^K (definovanou nad poľom k) sa nazýva každá podmnožina priestoru A_n^K, ktorá je varietou nejakého ideálu okruhu $k[X_1, \ldots, X_n]$. Nech V je varieta v A_n^K. Množina všetkých polynómov okruhu $k[X]$, ktoré sa anulujú každým bodom variety V, je ideál. Tento ideál, tzv. ideál variety V (ideál príslušný k V, ideál asociovaný s V), je najväčší ideál (v čiastočnom usporiadaní ideálov okruhu $k[X]$ inklúziou) okruhu $k[X]$, ktorého varietou je V. Keď ideál variety V je prvoideálom, varieta V sa nazýva ireducibilnou (nerozložiteľnou) (nad poľom k).

Analogicky sa definujú algebraické projektívne variety. n-rozmerným projektívnym priestorom P_n^K (nad poľom K) sa nazýva množina všetkých usporiadaných $(n + 1)$-tíc $(y_0, y_1, \ldots, y_n)$, $y_i \in K$, pričom $(n + 1)$-tica $(0, \ldots, 0)$ sa vylučuje a dve $(n + 1)$-tice $(y_0, \ldots, y_n)$, $(y'_0, \ldots, y'_n)$ reprezentujú ten istý bod priestoru P_n^K práve vtedy, keď sú úmerné, t.j. keď existuje taký prvok $t \in K$, $t \neq 0$, že $y'_i = ty_i$ pre $i = 0, 1, \ldots, n$. $(n + 1)$-tica $(y_0, \ldots, y_n)$ sa nazýva množinou homogénnych súradníc príslušného bodu $P \in P_n^K$. P sa

*) Tento článok bol napísaný pre Pokroky matematiky, fyziky a astronomie na základe prednášky, ktorú som predniesol na rovnomennú tému v decembri 1972 v pobočke Jednoty slovenských matematikov a fyzikov v Bratislave. Chcel by som vyjadriť srdečné poďakovanie p. J. Čižmárovi za starostlivý preklad a úpravu textu. W. V.

**) Záujemci sa môžu o týchto pojmoch podrobnejšie dočítať napr. v knize O. Zariski - P. Samuel: *Commutative algebra II*, van Nostrand, Princeton 1960, kap. VII; existuje ruský preklad O. Zarisskij - P. Samjuel: *Kommutativnaja algebra II*, Izdateľstvo inostrannoj literatury, Moskva 1963.

***) Množina M sa nazýva bázou ideálu $\mathfrak{a}$, ak najmenší ideál okruhu R obsahujúci množinu M sa rovná ideálu $\mathfrak{a}$. Platí Hilbertova veta o báze: Každý ideál okruhu polynómov R má konečnú bázu. Ideál sa nazýva hlavný, ak jeho bázu tvorí jeden prvok. Ideál $\mathfrak{p}$ sa nazýva prvoideálom, ak má nasledujúcu vlastnosť: ak pre $x \in R$, $y \in R$ súčin $xy \in \mathfrak{p}$, potom buď $x \in \mathfrak{p}$ buď $y \in \mathfrak{p}$. To je ekvivalentné s vlastnosťou: faktorový okruh $R/\mathfrak{p}$ je oblasť integrity.

nazýva koreňom homogénneho polynómu $F[X_0, \dots, X_n]$ $n + 1$ neurčitých $X_0, \dots, X_n$, ak ľubovoľná množina $(y_0, \dots, y_n)$ homogénnych súradníc bodu P spĺňa vzťah $F(y_0, \dots, y_n) = 0$. Nech $\mathfrak{a}$ je homogénny ideál okruhu polynómov $k[X_0, \dots, X_n]$, t.j. $\mathfrak{a}$ má (konečnú) bázu, ktorá sa skladá z homogénnych polynómov. Varietou ideálu $\mathfrak{a}$ sa nazýva množina všetkých bodov priestoru P_n^K, ktoré sú koreňmi všetkých polynómov ideálu $\mathfrak{a}$. Algebraickou projektívnou varietou V priestoru P_n^K (definovanou nad poľom k) sa nazýva každá podmnožina priestoru P_n^K, ktorá je varietou nejakého homogénneho ideálu okruhu $k[X_0, \dots, X_n]$. V sa nazýva opäť ireducibilnou, ak je varietou (homogénneho) prvoideálu. Algebraická varieta (afinná alebo projektívna) sa nazýva nadplochou, ak je varietou hlavného ideálu. Nech V je ireducibilná projektívna varieta a $k(V)$ pole racionálnych funkcií na variete V, t.j. $k(V) = k(x_0/x_s, \dots, x_n/x_s)$, kde $x_i (i = 0, 1, \dots, n)$ sú triedy neurčitých X_i modulo prvoideál variety V a $x_s \neq 0$ (s je niektoré z čísel $0, 1, \dots, n$). Stupeň transcendentnosti poľa $k(V)$ nad poľom k sa nazýva rozmerom variety V. Keď V nie je ireducibilná, možno ju vyjadriť ako (konečné) zjednotenie ireducibilných variet V_i a rozmerom variety V sa nazýva maximum rozmerov variet V_i.

Kroneckerova veta uvedená na začiatku teraz znamená: Každá algebraická afinná varieta v n-rozmernom afinnom priestore je priesekom najviac $n + 1$ nadplôch. Špeciálne: Každá algebraická afinná krivka v trojrozmernom priestore je priesekom najviac štyroch plôch.

Van der Waerden v práci [1] poukázal na to, že táto horná hranica, t.j. $n + 1$, sa vzťahuje aj na algebraické projektívne variety.

Po predchádzajúcej príprave môžeme pristúpiť k ústrednej téme tohto článku – ku klasickému problému teórie kriviek.

Klasický problém teórie kriviek formulovaný v podobe hypotézy znie takto: Každá algebraická projektívna ireducibilná krivka trojrozmerného projektívneho priestoru je priesekom dvoch plôch.

Prv než sa pustíme do hlbších úvah o tomto probléme, uvedieme si precíznejšiu algebraickú formuláciu Kroneckerovej vety, na ktorej sa tieto úvahy zakladajú.

Nech R je okruh (komutatívny, s jednotkovým prvkom) a nech $\mathfrak{a}$ je ideál okruhu R. Radikálom ideálu $\mathfrak{a}$ – označenie rad $(\mathfrak{a})$ alebo $\sqrt{\mathfrak{a}}$ – sa nazýva množina všetkých takých prvkov b okruhu R, že istá mocnina prvku b leží v $\mathfrak{a}$; rad $(\mathfrak{a})$ je opäť ideál okruhu R.

Zostrenie Kroneckerovej vety van der Waerdenom možno formulovať a dokázať v tomto tvare: Ak $\mathfrak{a}$ je homogénny ideál okruhu $k[X_0, \dots, X_n)$, pričom $\mathfrak{a} = (F_1, \dots, F_s)$, $s > n + 1$, a $F_1, \dots, F_s$ je minimálna báza ideálu $\mathfrak{a}$, potom existuje aspoň jeden taký homogénny ideál $\mathfrak{b} \subset k[X_0, \dots, X_n]$, že $\mathfrak{b} = (G_1, \dots, G_t)$, rad $(\mathfrak{a})$ = rad $(\mathfrak{b})$ a $t \leqq n + 1$.

Dôkaz tejto vety pomocou teórie ideálov zachádza do príliš špeciálnych algebraických podrobností, ktorých uvedenie v článku naznačeného zamerania považujem za neúčelné.*)

*) Pre záujemcov: S metódami a prostriedkami potrebnými na dôkaz vety možno sa oboznámiť v knihe W. Gröbner: *Moderne algebraische Geometrie*, Springer-Verlag, Wien—Innsbruck 1949, a článku B. Renschuch: *Verallgemeinerung des Bézoutschen Satzes*, Sitzungsberichte der Sächsischen Akademie der Wissenschaften, Math.-Naturwiss. Kl., Band *107*, Heft 4 (1966), Leipzig.

Kronecker uviedol vetu bez podrobného dôkazu. Jej dôkaz v klasickej formulácii sa nachádza napr. v knihe J. König: *Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Grössen*, Leipzig 1903; nie je však elementárny ani priehľadný.

Je prirodzené, že ďalšie úsilie v súvise s Kroneckerovou vetou sa zameriavalo na spresnenie hranice uvedenej Kroneckerom. Pokusy pokračovali dvoma smermi: 1. ukázať, že hranica je minimálna; 2. ukázať, že hranicu možno znížiť. Úspešný výsledok v prípade 2. by pre priestorové krivky znamenal: Každú priestorovú algebraickú krivku možno vyjadriť ako priesek plôch, ktorých počet je menší ako štyri. Ako prípad, v ktorom toto tvrdenie údajne nie je správne, uviedol VAHLEN v [2] príklad reducibilnej priestorovej krivky, ktorá sa dostane ako úplný prienik určitej kvadratickej plochy a ďalších troch plôch a skladá sa z racionálnej priestorovej krivky 5. stupňa a jednej sečnice spomenutej kvadratickej plochy. Podľa Vahlenových výpočtov každé tri plochy obsahujúce uvedenú krivku musia mať okrem krivky spoločné ešte ďalšie body s krivkou disjunktné. To znamenalo, že uvedenú krivku nemožno vyjadriť ako prienik menej než štyroch plôch; to ďalej znamenalo, že pre $n = 3$, a tým aj všeobecne, hranica $n + 1$ uvedená Kroneckerom je minimálna. Päťdesiat rokov slúžil Vahlenov príklad za základ uvedeného tvrdenia; s uznaním sa citoval v literatúre a dostal sa aj do encyklopédií. Až O. PERRON v [3] postrehol, že Vahlenova argumentácia nie je správna. Ukázal, že už tri kužeľové plochy, ktoré sa dostanú z parametrického vyjadrenia krivky elimináciou parametru, nemajú okrem krivky žiadne spoločné body. O. Perron v [3] na strane 319 píše: „Tak sa dnes náhle opäť stáva otvorenou otázka, ktorá sa považovala 50 rokov za vybavenú, totiž, či existujú priestorové (algebraické krivky), ktoré nemožno vyjadriť ako prienik menej než štyroch plôch. Dokonca viac. Možno oprávnene predpokladať, že Vahlenovu krivku možno vyjadriť ako prienik len dvoch plôch. Takéto vyjadrenie sa mi nepodarilo doteraz nájsť, ale nemohol som dokázať ani jeho nemožnosť. A vôbec, pri tejto príležitosti chcel by som prehlásiť, že doteraz nie je známa ani jediná krivka, ktorú by dokázateľne nebolo možné vyjadriť ako prienik dvoch plôch.“ (To je tzv. klasický problém teórie kriviek – pozri vyššie.)

Ako prvému sa po 80 rokoch podarilo spresniť Kroneckerom stanovenú hranicu pre priestorové krivky M. KNESEROVI v [4]. Výsledok hovorí v súhrne toto: Každá algebraická (reducibilná alebo ireducibilná) priestorová krivka (v A_3^K alebo P_3^K) je priesekom najviac troch plôch.

Rozhodujúcim pomocným prostriedkom pre dôkaz tohto tvrdenia je nasledujúca lema ([4]): Nech M pozostáva z konečného počtu priamok prechádzajúcich bodom P_0 a nech je daný konečný počet bodov $P_1, \ldots, P_r$ na M. (O všetkom je reč v A_3^K alebo P_3^K.) Potom existuje homogénny polynóm, ktorý sa anuluje v každom z bodov $P_0, P_1, \ldots, P_r$ a neanuluje sa v žiadnom ďalšom bode množiny M.

Výsledok analogický k výsledku M. Knesera sa medzičasom nezávisle získal pre variety ľubovoľného rozmeru v [5] (pre afinný prípad) a v [6]. Výsledky možno zhrnúť takto: Každá algebraická (ireducibilná alebo reducibilná) varieta (v A_n^K alebo P_n^K) je prienikom najviac n nadplôch.

Tým sa po 90 rokoch o 1 znížila hranica uvedená Kroneckerom. Dôkazy v [5] a [6] sú úplne elementárne a poskytujú z algebraickej stránky viac než obsahuje zúžené geometrické chápanie. Tieto dôkazy predstavujú algebraickú modifikáciu idey M. Knesera v [4]. Vo výsledkoch nehrá žiadnu rolu okolnosť, či sú variety ireducibilné alebo reducibilné. Táto vlastnosť je však významná v probléme teórie kriviek. Tak napr. R. HARTSHORNE v [7], 3.4.1 ukázal, že reducibilnú priestorovú krivku v P_3^K (K – pole komplexných čísel) definovanú ideálom $\mathfrak{a} = (X_0, X_1) \cap (X_2, X_3) \subset k[X_0, X_1, X_2, X_3]$ nemožno nijakým spôsobom vyjadriť ako prienik dvoch plôch. Tento problém v rovnakej súvislosti neskôr rozoberal (nezávisle od [7] a homologickými metódami) L. Budach v [8]. Azda nie je bez zaujímavosti, že príklady takéhoto druhu bolo možné získať už pomocou výsledkov J. - P. Serrea ([9]) (pozri napr. [7], 3.4.6). Tak klasický problém, teórie kriviek sformulovaný v úvode článku zostáva naďalej otvorený.

Na začiatku šesťdesiatych rokov sa vyskytli pokusy spracovať klasický problém teórie kriviek homologickými metódami. Zdalo sa, že na tento účel bude vhodná metóda lokálnej kohomológie.*) Očakávalo sa najmä, že pomocou nej sa získa negatívna odpoveď na klasický problém teórie kriviek. L. Budach v [8] a R. Hartshorne v [10] zistili, že ireducibilnú priestorovú krivku $X \subset P_3^K$, u ktorej pre koherentný zväzok F grupa kohomológií $H^2(P_3^K - X, F) \neq 0$, nemožno vyjadriť ako prienik dvoch plôch. Hlavný výsledok práce [10] (second vanishing theorem) však ukazuje, že priestorové krivky uvedenej vlastnosti neexistujú; tým sa len ukázalo, že pomocou týchto homologických metód sa nepodarilo skonštruovať príklad vyvracajúci hypotézu obsiahnutú v klasickom probléme teórie kriviek. Napriek tomu však použitie homologických metód, ktoré je zaujímavé samo o sebe, poskytuje nové a dôležité poznatky o probléme teórie kriviek; tu sú značne významné aj konkrétne prípady (napr. [11]). Tak napr. sa zistilo o často študovanej ireducibilnej (nedokonalej) priestorovej krivke v P_3^K s definujúcim ideálom

$\mathfrak{p} = (X_0^2 X_2 - X_1^3, X_0 X_3 - X_1 X_2, X_0 X_2^2 - X_1^2 X_3, X_1 X_3^2 - X_2^3) \subset k[X_0, X_1, X_2, X_3]$**), že v prípade, keď charakteristika poľa K nie je 0, možno krivku vyjadriť ako prienik dvoch plôch. Napr. pri charakteristike 2 platí:

$$\mathfrak{p} = \operatorname{rad}(X_1^4 - X_0^3 X_3, X_2^4 - X_0 X_3^3) .$$

R. Hartshorne v [11], 5.17 a 5.18 (str. 126) sa domnieva, že túto Macaulayovu priestorovú krivku pri charakteristike 0 nemožno vyjadriť nijakým spôsobom ako prienik dvoch plôch, t.j. očakáva zápornú odpoveď na klasický problém teórie kriviek. Naproti tomu B. Renschuch z Postupimu v niekoľkých rozhovoroch so mnou vyjadril nádej, že táto priestorová krivka je prienikom dvoch plôch pri každej charakteristike. Domnieva sa, že toto tvrdenie sa dostane pomocou elementárnych úvah z istej všeobecnej vety o Veroneseho varietách a ich istých projekciách.

Štúdium s použitím kohomologických metód dalo okrem toho podnet k nasledujúcemu zovšeobecneniu výsledku M. Knesera:

Problém ([11], 5.19, str. 126): Možno vyjadriť každú d-rozmernú ireducibilnú varietu $V \subset P_n^K$ ako prienik najviac $2n - 2d - 1$ nadplôch?

Pre $n \geqq 4$ je tento problém úplne otvorený. Preto autor tohto článku skúma v [12] nasledujúcu otázku: Predpokladajme ako známe, že zadanú varietu V (reducibilnú alebo ireducibilnú) v priestore A_n^K alebo P_n^K možno vyjadriť ako prienik m nadplôch: $V = H_1 \cap \ldots \cap H_m$. Otázka znie, či možno nájsť kritérium pre minimalitu čísla m.

*) Informácie o nej možno nájsť napr. v monografii A. Grothendieck: *Local cohomogy*, Lecture notes Math. 41, Springer-Verlag 1967.

**) Túto krivku uviedol už r. 1916 F. S. Macaulay v knihe *Algebraic theory of modular systems*, Cambridge tracts No *19*, Cambridge 1916

V [12] sa pre to nachádza dostačujúca podmienka na základe správania sa dvoch vhodných lokálnych grúp kohomológií. Nová myšlienka v porovnaní s doterajšími postupmi tu spočíva v tom, že sa berie do úvahy lokálna kohomológia nadplochy H_i, $1 \leqq i \leqq m$, $m \geqq 4$. Dôsledok 2 v [12] obsahuje implicitne aj hypotézu, ktorú teraz sformulujeme explicitne.

Hypotéza ([12]): Každá ireducibilná (algebraická) varieta v P_n^K ($n \geqq 4$) je prienikom najviac $n - 1$ nadplôch.

Dôkaz tejto hypotézy by bol zrejmý, keby sa ukázalo, že dostačujúca podmienka vo vete z [12] je aj nutnou podmienkou. Platnosť hypotézy by potom vyplynula zo [6] a dôsledku 2 v [12].

Doterajšie skúmanie pre $n \geqq 4$ ukazuje podstatnú odlišnosť pomerov, ktoré tu nastanú v porovnaní s prípadom $n = 3$. V [7] sa napr. ukazuje, že analógia klasického problému teórie kriviek v P_4^K neplatí. Študuje sa tu dvojrozmerná varieta $V \subset P_4^K$, ktorú nemožno vyjadriť ako prienik dvoch nadplôch. V je definovaná týmto prvoideálom:

$$\mathfrak{p} = (Q, K_1, K_2, K_3) \subset K[X_1, X_2, X_3, X_4],$$

kde $Q = X_1X_4 - X_2X_3$, $K_1 = X_1^2X_3 + X_1X_2 - X_2^2$, $K_2 = X_1X_3^2 + X_2X_3 - X_2X_4$, $K_3 = X_3^3 + X_3X_4 - X_4^2$.

V [12] sa ukazuje, že

$$\mathfrak{p} = \operatorname{rad}(Q, K_1, K_3)\,.$$

Tento príklad podporuje vyššie sformulovanú hypotézu.

Na záver tohto odseku treba súhrnne povedať, že rozriešiť klasický problém teórie kriviek pomocou kohomologických metód nie sme doteraz schopní.

Doteraz bola reč len o algebraických krivkách. Rozdiel medzi algebraickými a analytickými priestorovými krivkami vystihuje nasledujúca veta od O. Forstera a K. J. Ramspotta*): Každá analytická krivka X bez singularít v C^3 je úplným prienikom, t.j. ideál všetkých celých holomorfných funkcií anulujúcich sa na X v C^3 možno generovať dvoma prvkami.

Ďalej sa v tejto práci poznamenáva, že vetu možno rozšíriť aj na odpovedajúce krivky vo viacrozmerných analytických priestoroch a že neplatí pre odpovedajúce algebraické priestorové krivky.

V doterajšom výklade sme hľadali pre danú varietu V minimálny počet nadplôch H_i, $1 \leqq i \leqq m$, tak, aby platilo:

$$V = H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_m\,.$$

Túto formuláciu budeme odteraz podľa novšie zavedeného spôsobu vyjadrovania nazývať „množinovou" formuláciou. V zmysle toho sa bude upresnene hovoriť o množinovom (klasickom) probléme teórie kriviek. Oproti tomu hovoríme o ideálovej formulácii, čím sa mieni nasledujúce: Podľa definície noetherovského okruhu je každý ideál takéhoto okruhu generovaný konečným počtom prvkov. Nič sa však nehovorí o tom, koľko prvkov treba na generovanie ideálu. I. S. Cohen v práci *Commutative rings with*

*) O. Forster - K. J. Ramspott: *Über die Darstellung analytischer Mengen*, Bayer. Akad. Wiss., Math.-Natur. Kl., S.-B., Jahrg. 1963, 89—99

restricted minimum condition, Duke Math. J. *17* (1950), 27—42, popísal okruhy, pre ktoré existuje také prirodzené číslo k, že každý ideál okruhu má bázu pozostávajúcu najviac z k prvkov. Je to pomerne úzka trieda okruhov, ktoré všetky majú Krullov rozmer $\leqq 1$. (Do tejto triedy patria, prirodzene, okruhy hlavných ideálov a Dedekindove okruhy.) Vo všetkých ostatných okruhoch, najmä v okruhoch polynómov viac ako jednej neurčitej, existuje ku každému prirodzenému číslu n ideál, na generovanie ktorého treba aspoň n prvkov. Tento fakt však nevylučuje možnosť horného odhadu minimálneho počtu generátorov pre špeciálne triedy ideálov. Vieme napríklad, že v okruhu v polynómov n neurčitých nad poľom má každý maximálny ideál bázu pozostávajúcu z n prvkov. Táto formulácia problému o minimálnom počte generátorov ideálu v noetherovskom okruhu zjednotila a na spoločný základ uviedla rozmanité problémy zdanlivo rôznorodej povahy. Pretože nie je predmetom tohto článku podrobne popisovať vývoj situácie, načrtnem len stručne dôležité etapy. Prvé významné výsledky v tejto oblasti prináša práca O. Forstera [13], ktorá obsahuje predovšetkým v terminológii okruhov formuláciu a zovšeobecnenie vety L. Kroneckera uvedenej na začiatku tohto článku.

Vyjadrenie množinového problému teórie kriviek v terminológii okruhov a ideálov by znelo: Aký je minimálny počet generátorov definujúceho prvoideálu ireducibilnej algebraickej priestorovej krivky?

Avšak už F. S. Macaulay vo vyššie citovanej knihe ukázal, že ku každému prirodzenému číslu n existuje ireducibilná algebraická priestorová krivka, ktorej príslušný ideál je generovaný aspoň n prvkami. Všetky tieto priestorové krivky majú však singulárny bod. Preto treba problém teórie kriviek v ideálovom chápaní zúžiť na nesingulárne priestorové krivky. Ideálové chápanie problému teórie kriviek teraz znamená, že ideál nesingulárnej ireducibilnej algebraickej priestorovej krivky v A_3^K generujú dva prvky. Pre priestorové krivky v P_3^K to všeobecne nenastáva, ako sa možno o tom ľahko presvedčiť pomocou Bézoutovej vety*).

Uvedený ideálový problém skúmal geometrickými metódami S. S. Abhyankar v monografii *Algebraic space curves*, Montreal lecture notes, Montreal 1970, a v dodatku *Supplements to Algebraic space curves*, Montreal 1971. Najprv ukázal, že tri prvky vždy stačia na generovanie ideálu krivky. Ďalej uviedol špeciálne prípady, v ktorých ideálový problém teórie kriviek platí (K je algebraicky uzavreté). M. P. Murthy v práci *Generators for certain ideals in regular rings of dimension three,* Comment. Math. Helv. *47* (1972), 179—184, uvádza príklady nesingulárnych afinných kriviek v A_3^K, ktorých prvoideály nie sú generované dvoma prvkami. M. I. Krusenmayer v práci *Fundamental groups, algebraic K-theory and a problem of Abhyankar,* Doctoral dissertation, University of Utrecht (The Nederlands), 1972, aplikuje na takto definovanú otázku K-teóriu.

Celý rad prác týkajúcich sa tohto rozsiahleho okruhu otázok sme nespomenuli a nerozobrali. Avšak už tá literatúra, ktorá sa uvádzala, poukazuje na to, akými rozmanitými metódami sa v poslednom čase spracúva množinový aj ideálový problém teórie kriviek.

Zostáva nám len očakávať, kedy a akými metódami sa podarí množinový klasický problém teórie kriviek úplne vyriešiť.

---

*) Záujemci to môžu nájsť v práci L. Szpiro: *Variétés de codimension 2 dans P^n*, Colloque d'algèbre de Rennes, Rennes 1972

Literatúra

[1] VAN DER WAERDEN, B. L.: *Referat zur Arbeit „Über das Vahlensche Beispiel zu einem Satz von Kronecker" von O. Perron*, Zentralblatt für Math. *24* (1941), 276.

[2] VAHLEN, K. T.: *Bemerkung zur vollständigen Darstellung algebraischer Raumkurven*, J. reine u. angew. Math. *108* (1891), 346—347.

[3] PERRON, O.: *Über das Vahlensche Beispiel zu einem Satz von Kronecker*, Math. Z. 47 (1941), 318—324.

[4] KNESER, M.: *Über die Darstellung algebraischer Raumkurven als Durchschnitt von Flächen*, Arch. Math. (Basel) *11* (1960), 11—12.

[5] STORCH, U.: *Bemerkung zu einem Satz von M. Kneser*, Arch. Math. (Basel) *23* (1972), 403—404.

[6] EISENBUD, Z. and E. G. EVANS, JR.: *Every algebraic set in n-space is the intersection of n hypersurfaces*, Inventiones math. *19* (1073), 107—112.

[7] HARTSHORNE, R.: *Complete intersections and connectedness*, Amer. J. Math. *84* (1962), 497—508.

[8] BUDACH, L.: *Quotientenfunktoren und Erweiterungstheorie*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1967.

[9] SERRE, J. - P.: *Faisceaux algébriques cohérents*, Ann. of Math. *61* (1955), 197—278.

[10] HARTSHORNE, R.: *Cohomological dimension of algebraic varieties*, Ann. of Math. *88* (1968), 403—450.

[11] HARTSHORNE, R.: *Ample subvarieties of algebraic varieties*, Lecture notes math. *156*, Springer-Verlag 1970.

[12] VOGEL, W.: *Eine Bemerkung über die Anzahl von Hyperflächen zur Darstellung algebraischer Varietäten*, Monatsb. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin *13* (1971), *629*—633.

[13] FORSTER, O.: *Über die Anzahl der Erzeugenden eines Ideals in einem noetherschen Ring*, Math. Z. *84* (1964), 80—87.

Matematika je věda, která dává nejlepší příležitost pozorovat proces myšlení a má tu přednost, že při jejím pěstování nabýváme cviku v metodě rozumového uvažování, které může být potom používáno ke studiu kteréhokoliv předmětu.

G. PÓLYA