Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Ivan Netuka; Jiří Veselý

# Gustaf Mittag-Leffler (K padesátému výročí úmrtí)

*Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, Vol. 22 (1977), No. 5, 241--245

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138482

POKROKY MATEMATIKY, FYZIKY A ASTRONOMIE, ROČNÍK XXII (1977) ČÍSLO 5

# Gustaf Mittag-Leffler

## (K padesátému výročí úmrtí)

*Ivan Netuka, Jiří Veselý, Praha*

Vlastní-li někdo nejbohatší soukromou matematickou knihovnu a zároveň i nejseverněji položený tenisový kurt na světě, má tím již popularitu prostřednictvím různých soupisů světových „nej-" zajištěnu. Mittagu-Lefflerovi by obě tyto věci zajistily světovou popularitu snadněji než jeho matematické objevy, těžko by ho ale mohly udělat známějším mezi matematiky. Jen málo matematiků přelomu století ho převýšilo kvalitou svých vědeckých objevů a stěží lze nalézt takové, kteří pro matematiku udělali více než on.

MAGNUS GUSTAF MITTAG-LEFFLER se narodil 16. března 1846 ve Stockholmu jako prvorozený syn J. O. LEFFLERA, ředitele školy a pozdějšího švédského poslance, a G. V. MITTAGOVÉ. Jeho tři sourozenci získali také značnou proslulost – sestra jako spisovatelka, jeden z bratrů jako jazykovědec a druhý jako inženýr.

Mittag-Lefflerův talent se projevil brzo; již na gymnáziu byl jeho oblíbeným autorem L. CAUCHY. V letech 1865–72 absolvoval univerzitu v Uppsale a vzápětí po ukončení studia se na téže škole stal docentem. Tříleté stipendium mu umožnilo studijní pobyt v Paříži, Göttingen a Berlíně, centrech tehdejší evropské (a ostatně i světové) matematiky. V Paříži se seznámil s HERMITEM, LIOUVILLEM, PICARDEM, POINCARÉM a dalšími význačnými francouzskými matematiky. Rozhodl se navštěvovat Hermitovy přednášky o eliptických funkcích a často o svém překvapení z prvního setkání s Hermitem vyprávěl. Slovutný učenec a pozdější jeho blízký přítel mu tehdy totiž řekl: „Udělal jste chybu, pane, měl jste chodit na WEIERSTRASSOVY přednášky v Berlíně. Ten je učitelem nás všech". Mittag-Leffler prý tehdy slyšel Weierstrassovo jméno poprvé, ale Hermitovy rady uposlechl. Později ji komentoval slovy: „Hermite byl Francouz a vlastenec, tehdy jsem však poznal, v jaké míře byl také matematik".

V zimním semestru školního roku 1874/75 navštěvuje již Mittag-Leffler Weierstrassovy přednášky. Byl opravdu pilným a nadaným studentem – zakrátko již sám v Berlíně přednášel a r. 1877 byl na základě habilitační práce o eliptických funkcích jmenován profesorem v Helsinkách. O čtyři roky později byl ustanoven profesorem na nově založené „Högskola" (pozdější stockholmská univerzita). Celá jeho odborná i pedagogická činnost je spjata s touto univerzitou. Byl dvakrát jejím rektorem a byl náročným, ale vynikajícím učitelem. Mezi jeho žáky patřili např. H. VON KOCH a I. FREDHOLM.

Přestože byl Mittag-Leffler velmi všestranný, měla na jeho vědecké zaměření nesporně rozhodující vliv setkání s Hermitem a zejména s Weierstrassem. Byl však pozoruhodným člověkem v mnoha směrech: byl nejen prvotřídním matematikem, ale i silnou osobností s výbornými organizačními schopnostmi. Byl iniciátorem prvního skandinávského matematického kongresu (1909) a organizoval desítky dalších kongresů a různých setkání matematiků. V jisté době bylo jeho jméno takřka synonymem skandinávské matematiky.

Roku 1882 založil časopis *Acta mathematica* a jako dlouholetý hlavní redaktor mu vtiskl jeho tvář. K udržení tohoto, dnes velmi proslulého časopisu, neváhal věnovat nejen svou obětavou práci a mnoho energie, ale podpořil ho i v kritické době nemalou finanční částkou. Od začátku mu bylo zřejmé, že skandinávští matematici nejsou v té době sami schopni zajistit špičkovou úroveň nového časopisu. Jeho vliv a kontakty opět sehrály důležitou úlohu. Pro Acta získal práce renomovaných matematiků, z nichž nejvýznamnější byli E. BOREL, G. CANTOR, J. HADAMARD, D. HILBERT, J. JENSEN, V. VOLTERRA a zejména H. POINCARÉ. Mittag-Leffler byl přesvědčen, že nejen matematické práce zanechávají svědectví o současné historii matematiky. Na stránkách časopisu se proto často setkáváme s dopisy významných matematiků, s biografiemi apod.

Snad je vhodné zde připomenout zajímavý osobní vztah Mittaga-Lefflera a Cantora. Víme (čtenáře odkazujeme na zajímavý článek [4], kde jsou také uvedeny úryvky z korespondence), jak trnitá byla Cantorova cesta za uznáním v matematickém světě. Mittag-Leffler, tehdy mladý matematik, byl jeden z prvních, kdo rozpoznali význam Cantorových idejí a aplikoval je v „obyčejné" analýze. Jeho práce o meromorfních funkcích odrážejí, podle jeho vlastních slov, snahu uvést Weierstrassův a Cantorův přístup k analýze na společného jmenovatele.

V roce 1916 založili manželé Mittag-Lefflerovi v Djursholmu (nedaleko Stockholmu) matematický ústav. Věnovali mu své sídlo, unikátní matematickou knihovnu a částku v hodnotě 200 000 dolarů. Mittag-Leffler byl až do své smrti (zemřel 7. července 1927) ředitelem tohoto institutu. (Nyní je ředitelem tohoto významného pracoviště, které nese Mittag-Lefflerovo jméno, známý švédský matematik L. CARLESON.)

Mittag-Leffler nebyl patrně nejvýznamnějším matematikem své doby, z jeho pera však pochází řada výsledků a metod, které mu zajistily trvalé místo v matematické literatuře a inspirovaly a ovlivnily další matematická bádání. Převážná část jeho původních výsledků spadá do analýzy v komplexním oboru a týká se zejména meromorfních a celých funkcí, reprezentace analytických funkcí mimo kruh konvergence (Mittag-Lefflerova hvězdice), sčítacích metod, speciálních funkcí, interpolace, analytického pokračování a dalších, dnes již klasických, problémů analýzy.

O jednom výsledku, pravděpodobně nejznámějším, se pro ilustraci zmíníme. Ano, uhodli jste, máme skutečně na mysli Mittag-Lefflerovu větu o rozkladu meromorfní funkce na parciální zlomky. Je navíc zajímavé, že této větě je letos sto let.

Teorie funkcí komplexní proměnné dominovala matematice 19. století. Mittag-Leffler se z Paříže vydal skutečně na správnou adresu – WEIERSTRASS spolu s CAUCHYM a RIEMANNEM představují trojici nejvýznamnějších tvůrců této teorie.

Weierstrassův rigorózní a důsledně logický přístup ostře kontrastuje s více intuitivním pojetím Riemannovým a Cauchyovým; jejich pojetí spočívají na geometrickém a často i fyzikálním názoru. Weierstrassovo chápání komplexních funkcí zdůrazňuje snahu vytvořit teorii, kterou lze snadno modifikovat na případ funkcí více komplexních proměnných. V jeho pracích vystupuje do popředí systematické využití stejnoměrné konvergence. Bylo by mylné se domnívat, že Weierstrass pouze uvedl do pořádku a zobecnil výsledky ostatních matematiků. Naopak, v teorii funkcí mu vděčíme za mnoho; jako příklady uveďme jeho poznatky o rozvoji funkce v okolí izolovaného singulárního bodu v tzv. Laurentovu řadu (1841, tedy dva roky před LAURENTEM), myšlenku analytického pokračování a s ním související pojem přirozené hranice, zkoumání celých funkcí apod.

Zatímco Cauchy rozvinul svou teorii na základě pojmu derivace a integrálu pro komplexní funkce zadané určitým analytickým vyjádřením (předpisem) a jeho úvahy spočívají v podstatě na geometrickém základě, Weierstrass založil svou teorii analytických funkcí na pojmu mocninné řady. Je třeba podotknout, že mocninné řady byly známy a užívány daleko dříve. Weierstrassovi však náleží zásluha v systematickém užití metody, jak pomocí mocninné řady, která definuje funkci v okolí jistého bodu, získat „přirozené" vyjádření (prodloužení) i mimo dané okolí; jde o již zmíněnou myšlenku analytického pokračování.

Ve Weierstrassově pojetí je tedy funkce $f$ definovaná na otevřené množině $G$ v komplexní rovině $E$ *analytická* (mluvíme zde jen o „jednoznačných analytických funkcích"), jestliže ji lze v okolí každého bodu $z_0 \in G$ vyjádřit jako součet konvergentní mocninné řady. Dnes každý student po absolvování několika přednášek z komplexní proměnné ví, že to nastává, právě když má funkce $f$ v každém bodě množiny $G$ derivaci a je tedy *holomorfní* ve smyslu obvyklé terminologie.

Nechť $z_0$ je komplexní číslo, $U$ je kruh o středu $z_0$ a $f$ je funkce holomorfní v $U - \{z_0\}$. Víme, že pak lze $f$ vyjádřit *Laurentovou řadou*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n\,, \quad z \in U - \{z_0\}\,.$$

Je-li $a_{-n} = 0$ pro všechna přirozená $n$ s výjimkou konečného počtu a pro některé $k \geqq 1$ je $a_{-k} \neq 0$, pak se bod $z_0$ nazývá *pólem* funkce $f$. Největšímu $k$, pro něž $a_{-k} \neq 0$, se říká *násobnost pólu* $z_0$. Řadu

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z - z_0)^n$$

nazýváme *hlavní částí* funkce $f$. Je-li $z_0$ pólem funkce $f$, pak hlavní část je tedy tvaru $P(1/(z - z_0))$, kde $P$ je jistý polynom bez absolutního členu. Jestliže $G \subset E$ je otevřená množina a existuje izolovaná množina $I \subset G$ tak, že funkce $f$ je holomorfní v $G - I$ a každý bod $z_0 \in I$ je pólem funkce $f$, říkáme, že $f$ je v $G$ *meromorfní*. Funkce holomorfní v $E$ se nazývá *celá* funkce. Každou celou funkci lze rozvinout v mocninnou řadu, která konverguje v $E$.

Konkrétní příklady celých funkcí a jejich různá vyjádření se v matematice vyskytují hojně již v 18. století. Celé funkce se často chápaly jako „polynomy nekonečně vysokého stupně", přirozené zobecnění polynomů. Nulové body celé funkce musí tvořit izolovanou množinu (pokud nevyplní celé $E$), ta ovšem může být nekonečná. Weierstrass r. 1876 dokázal, že každou celou funkci lze rozložit na nekonečný součin „kořenových činitelů" (což není tak snadné jako u polynomů – problém konvergence!). Z jeho výsledků plyne, že rozložení nulových bodů celé funkce nepodléhá žádnému omezení: Je-li $I = \{z_1, z_2, \ldots\}$ libovolná izolovaná množina a $\{n_1, n_2, \ldots\}$ libovolná posloupnost přirozených čísel, existuje celá funkce $f$ taková, že $z_k$ je jejím kořenem násobnosti $n_k$ a $f \neq 0$ na $E - I$. Přechodem k převrácené hodnotě odtud vcelku hned vyplývá, že libovolná izolovaná množina $I$ může být množinou právě všech pólů jisté meromorfní funkce; dokonce si smíme předepsat násobnosti pólů této funkce v každém z bodů množiny $I$.

Budeme nyní méně skromní: rádi bychom si chtěli předepsat, jak každý pól vypadá, tj. jakou má mít hledaná funkce v daném bodě $z$ množiny $I$ hlavní část. Je vždycky možno takové hlavní části (může jich být nekonečně mnoho) „poslepovat" tak, abychom získali meromorfní funkci?

Vyjádřeme ještě jinak naši otázku: následující formulace je klíčem k zobecnění Mittag-Lefflerovy věty na funkce více proměnných. Představme si, že každému bodu $z \in E$ je přiřazeno okolí $U_z$ a funkce $f_z$ meromorfní na $U_z$. Množiny $U_z$ a $U_w$ se mohou ovšem překrývat. Předpokládejme, že $f_z$ se liší od $f_w$ na $U_z \cap U_w$ o holomorfní funkci. Ptáme se, zda lze sestrojit funkci $f$ meromorfní v $E$ tak, aby se $f$ pro každé $z$ lišila od $f_z$ na $U_z$ jen o holomorfní funkci.

Jestliže – při naší původní formulaci – je množina $I$ konečná, odpověď je triviální: sečtou se prostě předepsané hlavní části a tak se dostane hledaná meromorfní (zde dokonce racionální) funkce. Obráceně, každou racionální funkci lze psát jako součet příslušných hlavních částí – to je dobře známý rozklad racionální funkce na parciální zlomky, který se používá při hledání primitivních funkcí. Sčítat nekonečně mnoho hlavních částí je beznadějné – příslušná řada obecně nekonverguje. Mittag-Leffler si s tímto problémem uměl poradit a dokázal tuto větu: *Nechť $I = \{z_1, z_2, \ldots\}$ je libovolná izolovaná podmnožina $E$ a nechť $\{P_1, P_2, \ldots\}$ je libovolná posloupnost polynomů s nulovým absolutním členem. Potom existuje meromorfní funkce $f$, která je holomorfní v $E - I$ a jejíž hlavní část v bodě $z_k$ je právě $P_k(1/(z - z_k))$. Funkci $f$ lze vyjádřit ve tvaru*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} [P_n(1/(z - z_n)) - Q_n(z)]\,,$$

*kde $Q_n$ jsou polynomy a řada konverguje stejnoměrně na každé kompaktní podmnožině množiny $E - I$. Je-li $g$ meromorfní funkce s požadovanými vlastnostmi, pak se $f$ a $g$ liší o celou funkci.*

Snad se může z dnešního hlediska zdát tento výsledek jednoduchý – například proto, že bývá často zařazován do kursovní přednášky o funkcích komplexní proměnné. Možná, že však právě jeho klasická jednoduchost mu ještě přidává na kráse.

Mittag-Leffler (a další) větu v mnoha směrech zobecnil, ale to je už jiná historie. Snad jen poznamenejme, že Cantorova teorie množin našla uplatnění v Mittag-Lefflerových pracích právě při vyšetřování případu, kdy místo $I$ uvažujeme množinu, která má v $E$ hromadné body.

Většina studentů matematiky ví o Mittagovi-Lefflerovi jen to, že „to byl kdosi s nějakou větou o meromorfních funkcích". Ve své době byl však nejznámější a vysoce váženou postavou mezi evropskými matematiky. Když v Kodani r. 1925 na skandinávském matematickém kongresu přicházel proslovit do posluchárny svou přednášku, stalo se něco neobvyklého. Všichni přítomní vstali a posvátným tichem zdravili příchozího. Snad to bylo spontánní vyjádření díků a vděčnosti matematiků za vše, co právě on pro skandinávskou matematiku udělal. Tato pocta není něčím nepochopitelným u člověka s doktoráty šesti významných univerzit a s čestným členstvím dlouhého seznamu matematických společností. Jednu z těchto společností bychom však z tohoto soupisu měli uvést: r. 1923 udělila Mittagovi-Lefflerovi čestné členství Jednota československých matematiků a fyziků. (Mimochodem, v létě r. 1922 se Mittag-Leffler léčil v Piešťanech. V odpovědi na dopis českých matematiků, který mu tam byl poslán, vyslovil politování, že mu zdravotní stav nedovolil navštívit Prahu.)

Mittag-Leffler byl bohatý člověk – jak pozemskými statky, tak i dobrými lidskými vlastnostmi. Se svou ženou (oženil se r. 1882) podporovali štědře vše, co považovali za správné a potřebné. Přes svou pozici nezapomínal na své učitele a pozdější dobré přátele, zejména na Hermita a Weierstrasse. Svoji vděčnost k Weierstrassovi vyjadřoval nejen ve svých pracích, ale ochotně pomohl i v případě, kdy ani Weierstrass nebyl schopen přesvědčit představitele žádné z německých univerzit, aby nabídli místo profesora S. Kovalevské. Zásluhou Mittaga-Lefflera získala Kovalevská, kterou měl Weierstrass ze svých žáků snad nejraději, r. 1884 profesuru na stockholmské univerzitě.

Student, který slyší na přednášce o Cauchy-Riemannových rovnicích, Bolzano-Cauchyově podmínce a také Mittag-Lefflerově větě by si mohl odnést dojem, že jde vesměs o dvojice matematiků. (Nestalo se to zrovna vám?) Mittag-Leffler udělal v matematice i pro matematiku jistě více než za dva, autor věty je však jeden, i když má poněkud neobvyklé jméno. V psaném projevu (pokud se respektuje stanovisko Ústavu pro jazyk český) by k omylu nemělo dojít: spojení Hahnova-Banachova věta na rozdíl třeba od Mittag-Lefflerova díla, prozradí, jak to vlastně je. Věc není ale tak jednoduchá, neboť v souladu s tímto pravopisem bychom měli psát Štorchova-Marienova kniha (jeden autor!) ... Ale to už zase patří mezi taje ryze nematematické.

Literatura


[1] *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, Teubner, Leipzig, 1901–1921.

[2] G. H. Hardy: *Gösta Mittag-Leffler*, J. London Math. Soc. *3* (1928), 156–160.

[3] N. E. Nörlund: *G. Mittag-Leffler*, Acta Math. *50* (1927), I–XXIII.

[4] J. Šedivý: *Georg Cantor, zakladatel teorie množin*, PMFA *20* (1975), 5–14.


---

*Zejména v matematice musíme vést žáky k tomu, aby i v obvyklé mluvě se vyhýbali slovům a frázím, které nedávají smysl.*

B. V. GNEDENKO