Jan Kopka

Strategie v heuristice

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 22 (1977), No. 5, 286--292

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/138480`

pení, s nímž se moje práce setkává, je povzbuzením i do dalších let.

Strategie v heuristice

Jan Kopka, Ústí nad Labem

V roce 1975 vyšlo v Int. J. Educ. Sci. Technol. obsáhlé pojednání profesora E. WITTMANNA s názvem *Matrix strategies in heuristics*. Wittmann zde podává stručnou charakteristiku strukturální matematiky (podle N. BOURBAKIHO), dále popisuje elementární struktury v genetické psychologii (podle J. PIAGETA) a základní strategie v heuristice (podle G. POLYI). Potom ukazuje úzké vztahy, které mezi těmito oblastmi existují. Dospívá k závěru, že se ve vyučování matematice musí odrazit nejen samotná matematika, ale i psychologie a heuristika. Cílem našeho článku je seznámit čtenáře s některými myšlenkami Wittmannova pojednání a připojit k nim některé poznámky a kritická zhodnocení.

Matematika, psychologie a heuristika ovlivňovaly vyučování matematice dosti rozdílně. Zatímco strukturální matematika hrála a hraje nejpodstatnější roli při tvorbě obsahu nové modernizované školské matematiky, dokázaly Piagetovy práce proniknout pouze do školek a nejnižších ročníků základní školy. Heuristický přístup stojí doposud až na výjimky stále stranou. Velmi často se například stává, že se učitelé soustřeďují na strukturální matematiku a přitom ignorují psychologii i heuristiku. Při tomto přístupu pak opomíjejí předkládat a řešit skutečné matematické problémy.

Uveďme příklad, kterým Wittmann celé pojednání zakončuje. Je to geometrický problém, při jehož řešení dosahovali žáci a studenti poměrně špatných výsledků, jak o tom referoval A. SIEMON na konferenci v Oberwolfachu v roce 1972. Hlavní příčina neúspěchů záleží podle Wittmanna právě v zanedbávání heuristických strategií. Tento příklad nám bude sloužit jako motivace další teoretické části. Bude však dobré, když se čtenář po přečtení článku opět k tomuto příkladu vrátí a znovu si promyslí jednotlivé heuristické postupy jeho řešení.

P: Rozdělte rovnoběžník na tři části stejného obsahu a použijte k tomu přímek procházejících jedním vrcholem[1]).

Jedno možné řešení P.

P_1: Rozdělte rovnoběžník na dvě části stejného obsahu a použijte k tomu přímky procházející jedním vrcholem.

P_2: Rozdělte rovnoběžník na čtyři části stejného obsahu a použijte k tomu přímek procházejících jedním vrcholem.

P_3: Rozdělte trojúhelník na tři (dvě, čtyři) části stejného obsahu a použijte k tomu přímek procházejících jedním vrcholem.

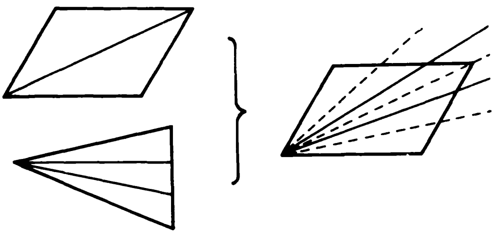
Řešení problémů P_1 až P_3 je poměrně snadné. Řešení problému P můžeme získat syntézou řešení P_1 a P_3 (za použití P_2) – viz obr. 1.

Takto získáme schéma, které můžeme bezprostředně zobecnit k řešení P_4.

P_4: Rozdělte rovnoběžník na n částí stejného obsahu pomocí přímek procházejících jedním vrcholem.

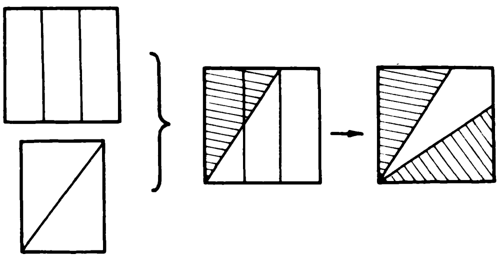
---

[1]) Problém P byl zřejmě předložen jako „izolovaný" a neobjevil se tedy bohužel s jinými problémy v souvislosti s nějakou problémovou situací. Není zde také zdůrazněno, o jak staré studenty jde a jaký aparát je u nich předpokládán.



Obr. 1.

P_7 (jako P_5) má triviální řešení. Jedno z těchto řešení můžeme zkombinovat s řešením P_1 a získáme parciální řešení P_6, které však za použití osové souměrnosti vede k úplnému řešení P_6 (obr. 4). Schéma pro řešení P_6 může být přizpůsobeno k řešení P snad pomocí P_8, který leží vzhledem k obecnosti mezi P_6 a P_7.

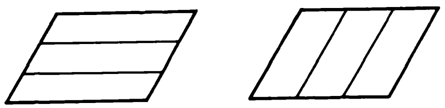


Obr. 4.

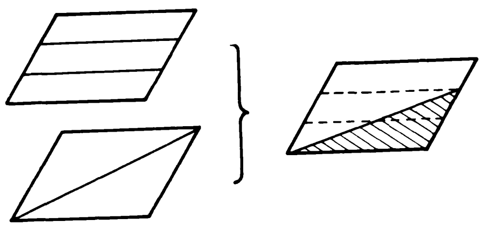
Řešení P pomocí jeho oslabení.

P_5: Rozdělte rovnoběžník na tři části a použijte k tomu libovolných přímek.

P_5 má dvě triviální řešení (obr. 2). Zkombinujeme-li řešení P_1 a P_5, obdržíme parciální řešení problému P (obr. 3). Budeme-li současně uvažovat obě triviální řešení P_5, získáme úplné řešení P.



Obr. 2.



Obr. 3.

Řešení P pomocí jeho specializace.

P_6: Rozdělte čtverec na tři části stejného obsahu a použijte k tomu přímek procházejících jedním vrcholem.

Problémy přilehlé a analogické k P_5.

P_7: Rozdělte čtverec na 3, 4, ... části stejného obsahu a použijte k tomu libovolných přímek.

P_8: Rozdělte obdélník na tři části stejného obsahu a použijte k tomu přímek procházejících jedním vrcholem.

Poznamenejme, že dříve viděli učitelé pod heuristickým postupem při řešení problému něco jako „dostrkání“ žáka k cíli, tzn. k vyřešení daného problému. Dnes však můžeme mluvit o „zušlechtěné“ nebo „obrozené“ heuristice. Nejde nám už jen o to, abychom žáka dovedli k řešení problému (jak by se mohlo zdát při pročtení právě uvedeného problému), ale chceme ho také naučit problémy rozebírat, předem odhadovat, která z cest pravděpodobně povede k cíli atd. Vhodně používané heuristické strategie nejsou v rozporu s moderními metodami, kterých bychom chtěli ve škole používat. Jednou z těchto metod je metoda generovaných problémů (viz [13]). Ukažme si, jak se může řešení problému P pomocí heuristických strategií vhodně doplňovat právě s metodou generovaných problémů.

Metoda generovaných problémů má dvě fáze. První fáze, která se nazývá řízená, záleží v tom, že žáci vyřeší za pomoci učitele základní problém zvaný generátor. Ve druhé fázi, která se nazývá volná, podněcuje učitel žáky k obměňování původního problému. Žáci tak získají soubor nových tzv. generovaných problémů. Při řešení těchto problémů použijí buď přímo schématu řešení generátoru, nebo toto schéma upravují, anebo musí vytvořit nové. Zde často opět pomáhá učitel. Chceme-li dát metodu generovaných problémů do souvislosti s řešením pomocí heuristických strategií, můžeme to udělat např. tak, že problém P prohlásíme za generátor a vyřešíme jej pomocí heuristických strategií. Mezi prvními generovanými problémy se nám pak vyskytnou takové, jako jsou P_9 a P_{10}.

P_9: Rozdělte konvexní čtyřúhelník na tři (n) části stejného obsahu a použijte k tomu přímek procházejících jedním vrcholem (zobecnění P).

P_{10}: Rozdělte konvexní mnohoúhelník na tři (n) části stejného obsahu a použijte k tomu přímek procházejících jedním vrcholem (zobecnění P_9).

Další problémy získáme např. tak, že bod, kterým procházejí dělicí přímky, umístíme na některé straně obrazce, případně uvnitř nebo vně. Jiné problémy obdržíme, začneme-li dělit dva obrazce najednou nebo přejdeme-li k tělesům v trojrozměrném prostoru a rozdělujeme-li je pomocí rovin.

Bourbaki vychází ve svém náčrtu matematiky z definice strukturované množiny. Pomocí zobrazení zachovávajícího strukturu dochází k vztahům jako např. „... je podstrukturou ...“ a k pojmu „abstraktní struktura“ (třída navzájem izomorfních strukturovaných množin). Jeho hierarchie struktur spočívá na třech základních typech struktur — matrix structures: *algebraické struktury* (charakterizované jednou nebo více operacemi), *uspořádané struktury* (uspořádané množiny) a *topologické struktury* (struktury, v kterých jsou určité podmnožiny definovány jako „okolí“). Další struktury získáme přidáváním nových axiómů k určitému základnímu typu, tj. specializováním nebo „mísením“ alespoň dvou typů dohromady. Z epistemologického[2]) hlediska vystupuje do popředí ekonomičnost a integrační charakter strukturální matematiky. Integrací zde míníme to, že na místo úvah o jednotlivých objektech provádíme úvahy o množinách těchto objektů, o vlastnostech těchto množin a vztazích mezi nimi. Poznamenejme, že Bourbaki neměl v době tvoření svých „éléments des mathématiques“ k dispozici teorii kategorií.

V roce 1952 se konala konference s názvem *Structures mathématiques at structures mentales*. Na této konferenci J. Piaget a J. Dieudonné poprvé vystoupili s myšlenkami, že mezi Bourbakiho základními strukturami a Piagetovými elementárními psychologickými strukturami zvanými grupování existují určité vztahy. Piaget ve své teorii často používá místo výrazu struktura výraz schéma. Budeme jej proto v zájmu jasnosti používat i my. Skemp (1971) např. definuje schéma hlavně jako duševní organizaci, v které jsou existující formy znalostí a chování integrovány. Jiné definice zdůrazňují, že je možné schéma poznat podle určitých vnitřních a vnějších aspektů. Příkladem schémat jsou operativní schémata (rozklad — skládání, přidávání — odebírání, zjemňování — zřeďo-

---

[2]) Epistemologie — teorie poznání. Tento termín se v podstatě kryje s názvem gnoseologie nebo noetika.

vání), která tvoří základ rozvoje matematického myšlení. Také pojmy, metody, algoritmy, atd. můžeme považovat za schémata. U psychologických schémat můžeme podobně jako u matematických struktur zavést např. pojem „podschéma[3])" nebo mluvit o jejich ekonomičnosti, případně integračním charakteru. Piaget však zdůrazňoval, že mezi základními matematickými strukturami a elementárními psychologickými strukturami existuje pouze genetický vztah, podle něhož je strukturální matematika přirozeným pokračováním počátečních fází myšlení.

Aby mohl čtenář sledovat další část, předložíme mu nyní minimum z Piagetovy epistemologie. K inteligenci[4]) se vztahují následující funkcionální konstanty – organizace a adaptace. Vytvářejí vnitřní a vnější aspekt interakce mezi jedincem a prostředím. Organizace záleží v tom, že jedinec vkládá schémata vytvářená při interakci do systému, který je postupem doby stále jemnější a dokonalejší. Chování jedince se tak stává stále úspěšnější. Adaptaci, tj. vnější aspekt interakce, dělíme na akomodaci a asimilaci. Toto rozdělení odpovídá skutečnosti, že interakce zahrnuje jak působení prostředí na jedince – akomodaci, tak i činnost jedince, která směřuje k ovládnutí prostředí. Tato činnost se nazývá asimilace a vyvíjí se z vnitřní organizace jedince. Upozorněme, že prostředí, o němž jsme právě mluvili, je v případě matematiky reprezentováno problémy.

Vyjádřeme podle profesora Wittmanna konečný stav úspěšné interakce dvojicí (P, S), kde P je problém a S je schéma, které daný problém řeší. Zadání problému představuje porušení rovnováhy a může být charakterizováno $(P, ?)$. Řešení problému, což je vlastně proces obnovování rovnováhy, vypadá podle druhu problému takto[5]) (všechny případy představují čistou akomodaci):

a) volba příslušného schématu – u rutinních problémů,

b) přizpůsobení některého schématu – u problému nového druhu,

c) vytvoření nějakého nového schématu – u problémů, které nemohou být řešeny bez tvůrčí práce.

Jde v podstatě o obvyklou klasifikaci matematických úloh:

1. Úlohy, jež nevyžadují tvořivost řešitele a řeší se použitím algoritmů, mechanismů; nazýváme je cvičné úlohy.
2. Úlohy, které vyžadují tvořivost řešitele v nejširším rozsahu (od přizpůsobení jemu známých mechanismů až po vytvoření nových schémat); nazýváme je problémy.

Uvedené třídění je relativní podle osoby řešitele (jeho matematické vzdělanosti). Tato subjektivita je velmi podstatná pro výuku (učení) matematice.

Nechť je obráceně dáno schéma S. Tuto

---

[3]) Jde o analogický vztah jako mezi matematickou strukturou a její podstrukturou. Při formalizaci pojmu schéma se totiž i zde objeví množinová část tohoto schématu.

[4]) Způsoby chování studované psychologií mají povahu funkcionální, probíhají na stále větší vzdálenosti v prostoru (vnímání atd.) i v čase (paměť atd.) a po drahách stále složitějších. Jednání jedince vede k obnově porušené rovnováhy mezi organismem a prostředím. Styky s prostředím mají formu nebo strukturu, která určuje různá možná spojení mezi subjektem a objekty. Inteligence je podle Piageta (viz [6]) „formou rovnováhy, k níž směřují všechny struktury počínajíc vnímáním, zvykem a elementárními senzomotorickými mechanismy".

[5]) Jak jsme o tom už na této straně mluvili.

situaci můžeme charakterizovat (?, S)[6]. Při hledání problému, který může řešit řešitel pomocí S, což představuje čistou asimilaci, můžeme opět rozlišit tři případy:

a) volbu problému,

b) přizpůsobení některého problému,

c) vytvoření nového problému.

Zdá se, že Wittmannova charakteristika pomocí dvojice (P, S) je příliš úzká. Neodráží se v ní řada činitelů: emocionální prvek (motivace), atavistický odpor k novému v dialektickém rozporu se zvídavostí, momenty šokování, účast jedince při tvorbě problémů, význam společenského vlivu rozřešeného problému. Proto by asi charakteristika interakce jedinec — prostředí měla být podána obecněji.

Nyní se opět vraťme k Polyovým strategiím v heuristice. Nechť je zadán problém (P, ?). Jestliže řešitel nemůže vyřešit tento problém přímo způsoby a, b, c (avšak podobně i v jiných případech), zkouší jej upravovat, konstruuje blízké problémy nebo vybírá podproblémy atd. Veškeré jeho snahy směřují k tomu, aby nalezl problémy, které by vyřešil snadněji než problém P a které by mu současně pomohly při řešení problému P[7]).
To je právě jádro Polyovy heuristiky.

[6]) Zde zřejmě mluví Wittmann o „úlohách na něco" (úlohy na kvadratickou rovnici, na indukci, na eliminaci atd.). Tento přístup, který dříve ve vyučování matematice bujel, je třeba odstranit. Může se však např. v souvislosti s metodou generovaných problémů objevit v pozměněné formě. Když žáci za pomoci učitele vyřeší základní problém, jsou podněcováni k tvorbě obměněných problémů. Zkušenosti ze školy ukazují, že první obměněné problémy jsou obvykle původnímu problému velmi blízké, takže jsou řešitelné pomocí stejného schématu nebo pomocí schématu nepatrně pozměněného. Tím se s původním problémem seznamují stále hlouběji, i když se mu na druhé straně stále více vzdalují.

Věnujme nyní pozornost pojmu podproblém. Užívá se v heuristice velmi často a v dosti širokém významu. Z daného problému můžeme vytvořit některý jeho podproblém např. tak, že oslabíme tvrzení — jde-li o důkaz, nebo oslabíme podmínky — jde-li o konstrukci. Příkladem může být důkaz určité věty mající logickou stavbu $\forall x\, A(x) \Rightarrow B(x) \wedge C(x)$ vzhledem k důkazu věty mající stavbu $\forall x\, A(x) \Rightarrow B(x)$. Jiným příkladem je problém P_5, který je podproblémem problému P. Další způsob tvoření podproblému záleží v tom, že naopak zesílíme předpoklady. Tak je např. důkaz věty mající stavbu $\forall x\, A(x) \wedge C(x) \Rightarrow B(x)$ podproblémem důkazu věty mající stavbu $\forall x\, A(x) \Rightarrow B(x)$. Heuristickou strategii „cesta zpět" (working backwards) můžeme považovat za strategii vedoucí k objevování podproblémů daného problému. Vycházíme při ní z předpokladu, že daný problém má řešení a konstruujeme nové množiny předpokladů, které můžeme odvodit z původní množiny předpokladů a které nám umožní důkaz původního tvrzení. Problémy konstrukce jsou analogické.

Uveďme nejdůležitější a obecně použitelné heuristické strategie (matrix strategies), jak je zaznamenává Wittmann s odvoláním na Polyu. Jde však o otázky didakticky značně komplikované, a proto se jimi budeme zabývat podrobněji v samostatném článku. Wittmann zdůrazňuje, že tyto strategie mají velmi úzký vztah k základním Bourbakiho strukturám. Zmíněné strategie jsou tyto:

[7]) Řeší-li řešitel problém (P, ?) způsoby a, b, c, převládá, jak již bylo řečeno, akomodace; snaží-li se vyřešit jej přes „pomocné" problémy, vystupuje do popředí asimilace. A tak jsou matematická schémata i heuristické strategie nezbytné pro úspěšnou adaptaci.

a) Rozklad nebo skládání problému. Důležitým příkladem této strategie je rozklad na podproblémy (viz [8] – kap. 1).

b) Přechod k novým problémům pomocí relací zvaných uspořádání jako jsou: „... je specifičtější než ...“ („... je obecnější než ...“), „... je jednodušší než ...“ („... je složitější než ...“). Sem také patří např. úvahy o extrémních případech (viz [7] – kap. 1–6, [3], [1], str. 136–141).

c) Přechod k přilehlým a analogickým problémům (viz [7], kap. 2, [1], str. 133 až 136, 143–146).

Uvedené heuristické strategie můžeme podobně jako základní matematické struktury „mísit“. Existují však i takové strategie, které takto získat nelze.

Nyní by si měl čtenář znovu pročíst problém (*P*, ?) a způsoby jeho řešení. Existují zřejmě ještě další cesty vedoucí k řešení, které používají heuristických strategií. Podle Wittmanna největší cena problému *P* leží patrně právě v oblasti heuristiky. Tradiční geometrie (ale nejen ona!) poskytuje pro uplatňování heuristiky velké možnosti.

Podejme ještě Wittmannovu charakteristiku tradičního a modernizovaného vyučování matematice. Pro tradiční výuku je charakteristické, že přehlíží jak strukturu předmětu, tak i heuristické strategie. (Vycházíme-li z našich zkušeností, bylo by jistě lepší říci, že struktura předmětu a heuristické strategie se neuplatňují systematicky. Vždyť různé věci se dělají a navíc to podstatnou měrou závisí na osobě učitele.) Jejím hlavním cílem je naučit žáky používat schémat, která jsou jim předkládána v hotovém tvaru. Nové (tzv. modernizované) vyučování matematice vidí jako jednostrannou reakci na ignorování struktury předmětu v tradiční výuce (zařazení pojmů množina, relace, operace do nejnižších ročníků základní školy, později např. studium některých vlastností relací a operací). Zastává názor, že právě volba problémů je nejdůležitější pro výuku, v které jsou obsaženy jak strukturální pojmy a skutečné matematické problémy, tak i heuristické strategie.

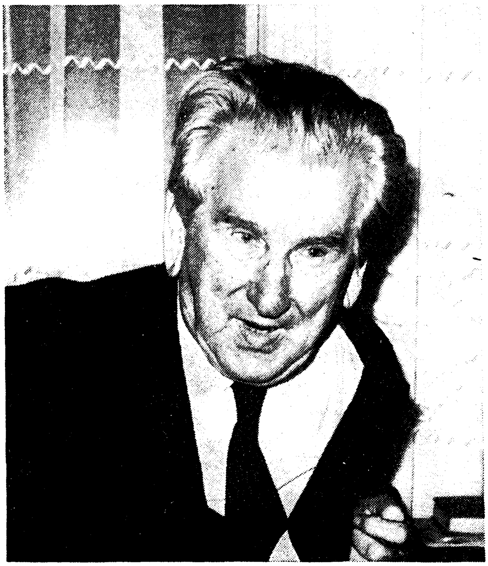
Poznamenejme, že význam problémů pro vyučování matematice je skutečně velký – jsou stimulem teorie a jejím zrcadlem. Vyučování se však nesmí redukovat na řešení úloh. Musíme dát také pozor na největší nebezpečí heuristických metod: „postrk“ učitelův s katastrofálním důsledkem nesamostatnosti žáků. A nakonec, co rozumíme pod slovem heuristika? Je to „hledání pravdy“ (v našem případě zřejmě řešení úlohy), ale asi také kritické hodnocení různých cest, což předpokládá zpravidla experimentální aktivitu řešitelovu.

Poznámka: Jedním z hlavních rysů marxistické metody řešení úloh je přístup k úloze z různých východisek. Autor tohoto článku nenašel ve Wittmannově pojednání ani zmínku o takovémto přístupu. Ještě více však postrádá, že se tento přístup příliš neuplatňuje ve vyučování na našich školách. Uveďme příklad plodnosti takového přístupu. Všichni, kdo sledují mezinárodní matematickou olympiádu, vědí o velikých úspěších, kterých tam dosahují sovětští studenti. Tajemství těchto úspěchů spočívá mimo jiné i v tom, že dokáží uplatňovat tento přístup k úloze z různých východisek v praxi.

Literatura:

[1] Balk G. D. Educ. Studies Math. 1971, 3.
[2] Beth E. W. a Piaget J. Et. Epist. Génét., Paris 1961.
[3] Brown S. I. a Walter M. I. Math. Teaching 1972, 59.

[4] BOURBAKI N. *L'Archetecture des Mathématiques,* Le Linnais 1948.
[5] PIAGET J. *Introduction a l' Epistémologie Genetique,* Paris 1950.
[6] PIAGET J. *Psychologie inteligence,* SPN Praha 1966.
[7] POLYA G. *Mathematics and Plausible Reasoning,* Princeton 1954.
[8] POLYA G. *Mathematical Discovery,* Wiley New Jersey 1962.
[9] SKEMP R. R. *Das menschliche Lernen und seine Entwicklung,* Stuttgart 1971.
[10] WITTMANN E. Educ. Studies in Math. 1969, 2.
[11] WITTMANN E. Die Deutsche Schule 1969, 61.
[12] WITTMANN E. Educ. Studies Math. 1972, 4.
[13] KOPKA J. Metoda generovaných problémů, Matematika a fyzika ve škole 1975, 1.



jubilea & zprávy

SEDMDESÁT PĚT LET FRANTIŠKA ŽIVNÉHO

V letošním roce si připomínáme významné jubileum vynikajícího pedagoga, nanejvýš moudrého, obětavého a čestného člověka, jehož lidské vlastnosti oceňujeme nejen my jako jeho spolupracovníci, ale též celá řada žáků, které během svého učitelského působení vychoval.

Frant. Živný se narodil 6. srpna 1902 v Záboří nad Labem. Po středoškolských studiích na reálném gymnáziu v Náchodě odchází do Prahy, kde studuje matematiku a fyziku na přírodovědecké fakultě UK. Studium ukončuje v r. 1927. Krátkou dobu vyučuje na reálných gymnáziích v Hradci Králové, Praze a Spišské Nové Vsi. V r. 1930 získává místo definitivního profesora na reformním reálném gymnáziu v Bohumíně. Po okupaci je nucen Bohumín opustit, působí na učitelském ústavě v Ostravě, gymnáziu v Přívoze a koncem války je totálně nasazen ve Vítkovických železárnách. Po válce je poslán zpět do Bohumína, kde obnovuje činnost českého gymnázia nejdříve jako správce, od r. 1954 pak jako jeho ředitel až do r. 1966, kdy odchází do důchodu.

Frant. Živný je znám jako člověk, který celý svůj život zasvětil svému krásnému povolání, byl přísným, avšak spravedlivým učitelem, vynikajícím odborníkem, člověkem s všestranným rozhledem. Pro tyto své vlastnosti a lidský přístup byl ve svém okolí velmi oblíben a vážen a všichni jeho žáci na něj s hlubokou úctou vzpomínají. Svým tvůrčím zanícením, všestranným zájmem a účastí může být vzorem všem mladším kolegům. Těžištěm jeho všestranných intelektuálních zájmů však vždy byla fyzika a matematika.

Od r. 1927 dodnes je aktivním členem JČSMF, zakládajícím členem pobočky v Ostravě, kde pracoval dlouhou dobu ve výboru jako místopředseda a jednatel. V r. 1965 mu bylo za celoživotní práci v Jednotě uděleno vyznamenání „Zasloužilý člen JČSMF". Patří k těm zaníceným fyzikům, kteří položili základy velmi oblíbené soutěže nadaných středoškoláků — fyzikální olympiády. Od jejího založení do r. 1975 byl aktivním členem ÚVFO, pracoval