Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Jiří Vanžura

O pátém Hilbertově problému (existence struktury Lieovy grupy na lokálně euklidovské topologické grupě)

*Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, Vol. 17 (1972), No. 2, 68--78

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/138523`

# O PÁTÉM HILBERTOVĚ PROBLÉMU

## (existence struktury Lieovy grupy na lokálně euklidovské topologické grupě)

JIŘÍ VANŽURA, Praha

Pátý problém je jedním z již vyřešených Hilbertových problémů. Jeho řešení nám poskytlo hluboký pohled do základů geometrie.

Čtenáři který sleduje tento seriál v PMFA, je již jistě známo, že i o tomto problému se může dočíst v knize *Problemy Gil'berta*. Zde referuje o pátém problému E. G. SKLJARENKO. Jeho referát obsahuje velmi podrobnou historii řešení problému, může však být srozumitelný pouze čtenáři, který je alespoň částečně obeznámen s teorií topologických a Lieových grup. Chci proto v tomto článku především poskytnout možnost seznámit se s pátým Hilbertovým problémem i tomu čtenáři, který se nikdy o topologické a Lieovy grupy nezajímal a tak zcela vědomě odsunuji historii až na druhé místo. U čtenáře se bude předpokládat pouze znalost základů obecné topologie.

Zájemcům o podrobné řešení problému doporučuji výbornou knihu D. MONTGOMERYHO a L. ZIPPINA *Topological transformation groups* (viz [1]). V závěru článku bude též uvedeno možné zobecnění pátého Hilbertova problému a povšimneme si, čeho se již v tomto směru dosáhlo.

*

Pojem grupy se objevuje v geometrii v druhé polovině minulého století při studiu kolineací projektivního prostoru a záhy zde získává centrální postavení. Stačí jistě připomenout, že již v roce 1872 FELIX KLEIN ve známém *Erlangenském programu* (viz [2], [3] Kapitola V) definuje geometrii jako studium invariantů podgrup grupy kolineací projektivního prostoru. Pozornost matematiků se zpočátku soustřeďuje na algebraickou stránku věci.

Problémy spojitosti a diferencovatelnosti u těchto grup transformací se jako první zabývá německý matematik původem z Norska, SOPHUS LIE (viz [4]). Lie dospívá k pojmu spojité grupy transformací (dnes známé spíše pod názvem topologická grupa operující na topologickém prostoru nebo Lieova grupa operující na diferencovatelné varietě), má však velké potíže se striktními formulacemi, protože nemá k dispozici moderní topologický aparát.

Spojité grupy transformací se pak intenzívně studují, stále však jako grupy transformací v klasických geometrických prostorech. Teprve v pracích L. E. J. BROUWERA (viz [5]) z doby kolem roku 1910 se setkáváme s pojmem spojité (= topologické) grupy, která není vázána na žádný prostor. Trvá to však ještě dvacet let než je topologickým a Lieovým grupám věnována systematická pozornost. Stále se ještě čeká na aparát obecné topologie. Teprve koncem dvacátých let tohoto století se začíná rozvíjet celá nová matematická disciplína, nazývaná dnes topologickou algebrou. Jejími zakladateli se stávají L. S. PONTRJAGIN a JOHN VON NEUMANN. A ústředním pojmem této disciplíny je právě pojem topologické grupy.

Současně s rozvojem topologické algebry se objevuje i nová vlna zájmu o Lieovy grupy. Za nejdůležitější výsledky v teorii Lieových grup z této doby vděčíme ELIE CARTANOVI a HERMANNU WEYLOVI. Lieova grupa dostává striktní definici a v souvislosti s tím také pátý Hilbertův problém je formulován v moderním přesném jazyce. Naším prvním cílem nyní bude dospět k takovéto formulaci Hilbertova problému.

Seznámíme se nejprve s topologickými grupami. *Topologická grupa* $G$ je množina, která má na sobě dvě struktury – strukturu grupy a strukturu topologického prostoru, přičemž obě struktury jsou spolu vázány těmito podmínkami:

(1) zobrazení $G \times G \to G$ tvaru $(g_1, g_2) \hookrightarrow g_1 g_2$ je spojité,

(2) zobrazení $G \to G$ tvaru $g \hookrightarrow g^{-1}$ je rovněž spojité.

$G \times G$ zde uvažujeme s topologií kartézského součinu.

Budeme říkat, že *topologická grupa $G$ operuje zprava na topologickém prostoru $X$*, je-li dáno spojité zobrazení $X \times G \to X$ ($X \times G$ má opět topologii kartézského součinu) přiřazující dvojici $(x, g) \in X \times G$ prvek $xg \in X$, přičemž

(1) $xe = x$ pro všechna $x \in X$, kde $e$ je jednotkový prvek grupy $G$,

(2) $(xg_1)\, g_2 = x(g_1 g_2)$ pro všechna $x \in X$, $g_1\, g_2 \in G$.

Zcela analogicky se definuje *operace zleva.*

*Lokální grupa* $L$ je množina, která má na sobě rovněž dvě struktury. Je to jednak algebraická parciální binární struktura (tj. pro některé dvojice prvků z $L$ je definován jejich součin ležící rovněž v $L$), která je asociativní a má jednotkový prvek, jednak struktura souvislého topologického prostoru. Přitom musí být splněny tyto podmínky:

(1) Je-li pro dva prvky $l_1, l_2 \in L$ definován součin $l_1 l_2$, potom existuje okolí $U_1$ prvku $l_1$ a okolí $U_2$ prvku $l_2$ takové, že pro libovolné dva prvky $l'_1 \in U_1$, $l'_2 \in U_2$ je součin $l'_1 l'_2$ definován. Značí-li $D \subset L \times L$ množinu všech dvojic $(l_1, l_2)$, pro které je součin $l_1 l_2$ definován, potom zobrazení $D \to L$ zadané předpisem $(l_1, l_2) \hookrightarrow l_1 l_2$ je spojité.

(2) Existuje-li k prvku $l \in L$ prvek inverzní $l^{-1}$, potom lze nalézt okolí $U$ prvku $l$ takové, že pro každé $l' \in U$ existuje $l'^{-1}$. Značí-li $I \subset L$ množinu všech prvků $l$, pro něž $l^{-1}$ existuje, potom zobrazení $I \to L$ zadané předpisem $l \hookrightarrow l^{-1}$ je spojité.

Čtenář se může nyní sám snadno přesvědčit, že aditivní grupa $\boldsymbol{R}^n$ $n$-tic reálných čísel a multiplikativní grupa $GL(n, \boldsymbol{R})$ všech regulárních matic typu $(n, n)$ jsou topologické grupy. $\boldsymbol{R}^n$ bereme s obvyklou topologií; $GL(n, \boldsymbol{R})$ chápeme jako otevřenou podmnožinu v $\mathbf{R}^{n^2}$. Ihned je také vidět, že libovolná podgrupa topologické grupy s indukovanou topologií je topologická grupa. Násobení vektoru z $\mathbf{R}^n$ maticí z $GL(n, \mathbf{R})$ zprava (zleva) je operací zprava (zleva) topologické grupy $GL(n, \mathbf{R})$ na topologickém prostoru $\mathbf{R}^n$. Vezmeme-li souvislé otevřené okolí $L$ jednotkového prvku topologické grupy a na něm indukovanou topologii, dostáváme příklad lokální grupy. Lokálně grupový součin dvou prvků $l_1$, $l_2 \in L$ je definován právě tehdy, jestliže jejich grupový součin $l_1 l_2$ leží v $L$.

V dalším budeme směřovat k pojmu Lieovy grupy. Za tím účelem se však musíme nejprve seznámit s pojmem variety. Začneme několika definicemi. Buď $V$ topologický prostor. *Mapa na topologickém prostoru* $V$ je každá dvojice $(U, \varphi)$, kde $U$ je otevřená podmnožina ve $V$ a $\varphi : U \to \varphi(U)$ je homeomorfismus $U$ na otevřenou množinu v euklidovském prostoru $\mathbf{R}^n$. Číslo $n$ se v takovém případě nazývá dimenze mapy $(U, \varphi)$. S použitím přirozeného kartézského souřadnicového systému $(x_1, \ldots, x_n)$ na $\mathbf{R}^n$ dostáváme na otevřené množině $U$ $n$-tici reálných funkcí tvaru $(x_1 \circ \varphi, \ldots, x_n \circ \varphi)$. Tyto funkce se nazývají *souřadnice* (*souřadnicový systém*) na $U$. Je samozřejmé, že ne na každém topologickém prostoru existují mapy. Nás však budou nyní zajímat právě ty speciální topologické prostory, na nichž mapy existují.

Než budeme nyní pokračovat, připomeňme ještě jednu známou definici. Je-li $f$ zobrazení otevřené množiny $A \subset \mathbf{R}^m$ do otevřené množiny $B \subset \mathbf{R}^n$, potom toto zobrazení můžeme vyjádřit pomocí $n$ funkcí $m$ proměnných ve tvaru $f = (f^1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f^n(x_1, \ldots, x_m))$. Značí-li $r$ celé nezáporné číslo, potom řekneme, že *zobrazení* $f$ je *$r$-krát spojitě diferencovatelné*, má-li každá z funkcí $f^1, \ldots, f^n$ na $A$ spojité parciální derivace až do řádu $r$ včetně. Pod pojmem funkce má na $A$ spojité parciální derivace až do řádu 0 včetně myslíme ovšem, že tato funkce je na $A$ spojitá. Dále budeme říkat, že *zobrazení $f$* je *$\infty$-krát* (*$\omega$-krát*) *spojitě diferencovatelné*, má-li každá z funkcí $f^1, \ldots, f^n$ na $A$ spojité parciální derivace všech řádů (je-li každá z funkcí $f^1, \ldots, f^n$ na $A$ reálná analytická, tj. v okolí každého bodu z $A$ rozvinutelná v konvergentní mocninnou řadu).

Nechť $r$ nyní značí nezáporné celé číslo, symbol $\infty$ nebo symbol $\omega$. *Atlas třídy $C^r$ na topologickém prostoru* $V$ je systém map $\{(U_i, \varphi_i); i \in I\}$ stejné dimenze na tomto prostoru ($I$ je nějaká indexová množina), pro který platí:

(1) množiny $U_i$ pokrývají $V$,

(2) pro libovolné dva indexy $i, j \in I$ takové, že $U_i \cap U_j \neq 0$ je zobrazení $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ : : $\varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$ $r$-krát spojitě diferencovatelné.

Zde $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ a $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ jsou otevřené množiny v $\mathbf{R}^n$.

Zobrazení $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ je ovšem vždy 0-krát spojitě diferencovatelné. Předpokládejme nyní, že na $V$ je dán atlas $\mathscr{A}$ třídy $C^r$. Mapa $(U, \varphi)$ téže dimenze jako jsou mapy atlasu $\mathscr{A}$ se nazývá *mapa $C^s$ – vázaná s atlasem $\mathscr{A}$*$(s \leqq r)$, jestliže pro každé $i \in I$, pro něž $U \cap U_i \neq 0$ je zobrazení $\varphi \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U \cap U_i) \to \varphi(U \cap U_i)$ $s$-krát spojitě diferencovatelné. Atlas třídy $C^r$, který má tu vlastnost, že každá mapa s ním $C^r$– vázaná do tohoto atlasu patří, se nazývá *úplný atlas třídy $C^r$*. Je jasné, že každý atlas třídy $C^r$ může být doplněn na úplný atlas třídy $C^r$ tak, že k němu všechny mapy s ním vázané prostě přidáme.

*Varieta třídy* $C^r$ je topologický prostor, na němž je dán úplný atlas třídy $C^r$. Číslo $n$, které je dimenzí všech map atlasu, se nazývá *dimenze variety*. Bývá zvykem místo varieta třídy $C^0$ říkat *topologická varieta*, místo varieta třídy $C^\infty$ *diferencovatelná varieta* a místo varieta třídy $C^\omega$ (*reálná*) *analytická varieta*. K zadání struktury variety stačí na topologickém prostoru zadat jakýkoli atlas, protože každý atlas lze doplnit na úplný, jak víme z dřívějška. Tak si povšimněme, že na euklidovském prostoru $\mathbf{R}^n$ stačí k zadání struktury analytické variety jediná mapa $(\mathbf{R}^n, \mathrm{id})$, kde id je identické zobrazení $\mathbf{R}^n$ na sebe. Čtenář se může sám přesvědčit, že na otevřené podmnožině variety třídy $C^r$ lze kanonickým způsobem (zúžením map) zavést strukturu variety třídy $C^r$. Dimenze otevřené množiny jako variety je přitom stejná jako dimenze původní variety. Rovněž celkem snadno lze ukázat, že na kartézském součinu dvou variet téže třídy $C^r$ lze kanonickým způsobem (kartézským vynásobením map) zavést strukturu variety třídy $C^r$. Má-li první varieta dimenzi $m$ a druhá $n$, potom jejich kartézský součin má dimenzi $m + n$. Za malou chvíli se setkáme s dalšími, méně triviálními příklady variet.

Uvažujme nyní dvojici variet, varietu $V_1$ třídy $C^r$ s úplným atlasem $\mathscr{A}_1$ a varietu $V_2$ téže třídy $C^r$ s úplným atlasem $\mathscr{A}_2$. Spojité zobrazení $f : V_1 \to V_2$ budeme nazývat *zobrazení třídy* $C^s(s \leqq r)$ variety $V_1$ do variety $V_2$, je-li splněna tato podmínka:

(*) je-li $(U_1, \varphi_1)$ mapa z atlasu $\mathscr{A}_1$ a $(U_2, \varphi_2)$ mapa z atlasu $\mathscr{A}_2$, přičemž $f(U_1) \subseteq$ $\subseteq U_2$, potom zobrazení $\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1) \to \varphi_2(U_2)$ je $s$-krát spojitě diferencovatelné.

V případě $r = s = \infty$ bývá zvykem místo termínu zobrazení třídy $C^\infty$ používat termínu *diferencovatelné zobrazení* a v případě $r = s = \omega$ místo zobrazení třídy $C^\omega$ říkat (*reálné*) *analytické zobrazení*. Povšimněte si toho, že podmínka (*) neříká nic jiného, než že vyjádříme-li si zobrazení $f$ pomocí libovolných vhodných souřadnicových systémů na $V_1$ a $V_2$ ve tvaru funkcí více proměnných, potom tyto funkce jsou $s$-krát spojitě diferencovatelné. Je-li dim $V_1 = m$ a dim $V_2 = n$, potom $\varphi_1(U_1)$ je otevřená množina v $\mathbf{R}^m$ a $\varphi_2(U_2)$ otevřená množina v $\mathbf{R}^n$. Použijeme-li kartézského souřadnicového systému $(x_1, \ldots, x_m)$ na $\mathbf{R}^m$ a kartézského souřadnicového systému $(y_1, \ldots, y_n)$ na $\mathbf{R}^n$, potom zobrazení $\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1}$ lze psát ve tvaru

$$y_1 = f^1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, y_n = f^n(x_1, \ldots, x_m) .$$

Nyní již máme připraveny všechny nutné prostředky k definici Lieovy grupy. Uvědomme si (což si čtenář sám snadno dokáže), že (souvislá) komponenta jednotkového prvku v topologické grupě je podgrupa. *Lieova grupa G* je definována jako množina se dvěma strukturami — strukturou topologické grupy a strukturou analytické variety na komponentě $G_0$ jednotkového prvku této topologické grupy. Přitom musí být splněny následující dvě podmínky (srovnej s definicí topologické grupy)

(1) zobrazení $G_0 \times G_0 \to G_0$ tvaru $(g_1, g_2) \hookrightarrow g_1 g_2$ je analytické ,

(2) zobrazení $G_0 \to G_0$ tvaru $g \hookrightarrow g^{-1}$ je rovněž analytické.

$G_0 \times G_0$ je analytická varieta vzniklá kartézským vynásobením analytické variety $G_0$ se sebou samou.

Řekneme, že *Lieova grupa G operuje zprava na analytické varietě V*, je-li dáno spojité zobrazení $V \times G \to V$ přiřazující dvojici $(x, g) \in V \times G$ prvek $xg \in V$, přičemž

(1) $xe = x$ pro všechna $x \in V$, kde $e$ je jednotkový prvek grupy $G$,

(2) $(xg_1)\,g_2 = x(g_1 g_2)$ pro všechna $x \in V$, $g_1, g_2 \in G$,

(3) zobrazení $V \times G_0 \to V$, které je zúžením zobrazení $V \times G \to V$ je analytické.

$V \times G_0$ je varieta vzniklá jako kartézský součin variety $V$ s varietou $G_0$. Zcela analogicky se definuje operace zleva.

Lokální Lieova grupa $L$ je opět množina se dvěma strukturami – algebraickou binární parciální strukturou, která je asociativní a má jednotkový prvek a strukturou souvislé analytické variety. Přitom opět musí být splněny tyto dvě podmínky:

(1) První podmínka z definice lokální grupy. $D$ je otevřená podmnožina v $L \times L$ a jako na takové je na ní kanonickým způsobem určena struktura analytické variety. Požadujeme, aby zobrazení $D \to L$, zadané předpisem $(l_1, l_2) \hookrightarrow l_1 l_2$, bylo analytické.

(2) Druhá podmínka z definice lokální grupy. $I$ je otevřená množina v $L$, a tím je na ní opět kanonicky určena struktura analytické variety. Požadujeme, aby zobrazení $L \to L$ zadané předpisem $l \hookrightarrow l^{-1}$ bylo analytické.

Uveďme nyní některé příklady. Aditivní grupa $\mathbf{R}^n$ $n$-tic reálných čísel je souvislá Lieova grupa. Na $\mathbf{R}^n$ je dána struktura analytické variety a funkce

$$z_i = x_i + y_i \quad v_i = -u_i\,, \quad i = 1, \ldots, n$$

popisující sčítání a inverzi jsou zřejmě analytické. Rovněž grupa $GL(n, \mathbf{R})$ je Lieova. $GL(n, \mathbf{R})$ je otevřená podmnožina v $\mathbf{R}^{n^2}$, a tím je na ní kanonickým způsobem určena struktura analytické variety. Zavedeme-li na $\mathbf{R}^{n^2}$ kartézský souřadnicový systém tvaru $(x_{ij})$ $i, j = 1, \ldots, n$, potom funkce popisující násobení a inverzi v $GL(n, \mathbf{R})$ mají tvar

$$z_{ij} = \sum_{k=1}^{n} x_{ik} y_{kj} \quad v_{ij} = \frac{\text{alg. doplněk prvku } u_{ij}}{\text{determinant } (u_{ij})}$$

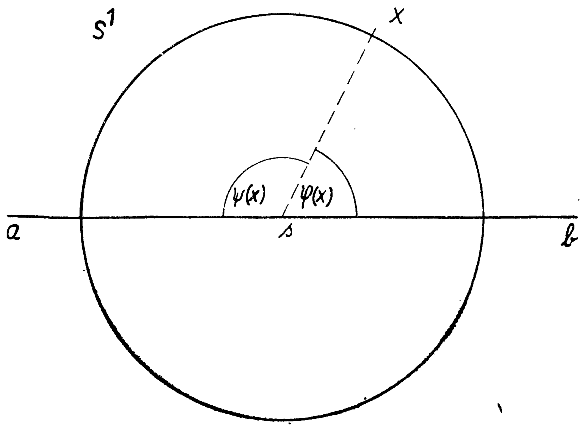
a jsou zřejmě analytické. Zde tedy máme dokonce víc, než potřebujeme. Struktura analytické variety je dána na celé grupě a ne pouze na komponentě jednotkového prvku a násobení i inverze jsou na celé této grupě analytické. Uveďme zde, že komponenta jednotkového prvku v grupě $GL(n, \mathbf{R})$ je podgrupa všech matic s kladným determinantem.

Pravá (levá) operace topologické grupy $GL(n, \mathbf{R})$, o níž nyní víme, že je to Lieova grupa na vektorovém prostoru $\mathbf{R}^n$, o němž víme, že je analytickou varietou, je pravou (levou) operací Lieovy grupy na analytické varietě. Je to ihned vidět, vyjádříme-li si zobrazení $\boldsymbol{R}^n \times GL(n, \boldsymbol{R}) \to \boldsymbol{R}^n$ $(GL(n, \boldsymbol{R}) \times \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ pomocí souřadnic ve tvaru

$$v_i = \sum_{k=1}^{n} u_k x_{ki} \quad \left(v_i = \sum_{k=1}^{n} x_{ik} u_k\right).$$

Zde máme opět „více analytičnosti", než bychom podle definice operace Lieovy grupy na analytické varietě potřebovali. Buď dále $G$ libovolná Lieova grupa a $L$ otevřené souvislé okolí jednotkového prvku této grupy. $L$ je otevřená podmnožina analytické variety, a je tedy na něm kanonickým způsobem indukována rovněž struktura analytické variety. Víme již z dřívějška, že $L$ je lokální grupa. Je však ihned vidět, že $L$ je dokonce lokální Lieova grupa.

Dalším příkladem Lieovy grupy je grupa $S^1$ komplexních jednotek, tj. komplexních čísel s absolutní hodnotou rovnou jedné. (Je možno dokázat, že Lieovou grupou je i grupa $S^3$ hyperkomplexních jednotek.) Po topologické stránce je grupa $S^1$ kružnice. Strukturu analytické variety na ní zavedeme pomocí dvou map (jedna zde nestačí!) — viz obrázek.




Zobrazení $\varphi(\psi)$ přiřazuje prvku $x \in S^1 - a$ $(S^1 - b)$ úhel (v obloukové míře) $\sphericalangle\, bsx$ $(\sphericalangle\, asx)$ počítaný od $b$ do $x$ $(a$ do $x)$ kladně proti směru hodinových ručiček a záporně v jejich směru. Máme $\varphi((S^1 - a) \cap (S^1 - b)) = \psi((S^1 - a) \cap (S^1 - b)) = (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$.

Zobrazení $\varphi \circ \psi^{-1}$ a $\varphi \circ \psi^{-1} : (-\pi, 0) \cup (0, \pi) \to (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$ mají tvar

$$(\psi \circ \varphi^{-1})(t) = (\varphi \circ \psi^{-1})(t) = \begin{cases} t + \pi & \text{pro} \quad t \in (-\pi, 0) \\ t - \pi & \text{pro} \quad t \in (0, \pi) \end{cases}$$

a jsou zřejmě analytická. Naše dvě mapy tvoří tedy na $S^1$ atlas třídy $C^\omega$. Jeho zúplněním dostáváme na $S^1$ strukturu analytické variety. Násobení a inverze na grupě $S^1$

jsou analytická zobrazení $S^1 \times S^1 \to S^1$ a $S^1 \to S^1$. Důkaz tohoto téměř evidentního tvrzení je snadný, a proto ho přenechávám čtenáři jako cvičení. K důkazu stačí použít dvou námi zkonstruovaných map.

Nyní již máme připraveno téměř vše k formulaci pátého Hilbertova problému. Připomeňme zde ještě, že na daném topologickém prostoru existuje nejvýše jedna struktura topologické variety (= variety třídy $C^0$) dimenze $n$. Plyne to z toho faktu, že pro libovolné dvě $n$-dimenzionální mapy $(U, \varphi)$, $(V, \psi)$ na daném prostoru, pro něž $U \cap V \neq 0$, je zobrazení $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ spojité (= třídy $C^0$). Rovněž je zřejmé, že na daném topologickém prostoru existuje struktura topologické variety dimenze $n$ právě tehdy, když ke každému bodu tohoto prostoru existuje jeho otevřené okolí, které je homeomorfní s otevřenou množinou v euklidovském prostoru $\mathbf{R}^n$. Z tohoto důvodu bývá často zvykem topologický prostor, na němž existuje struktura topologické variety, nazývat *lokálně euklidovský*. Pátý Hilbertův problém můžeme nyní formulovat takto: *Existuje na každé lokálně euklidovské topologické grupě struktura Lieovy grupy?*

Po formulaci problému obrátíme se k historii jeho řešení. Problém položený v r. 1900 zůstává dosti dlouhou dobu – až do roku 1933 – bez jakékoli odpovědi. Tento dlouhý časový interval byl způsoben neexistencí rozvinuté teorie topologických a Lieových grup, o které jsem se zmiňoval již dříve. K prvnímu výsledku dospívá v onom roce 1933 John von Neumann, který v práci [6] dává kladnou odpověď na Hilbertův problém v případě *kompaktní* lokálně euklidovské topologické grupy. V následujícím roce potom L. S. Pontrjagin řeší kladně v práci [7] problém pro případ *spočetně kompaktní* lokálně euklidovské topologické grupy a v práci [8] pro případ *komutativní* lokálně euklidovské topologické grupy. Další podstatný výsledek se potom objevuje až v roce 1941. V práci [9] v případě *řešitelné* lokálně euklidovské topologické grupy odpovídá na problém C. Chevalley, a to opět kladně. Ve všech těchto pracích se k řešení Hilbertova problému podstatně využívá existence invariantní integrace na lokálně kompaktní topologické grupě. Můžeme podotknout, že zmínění autoři dokazují vlastně výsledky poněkud obecnější, nepředpokládají totiž přímo, že grupy jsou lokálně euklidovské, nýbrž pouze, že mají konečnou dimenzi v topologickém smyslu a že jsou lokálně souvislé.

Za této situace bylo třeba zjistit, zdali je možno zbavit se různých omezujících předpokladů na danou grupu (kompaktnost, komutativnost a jiné) a dokázat obecnější tvrzení. Bylo známo, že každá Lieova grupa je grupou bez malých podgrup (*grupa bez malých podgrup* je topologická grupa, na níž lze nalézt okolí jednotkového prvku, v němž není obsažena žádná netriviální podgrupa). Vznikla tedy otázka, zdali na každé lokálně euklidovské topologické grupě bez malých podgrup existuje struktura Lieovy grupy. A. Gleason roku 1952 v práci [10] dokázal, že tomu tak skutečně je. Jeho výsledek potom ještě zobecnil H. Yamabe (viz [11], [12]), který dokázal, že na každé lokálně kompaktní topologické grupě bez malých podgrup existuje struktura Lieovy grupy. Zbývalo tedy nakonec zjistit, jaká je situace v případě lokálně euklidovských topologických grup, které mají malé podgrupy, tj. u nichž v každém okolí jednotkového prvku je obsažena netriviální podgrupa. Topologickým grupám s malými podgrupami jsou věnovány práce D. Montgomeryho a L. Zippina [13], K. IWASAWY [14] a A. Gleasona [15]. Z jejich výsledků vyplývá, že lokálně euklidovské topologické grupy s malými podgrupami vůbec neexistují. A tak tedy kombinací všech výsledků uvedených v tomto odstavci dostáváme konečné řešení pátého Hilbertova problému: *Na každé lokálně euklidovské topologické grupě existuje struktura Lieovy grupy.*

Je zajímavé si povšimnout, že dosažený výsledek závisí podstatně na grupové struktuře na uvažovaném lokálně euklidovském topologickém prostoru. V roce 1961 dokázal totiž M. KERVAIRE v práci [16], že *existují lokálně euklidovské topologické prostory, na nichž nelze nalézt žádný atlas třídy* $C^1$ (tím spíše na nich nelze nalézt atlas třídy $C^\omega$).

Někteří autoři se též snažili zjistit, *zdali z daného úplného atlasu třídy* $C^1$ *na topologické grupě* $G$ *lze vybrat úplný atlas třídy* $C^\omega$, *vzhledem ke kterému by* $G$ *byla Lieovou grupou* (tj. násobení a inverze v $G_0$ by byla analytická zobrazení). Nejlepšího výsledku v tomto směru dosáhl J. E. SEGAL, který v práci [17] dokázal následující tvrzení: *Buď na topologické grupě* $G$ *dán úplný atlas třídy* $C^1$ *takový, že pravý posun* $R_a : G \to G$ $(R_a g = ga)$ *je pro každé* $a$ *zobrazení třídy* $C^1$. *Potom z daného atlasu na* $G$ *lze vybrat úplný atlas třídy* $C^\omega$, *vzhledem ke kterému je* $G$ *Lieova grupa.*

Hilbertova přednáška obsahuje však ještě nejméně dvě otázky, úzce svázané s právě diskutovaným problémem. *Buď* $G$ *lokálně euklidovská topologická grupa operující zprava na lokálně euklidovském topologickém prostoru* $V$. *Lze nalézt na* $G$ *strukturu Lieovy grupy a na* $V$ *strukturu analytické variety tak, aby operace* $G$ *na* $V$ *byla operace Lieovy grupy na analytické varietě* (*tj. aby zobrazení* $V \times G_0 \to V$ *bylo analytické*)? *Odpověď na tuto otázku je záporná.* Je možno například definovat operaci aditivní grupy $\mathbf{R}^1$ reálných čísel na dvojrozměrném euklidovském prostoru $\mathbf{R}^2$, která je sice spojitá, ale není analytická při žádné volbě atlasů na $\mathbf{R}^1$ a $\mathbf{R}^2$. *Předpokládáme-li však, že* $G$ *operuje na* $V$ *efektivně a tranzitivně, potom na výše uvedenou otázku můžeme odpovědět kladně* (o tom viz [1]). (Říkáme, že $G$ *operuje na* $V$ *efektivně*, jestliže $xg = x$ pro všechna $x \in V$ platí pouze v případě, že $g$ je jednotkový prvek grupy. Dále pak říkáme, že $G$ operuje na $V$ *tranzitivně*, jestliže ke každým dvěma prvkům $x, y \in V$ existuje prvek $g \in G$ takový, že $y = xg$.)

Druhá otázka úzce svázaná s diskutovaným Hilbertovým problémem a rovněž obsažená v Hilbertově přednášce může být formulována takto: *Existuje na každé lokálně euklidovské lokální grupě struktura lokální Lieovy grupy? Odpověď na tuto otázku doposud není známa.* Pokud vím, poslední práce, která se zmiňuje o tomto problému, je práce [18] A. I. MALCEVA. Malcev považuje zmíněný problém za obtížný.

*

Obraťme se nyní k některým přirozeným zobecněním pátého Hilbertova problému. Jsou to zobecnění, která vznikla teprve v pozdější době a v původní Hilbertově přednášce není o nich samozřejmě žádná zmínka. Formulují analogii Hilbertova problému pro algebraické struktury, které zobecňují pojem grupy.

Vzdáme-li se v definici grupy axiómu asociativity, dospíváme k pojmu lupy. *Lupa* $L$ je tedy algebraická struktura zadaná binární operací $(a, b) \hookrightarrow ab$ s těmito vlastnostmi:

1) existuje prvek $e \in L$ (jednotkový prvek) takový, že $ea = ae = a$ pro všechna $a \in L$,

(2) levý i pravý posun $L_a$, $R_a : L \to L$ definovaný předpisem $L_a b = ab$ a $R_a b = ba$ jsou vzájemně jednoznačná zobrazení $L$ na $L$.

Z podmínky (2) vyplývá, že ke každým dvěma prvkům $a, b \in L$ existuje právě jeden prvek $x(y) \in L$ takový, že $xa = b(ay = b)$. Tento prvek $x(y)$ označíme symbolem $b \setminus a$ $(b / a)$. *Topologická lupa* $L$ je množina, která má na sobě dvě struktury – strukturu lupy a strukturu topologického prostoru, přičemž obě struktury jsou spolu vázány těmito podmínkami:

(1) zobrazení $L \times L \to L$ tvaru $(a, b) \hookrightarrow ab$ je spojité,

(2) obě zobrazení $L \times L \to L$ tvaru $(a, b) \hookrightarrow b \setminus a$ a $(a, b) \hookrightarrow b / a$ jsou spojitá.

Zcela v analogii s pojmem Lieovy grupy můžeme nyní definovat Lieovu lupu. Opět si uvědomme, že (souvislá) komponenta jednotkového prvku topologické lupy je podlupa. *Lieova lupa* $L$ je definována jako množina se dvěma strukturami – strukturou topologické lupy a strukturou analytické variety na komponentě $L_0$ jednotkového prvku této lupy. Přitom musí být splněny tyto dvě podmínky:

(1) zobrazení $L_0 \times L_0 \to L_0$ tvaru $(a, b) \hookrightarrow ab$ je analytické,

(2) obě zobrazení $L_0 \times L_0 \to L_0$ tvaru $(a, b) \hookrightarrow b \setminus a$ $(a, b) \hookrightarrow b / a$ jsou analytická.

Nic nám nyní nebrání v tom, abychom formulovali pátý Hilbertův problém pro lupy: *Existuje na každé lokálně euklidovské topologické lupě struktura Lieovy lupy? Ukazuje se, že obecně tomu tak není.* Nicméně však za určitých omezujících předpokladů na uvažovanou lokálně euklidovskou topologickou lupu lze na ní strukturu Lieovy grupy nalézt.

Buď $L$ topologická lupa. Uniformní struktura na $L$ souhlasná s topologickou strukturou lupy $L$ se nazývá *zprava invariantní uniformní struktura*, má-li bázi skládající se z množin $U$ s vlastností: $(x, y) \in U$ právě tehdy, když $(xa, ya) \in U$ pro všechna $a \in L$. Zcela symetricky se definuje *zleva invariantní uniformní struktura.* Uniformní struktura, která je současně zprava i zleva invariantní, se nazývá *invariantní uniformní struktura.*

Jsou známy dvě věty týkající se Hilbertova problému pro lupy. Obě dokázal v roce 1965 v pracích [19] S. Hudson. Lze je formulovat takto: 1. *Na lokálně euklidovské topologické lupě s invariantní uniformitou existuje struktura Lieovy lupy.* 2. *Na diasociativní lokálně euklidovské topologické lupě se zleva invariantní uniformitou a se zprava invariantní uniformitou existuje struktura Lieovy lupy.* Lupa se nazývá *diasociativní*, jestliže ke každým jejím dvěma prvkům existuje podgrupa této lupy, v níž oba prvky leží. Přitom předpoklady o existenci invariantních uniformit v těchto větách nelze vypustit. Existuje totiž příklad (viz [20], str. 152) komutativní diasociativní topologické lupy na euklidovském prostoru $\boldsymbol{R}^3$, na níž nelze zavést strukturu Lieovy lupy. Tento příklad zároveň ukazuje, že Hilbertův problém pro lupy nemůže být v obecném případě kladně řešen. S. Hudson vyslovil domněnku, že předpoklad diasociativnosti ve výše uvedené větě 2 lze vypustit. Dosud však, nebylo dokázáno, zda je tato domněnka správná.

Druhá metoda zobecnění pojmu grupy záleží ve vypuštění axiómu o existenci inverzního prvku. Dostáváme se tak k pojmu pologrupy s jednotkovým prvkem. *Pologrupa s jednotkovým prvkem S* je tedy algebraická struktura zadaná binární operací $(a, b) \hookrightarrow ab$ s těmito vlastnostmi:

(1) existuje prvek $e \in S$ (jednotkový prvek) takový, že $ea = ae = a$ pro všechna $a \in S$,

(2) binární operace je asociativní.

Čtenář si může nyní sám snadno definovat pojmy jako *topologická* a *Lieova pologrupa s jednotkovým prvkem.* (Připomínáme pouze, že komponenta jednotkového prvku topologické pologrupy je podpologrupa.) A na tomto místě si můžeme opět klást známou otázku: *Existuje na každé lokálně eukleidovské topologické pologrupě struktura Lieovy pologrupy? Obecné řešení v tomto případě ještě není známo.* Ale máme zde k dispozici velmi zajímavý výsledek A. D. Wallace z roku 1953 (viz [21]): *Kompaktní souvislá lokálně euklidovská topologická pologrupa s jednotkovým prvkem je topologická grupa.* Na základě této věty a toho, co je nám již známo z dřívějška, vidíme tedy snadno, že *na kompaktní souvislé lokálně eukleidovské pologrupě existuje struktura Lieovy grupy.*

## Literatura


[1] Montgomery, D., Zippin, L.: *Topological transformation groups*, Interscience Publishers, Inc., New York—London 1955.

[2] Klein, F.: *Gesammelte mathematische Abhandlungen I. Liniengeometrie. Grundlegung der Geometrie zum Erlanger Programm.* Herausgeb. von R. Fricke und A. Ostrowski, Berlin 1921.

[3] Vopěnka, P.: *Analytická geometrie*, SPN 1964.

[4] Lie, S.: *Theorie der Transformationsgruppen*, Leipzig, 1. Band 1888, 2. Band 1890, 3. Band 1893.

[5] Brouwer, L. E. J.: Die Theorie der endlichen kontinuierlichen Gruppen, unabhängig von den Axiomen von Lie, Erste Mitteilung Math. Ann. *67* (1909), 246, Zweite Mitteilung Math. Ann. *69* (1910), 181—203.

[6] von Neumann, J.: Die Einführung analytischer Parameter in topologischen Gruppen, Ann. Math. *34* (1933) 170—190.

[7] Pontrjagin, L. S.: Sur les groupes topologiques compacts et le cinquième problème de M. Hilbert, C. R. Acad. Sci. Paris *198* (1934) 238—240.

[8] PONTRJAGIN, L. S.: Sur les groupes abéliens continus, C. R. Acad. Sci. Paris *198* (1934) 328—330.
[9] CHEVALLEY, C.: Two theorems on solvable topological groups, Michigan Lectures in Topology (1941) 291—292.
[10] GLEASON, A.: Groups without small subgroups, Ann. Math. *56* (1952) 193—212.
[11] YAMABE, H.: On conjecture of Iwasawa and Gleason, Ann. Math. *58* (1953) 48—54.
[12] YAMABE, H.: A generalization of a theorem of Gleason, Ann. Math. *58* (1953) 351—365.
[13] MONTGOMERY D., ZIPPIN, L.: Small subgroups in finite dimensional groups, Ann. Math. *56* (1952) 213—241.
[14] IWASAWA, K.: On some types of topological groups, Ann. Math. *50* (1949) 507—557.
[15] GLEASON, A.: On the structure of locally compact groups, Duke Math. J. *18* (1951), 85—104.
[16] KERVAIRE, M.: A manifold which does not admit any differentiable structure, Comment. Math. Helv. *35* (1961), 1—14.
[17] SEGAL I. E.: Topological groups in which multiplication of one side is differentiable, Bull. Amer. Math. Soc. *52* (1946) 481—487.
[18] Мальцев, А. И.: *Топологическая алгебра и группы Ли*, Математика в СССР за 30 лет, Гостехиздат, 1948, 134—180.
[19] HUDSON, S.: Lie loops with invariant uniformities, Trans. Amer. Math. Soc. *115* (1965) 417—432, II 118 (1965) 526—533.
[20] HOFMANN, K. H.: Topologische Loops mit schwachen Assoziativitätsforderungen, Math. Z. *70* (1958), 125—155.
[21] WALLACE, A. D.: Cohomology, dimension and mobs, Summa Brasil. Math. *3* (1953), 43—55.

# VÝUKA V OBORU VĚDECKÝCH VÝPOČTŮ

GARRETT BIRKHOFF

## OBECNÉ POZNÁMKY

Vědecké výpočty jsou tak staré jako věda (exaktní) sama a datují se nejméně od dob babylonských astronomů. Od nejstarších dob až dosud byla převážná část složitých vědeckých (a inženýrských) výpočtů prováděna lidmi, kteří původně matematiky nebyli. Ačkoli někteří význační matematici jako NEWTON, EULER, GAUSS, JACOBI, VON NEUMANN a další dovedli ocenit závažnost této problematiky*), většina „čistých" matematiků ji přehlíží.

Vzdělání pro vědecké výpočty může být a také je úspěšně poskytováno katedrami matematiky, aplikované matematiky a odděleními pro informatiku (Computer Science), i když je to problematika mezioborová. Zdá se, že by bylo nejpřirozenější

*) Vzpomeňme Newtonovu metodu řešení soustav algebraických rovnic, Eulerovu metodu řešení diferenciálních rovnic, Gaussovu eliminaci a von Neumannovu myšlenku výběru hlavního prvku a využití vhodného měřítka se zřetelem na číslo podmíněnosti při aplikaci Gaussovy eliminace ([1], str. 421—572).