Gian-Carlo Rota

Fenomenologie matematické pravdy

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 43 (1998), No. 1, 65--72

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/138477`

Fenomenologie matematické pravdy

Gian-Carlo Rota

Tak jako umělci, kterým se nedaří podat přesný popis toho, jak pracují, nebo vědci, kteří věří v nerealistické filosofie vědy, tak se i matematici hlásí k pojetí matematické pravdy, která nemá s pravdou nic společného.

Libovůle zpráv, které profesionálové podávají o praxi své profese, je jevem příliš všeobecným na to, aby byla smetena se stolu jako nějaká sociologická podivnost. Pokusíme se odhalit hluboce usazené důvody takového rozporu mezi čestnou praxí a vykonstruovanou teorií, přičemž vynecháme úvahy o psychologických aspektech a místo toho se soustředíme na filosofické vysvětlení.

Obraz matematické činnosti budeme brát z pozorovaných skutečností v protikladu k normativním vyhlášením jistých filosofů matematiky. Čestný pojem matematické pravdy se musí vynořit z nezaujatého zkoumání toho, co matematici dělají a nikoli z toho, co *říkají*, že dělají, nebo z toho, co si filosofové myslí, že by matematici dělat *měli*.

Pravda a tautologie

Přijatý popis matematické pravdy vypadá zhruba takto. Matematická teorie sestává z axiomů, primitivních pojmů, značení a odvozovacích pravidel. Matematický výrok se pokládá za pravdivý, je-li správně odvozen z axiomů použitím odvozovacích pravidel. Matematická teorie zahrnuje všechny možné výroky, které lze odvodit z axiomů.

Pravdivost vět matematické teorie lze zřídkakdy uvidět pouhým hleděním na axiomy, jak vám řekne každý, kdo někdy pracoval v matematice. Přesto stále věříme, že pravdivost všech vět lze „v principu nalézt" v axiomech. Termíny jako „v principu" a „nalézt" se často používají k označení „vztahu" vět matematiky k axiomům, z nichž jsou odvozeny, a významy takových termínů, jako „nalézt", „vztah" a „v principu" se hladce berou za samozřejmé. Debaty o podmínkách možnosti takových „vztahů" se zlehčují; to, na čem záleží, je dosažení co nejkratší cesty k očekávanému závěru, o němž bylo rozhodnuto předem, totiž ke kategorickému tvrzení, že všechny matematické pravdy jsou „vposledku" tautologické.

Nikdo nezajde až tak daleko, aby si pletl tautologii s trivialitou. Věty matematiky mohou být „vposledku" nebo „v principu" tautologické, ale důkazy takových tautologií velmi často vyžadují houževnaté úsilí. Tudíž i když mohou být věty matematiky

---

The Phenomenology of Mathematical Truth. Kapitola IX knihy GIAN-CARLO ROTA: *Indiscrete Thoughts.* Birkhäuser, Boston, 1997, str. 108–120.

Přeložil JIŘÍ FIALA.

tautologickými důsledky axiomů, nejsou takové tautologie, aspoň „v principu", ani bezprostřední, ani evidentní.

Jaký však má smysl používat v těchto diskusích slovo „tautologie"? Jak pomůže chápání matematiky tvrzení, že matematické věty jsou „v principu" tautologie? Takové tvrzení zdaleka nepročistí ovzduší a je způsobem, jak se zbavit zátěže chápání toho, co to matematická pravda je, tím, že tuto zátěž přeneseme na vše zachycující výraz „v principu".

Co se stane, když se výraz „v principu" pečlivě předělá tak, aby skryl normativní termín, totiž výraz „mělo by se"? Říkáme, že matematické věty jsou „vposledku", „v principu", „v zásadě" tautologické tehdy, máme-li v úmyslu říci, že by tyto věty *měly* být evidentní z axiomů, že spletitý sled sylogistických odvození, jímž nějakou větu dokazujeme, nebo pomocí nějž něčí větě rozumíme, je pouze dočasnou oporou, která by nám dříve nebo později *měla nakonec* umožnit vidět, že tento závěr je nevyhnutelným důsledkem axiomů.

Role implicitního normativního termínu „mělo by se" v tom, co se zdá být jen pouhým popisem, se zřídka kdy dostala na povrch. Možná se ukáže, že je spjata s tím smyslem, v němž se slovo „pravda" používá v praxi matematiků.

Formální pravda

Zjistíme rozdíl mezi pojetím pravdy používaným matematiky a jiným, povrchně podobným pojetím, rovněž nešťastně označeným slovem „pravda", které se používá v matematické logice a ve velké míře bylo přijato analytickou filosofií.

Úzké pojetí pravdy přicházející z matematické logiky se může mnohem vhodněji nazvat „formální verifikací". Logik označuje slovem „pravda" buď uskutečněnou formální verifikaci správnosti odvození nějakého výroku z axiomů, nebo její sémantický protějšek, uskutečněnou formální verifikaci, že nějaký výrok platí ve všech modelech.

Toto pojetí pravdy je pojetím odvozeným, to jest předpokládá už jiné pojetí pravdy, u něhož matematici mlčky setrvávají. Abyste poznali, že pojem formální verifikace je beznadějně nevhodný, proveďte následující myšlenkový pokus. Představte si přednášku z matematiky. Dokážete si představit učitele matematiky, který by cvičil své žáky *výhradně* v jejich schopnosti vytvářet logicky bezchybné důkazy z axiomů? Nebo dokonce (abychom to úmyslně přehnali až do absurdnosti) učitele, jehož hlavním zájmem je, aby studenti okamžitě poznávali důsledky „dané" sady axiomů?

Ve formálním pojmu pravdy se axiomy nezpochybňují a na dokazování vět se hledí jako na hru, v níž je každá zmínka o pravdě potlačena. Avšak žádný učitel, který má úctu sám k sobě, si nemůže dovolit vytáhnout před třídou axiomy nějaké teorie, aniž uvede nějakou motivaci, a nemůže ani od třídy očekávat, že přijme výsledky této teorie (věty) bez nějakého jiného druhu zdůvodnění, než je formální verifikace. Učitel, který chce, aby mu bylo rozuměno, je dalek toho, aby pokládal axiomy za samozřejmé a začal odvíjet jejich důsledky. Zapojí se do hry postupující vpřed i vzad, v níž jsou axiomy „zdůvodňovány" silou vět, které jsou s to dokázat. Jakmile se scéna ustaví, jsou věty, jejichž pravdivost byla předtím učiněna intuitivně zjevnou, samy nakonec učiněny nevyhnutelnými pomocí formálních důkazů, které přicházejí skoro jako dodatečný nápad, jako poslední kousek korunující evidence teorie, která byla učiněna věrohodnou už neformálním, nededuktivním a občas i neracionálním výkladem.

Dobrý učitel, kterého požádali, aby vyučoval Euler–Schäfli–Poincarého formuli, stanovící neměnnost alternujícího součtu počtu vrcholů, hran a stěn mnohostěnu, přizná před třídou, že o pravdivosti této formule byli matematici přesvědčeni dávno předtím, než byla známa nějaká správná definice mnohostěnu, a neskryje ani skutečnost, že verifikace této formule ve formálním topologickém vyjádření je myšlenkou dodatečnou. Takový učitel bude trvat na tom, aby si studenti nepletli takovou formální verifikaci s faktuální/světskou pravdou tohoto tvrzení. Právě tato faktuální/světská pravdivost motivuje všechny formální prezentace a nikoli obráceně, jak tvrdí formalističtí filosofové matematiky.

Na čem každému učiteli matematiky záleží, je učit tomu, čemu matematici ve svých běžných rozhovorech neformálně říkají „pravdivost" teorie, pravdivost, která má co do činění se souladem výroku s fakty světa, podobně jako je tomu s pravdivostí jakéhokoli fyzikálního zákona. Při vyučování matematiky je pravdivost, vyžadovaná studenty a poskytovaná učitelem, takovou faktuální/světskou pravdivostí, a nikoli tou formální pravdivostí, která se spojuje s hrou na dokazování vět. Dobrý učitel matematiky je ten, který ví, jak odhalit do plného světla takovou faktuální/světskou pravdu studentům, když je cvičí v dovednosti *zaznamenávat* takovou pravdu. V naší době se stává, že takové dovednosti splývají s podáváním přesného formálně deduktivního výkladu.

Vzdor obrovské evidenci z praxe matematiky existují vlivní myslitelé, kteří tvrdí, že diskuse o faktuální/světské pravdě mají být neustále vykazovány do brlohů psychologie. Je pohodlnější zacházet s pojmy pravdy, které jsou předepsány v *pensée de survol*, a zbavit se tak přímého styku s matematiky.

Preference úhledného pojmu formální verifikace před neupraveným pojmem pravdy, nacházejícím se v reálném světě matematiků, má emoční původ. Stalo se, že ty metody, které tak skvěle uspěly při definování a analyzování formálních systémů, selhaly v úkolu podat vysvětlení jiných, stejně relevantních rysů matematického podnikání. Filosofové matematiky projevují nepotlačitelnou touhu říci nám co nejrychleji, co *by* matematická pravda *být měla*, a přecházejí přitom zdlouhavé popisování, nezbytné pro přesný výklad pravdy, jíž matematici žijí.

Formalistické teorie pravdy jsou redukcionistické. Odvozují se od neoprávněného ztotožnění matematiky s axiomatickou prezentací matematiky. Fakt, že existuje pouze pět pravidelných těles ve třírozměrném eukleidovském prostoru, lze předkládat ve velmi odlišných axiomatických rámcích; nikdo nepochybuje o jeho pravdivosti, bez ohledu na to, která axiomatika byla vybrána pro jeho zdůvodnění. Takový nevývratný příklad by měl být dostatečným důkazem toho, že vztah mezi pravdou matematiky a axiomatickou pravdou, který je nezbytný při prezentaci matematiky, je relací *Fundierung*.

V dnešní době však pokušení psychologismu opět vystrkuje růžky a cítíme se nuceni oživovat starou a elementární antiredukcionistickou zdrženlivost. Žádná záležitost nemůže být „čistě psychologická". Psychologické aspekty vyučování matematiky musí nevyhnutelně hledat ztracenou stopu světské pravdy matematiky. Pohlížet na pravdu, jíž se učitel matematiky dovolává, jako na pouhou psychologickou záležitost, znamená předpokládat světskou matematickou pravdu a současně odmítat ji tematizovat. *Nihil est in intellectu quod prius non fieri in mundo* bychom mohli říci, vraždíce starý slogan.[1])

Matematická pravda se filosoficky nijak neliší od pravdy fyziky nebo chemie. Matematická pravda je výsledkem formulace faktů, které jsou vně ve světě, faktů, které jsou nezávislé na našem vrtochu nebo na chvilkových rozmarech axiomatických systémů.

Pravda a trivialita

Nyní budeme postupovat *proti* právě zformulované tezi, opět tím, že si vezmeme některé události z dějin matematiky. Uvedeme příklad, který ukazuje, jak pozorování praxe matematiky vede k pojetí pravdy propracovanějšímu než to, které jsme uvedli.

Náš příklad je z historie věty o prvočíslech[2]). K tomuto výsledku dospěl Gauss, veden geniální intuicí po rozsáhlém experimentování s čísly. Nikdo nepochyboval vážně o pravdivosti této věty poté, co ji Gauss předložil jako hypotézu a numericky ověřil. Matematici si však nemohou dovolit chovat se jako fyzici, kteří berou experimentální ověření za potvrzení pravdivosti. Díky velmi rychlým počítačům víme to, co se Gauss mohl jen dohadovat, že totiž jisté domněnky v teorii čísel mohou selhat pro přirozená čísla tak velká, že se nacházejí mimo dosah i nejlepších dnešních počítačů a že tudíž je formální důkaz nezbytnější než kdy dříve.

Důkaz věty o prvočíslech byl získán současně a nezávisle na přelomu století matematiky Hadamardem a de la Vallée Poussinem. Oba důkazy, které byly velmi podobné, spočívaly na nejnovějších technikách teorie funkcí komplexní proměnné. Byly oslavovány jako velká událost v dějinách matematiky. Podle mého nejlepšího vědomí nikdo v té době nevyslovil nejvnitřnější důvod k chvalozpěvu na tyto matematiky. Nesrozumitelná teorie, která byla v té době ostrou hranou matematiky, totiž teorie funkcí komplexní proměnné, vyvinutá jako odpověď na geometrické a analytické problémy, se ukázala být klíčem k zodpovězení domněnky teorie čísel, tedy oblasti naprosto odlišné.

Tajemství i sláva matematiky nespočívá ani tak ve skutečnosti, že se abstraktní teorie ukazují užitečné při řešení problémů, nýbrž ve skutečnosti, že — zázrak nad zázraky — teorie míněná pro jeden typ problémů je často jedinou cestou k řešení problémů naprosto jiného druhu, problémů, pro něž tato teorie nebyla zamýšlena. Tyto shody se vyskytují tak často, že musí náležet k samé podstatě matematiky. Žádné filosofii matematiky nelze prominout, nebude-li tyto výskyty vysvětlovat.

Mohlo by se zdát, že jakmile byla věta o prvočíslech dokázána, pak budou jiné pokusy o její důkaz zcela odlišnými technikami opuštěny jako neplodné. K tomu ale

[1]) *V rozumu není nic, co by dříve nebylo ve světě*; starým sloganem se rozumí *Nihil est in intellectu, quod non prius fuerit in sensu*, *V rozumu není nic, co nebylo dříve ve smyslech* (John Locke). Prvním, kdo tento slogan vraždil, byl G. W. Leibniz, a to dodatkem *nisi intellectus ipse* (*kromě rozumu samého*). Pozn. překl.

[2]) Věty o asymptotickém chování počtu prvočísel, tj. $\lim_{n\to\infty} \pi(n)/(n \log n) = 1$, kde $\pi(n)$ je počet prvočísel $\leqq n$. Pozn. překl.

po Hadamardovi a de la Vallée Poussinovi nedošlo. Místo toho se zhruba po padesáti letech začal objevovat v nejlepších matematických časopisech jeden článek za druhým, které podávaly jemnosti, zjednodušení, alternativní cesty, mírná zobecnění a nakonec alternativní důkazy věty o prvočíslech.

Například ve třicátých letech americký matematik Norbert Wiener rozvinul rozsáhlou teorii tauberovských vět, která sjednotila velké množství disparátních výsledků v klasické matematické analýze. Vynikající aplikací Wienerovy teorie, široce chválené po celém matematickém světě, byl právě nový důkaz věty o prvočíslech.

Vnější pozorovatel by po vyslechnutí této epizody v dějinách matematiky mohl být veden k otázce: „Cože? Nějaká teorie si nárokuje být novým přínosem k matematice tím, že vychloubačně předvádí jako své hlavní použití výsledek, který v té době už byl rozvařen v několika polévkách? Nečeká se snad od matematiky, že bude řešit *nové* problémy?“

Pro zmíněné podezření dodejme, že Wienerova hlavní tauberovská věta byla a stále je pokládána za velký výsledek. Wienerovi se jako prvnímu podařilo vsunout náznak čistě konceptuálního vhledu do důkazu, který se do té doby zdál tajemný. Původní důkaz věty o prvočíslech tajemným způsobem spojoval asymptotické chování prvočísel s chováním nul nějaké meromorfní funkce, totiž Riemannovy ζ-funkce. Ačkoli byla tato souvislost poznána už předtím Riemannem a ačkoli byla logika takového nepravděpodobného spojení důkladně testována mnoha matematiky, kteří připravili cestu prvnímu důkazu, přesto nelze o tomto důkazu říci, že by byl založen na zjevných a intuitivních pojmech. Wienerovi se podařilo ukázat cestou zcela odlišnou od cest, po nichž kráčeli jeho předchůdci, cestou zcela nečekanou, že by rozložení prvočísel mohlo být podloženo konceptuálně.

Wienerův důkaz měl galvanizující účinek. Od těch dob se věřilo, že by se důkaz věty o prvočíslech mohl udělat elementárně.

Co však má znamenat, řekneme-li, že je nějaký důkaz „elementární“? V případě věty o prvočíslech to znamená, že se uvede argument, který ukáže „analytickou nevyhnutelnost“ (v Kantově smyslu tohoto výrazu) věty o prvočíslech na základě analýzy pojmu prvočísla bez odvolávání se na vnější techniky.

Trvalo dalších deset let a bylo třeba několika stovek výzkumných prací, aby se z Wienerova důkazu odstranila spousta nepodstatností. První elementární důkaz věty o prvočíslech, důkaz, který „v principu“ používal pouze elementární odhady relativních velikostí prvočísel, byl nakonec podán matematiky Erdősem a Selbergem. Jejich důkaz byl opět oslavován jako milník v teorii čísel.

Elementární důkazy jsou zřídka jednoduché. Erdősův a Selbergův důkaz zaujímá dobrých padesát stránek sice elementárních, ale hutných úvah a je delší a obtížnější na sledování než kterýkoli z důkazů předcházejících. Jeho zásluha je však v tom, že spočívá pouze na pojmech, které jsou definici prvočísla „vlastní“, a na několika málo jiných elementárních faktech, sahajících k Eukleidovi a Eratosthenovi. V principu jejich důkaz ukázal, jak lze větu o prvočíslech převést na dosti triviální argument, jakmile vhodně uchopíme základní pojmy. Ale jen v principu. Bylo třeba dalších několika set výzkumných prací, osekávajících Erdősův a Selbergův argument až na samu dřeň, než v polovině šedesátých let americký matematik Norman Levinson (který byl žákem

Norberta Wienera) publikoval krátkou poznámku pod názvem „Elementární důkaz věty o prvočíslech“[3]). Přes svůj skromný název obsahovala Levinsonova poznámka čistě elementární důkaz věty o prvočíslech, který může při pečlivém čtení sledovat kdokoli, kdo má jen ty znalosti matematiky, které nabízí průměrná americká střední škola.

Po Levinsonově článku začal výzkum důkazů věty o prvočíslech slábnout. Levinsonův důkaz věty o prvočíslech nebo některá z četných variant, které byly od té doby objeveny, je nyní součástí úvodních kursů teorie čísel.

Jaké filosofické závěry lze z tohoto zlomku historie matematiky vyvodit?

Listujeme-li kterýmkoli z nějakých tří tisíc časopisů, které publikují původní matematické vědecké práce, brzy odhalíme, že jen málo publikovaných prací nabízí řešení problémů do té doby neřešených; ještě méně z nich přináší formulace nových teorií. Drtivá většina výzkumných prací v matematice se zabývá nikoli dokazováním, nýbrž znovudokazováním; nikoli axiomatizací, nýbrž novou axiomatizací; nikoli vynalézáním, nýbrž sjednocováním a pořádáním; krátce tím, čemu Thomas Kuhn říkal „uklízení“.

Vzhledem k této evidenci jsme nuceni volit mezi dvěma závěry. Prvním je, že kvalita matematického bádání je v naší době nižší, než bychom čekali. Avšak jaký druh evidence by nás mohl vést k takovému očekávání? Jistě ne historie matematiky v osmnáctém nebo devatenáctém století. Publikace v matematice sledovaly v těchto stoletích popsaný vzor, jak ukáže nezaujaté zkoumání minulosti.

Možný je tedy jen druhý závěr. Naše předpojaté představy o tom, co *by* matematický výzkum měl být, neodpovídají skutečnosti matematického výzkumu. Profese matematika nesestává z toho, že by matematika vynalézala z ničeho nic nové teorie, které by odhalovaly tajemství přírody.

Dodejme honem, že opačný názor o činnosti matematiků je stejně chybný: není pravda, že matematici *neobjevují* nové teorie. Objevují; fakticky si tím vydělávají na živobytí. Avšak většinu výzkumných prací v matematice nelze snadno klasifikovat podle jejich původnosti. Nelítostný soudce by klasifikoval všechny matematické práce jako nepůvodní, snad s výjimkou dvou, tří za století; liberálnější soudce by nalezl jiskru originality ve většině otištěných prací. Dokonce i práce, jejichž cílem je podat řešení do té doby neřešených problémů, lze buď přísně ocejchovat jako cvičení různých stupňů obtížnosti, nebo laskavěji jako práce, otevírající nové odvážné světy.

Hodnota matematických výzkumných prací není dána deterministicky a chybujeme, nutíme-li naše soudy o hodnotě nějaké práce, aby odpovídaly objektivistickým standardům. Práce, které byly před pouhými dvaceti lety pokládány za fundamentální, se dnes pokládají za zavádějící.

Novější teorie se nepodřazují pod teorie předcházející a nerozšiřují je kvantitativním nárůstem objemu informací. Vynalézání teorií a řešení těžkých problémů nejsou procesy, které by se odvíjely lineárně v čase. Nikdy nebylo zjednodušení na linearitu tak mimo jako dnes. Jsme svědky návratu ke konkrétní matematice devatenáctého století po dlouhém období abstrakce; algoritmy a techniky, jimž jsme se kdysi posmívali, se

---

[3]) NORMAN LEVINSON: *On the Elementary Proof of the Prime Number Theorem.* Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, (2) *15,* 1966–67, 141–146.

dnes, po stoleté přestávce, znovu oceňují. Současná matematika se svým nedostatkem jednotícího trendu, se svými historickými nespojitostmi a svými propady do minulosti poskytuje další evidenci konce dvou překážejících viktoriánských dědictví: ideje pokroku a mýtu definitivnosti.

Nejednoznačnost pravdy

Načrtli jsme dvě zdánlivě si odporující pojetí matematické pravdy. Pozorujeme-li vývoj matematiky, vnucují se nám obě tato pojetí.

První pojetí se podobá klasickému pojetí pravdy přírodního zákona. Podle tohoto prvního pojetí vyjadřují matematické věty tvrzení o faktech; podobně jako všechny fakty vědy se i ony objevují pozorováními a pokusy. Filosofická teorie matematických faktů se tedy neliší podstatně od teorie jakýchkoli jiných vědeckých faktů, až na fenomenologické detaily. Matematické fakty vykazují například větší přesnost ve srovnání s fakty některých jiných věd, např. biologie. Málo záleží na tom, že by fakty matematiky mohly být „ideální“, zatímco přírodní zákony jsou „reálné“, jak říkávali filosofové před nějakými padesáti lety. Ať už jsou ideální nebo reálné, jsou fakty matematiky tady ve vnějším světě a nejsou to výtvory něčí mysli. Matematika i přírodověda si kladou týž úkol — odhalovat pravidelnosti ve světě. To, že některé části tohoto světa mohou být reálné a jiné ideální, je poznámka málo důležitá.

Zdá se, že druhý názor vede k opačnému závěru. Důkazů matematických vět, jako je třeba důkaz věty o prvočíslech, se dosahuje s vynaložením velké intelektuální námahy. Postupně se však přeměňují na triviality. Nepodporuje tento časový proces zjednodušování, který přeměňuje padesátistránkový důkaz na půlstránkový argument, tvrzení, že věty matematiky jsou výtvory našeho vlastního intelektu? Neplyne z těchto pozorování, že původní obtížnost matematické věty, obtížnost, s níž zápasíme, když klameme sami sebe tím, že jsme „objevili“ novou větu, je ve skutečnosti pouze důsledek lidské slabosti, kterou jednoho dne rozptýlí nějaký silnější duch tím, že předvede trivialitu, kterou se nám dosud nepodařilo rozpoznat?

O každé matematické větě se nakonec ukáže, že je triviální. Ideál pravdy u matematiků je trivialita a společenství matematiků neustane ve svém bobřím hryzání nově objeveného výsledku, dokud nepředvede k uspokojení všech, že veškeré těžkosti původního důkazu byly pochybné a že na konci cesty se nachází jen analytická trivialita. Není pokrok v matematice — pokud vůbec můžeme o pokroku hovořit — jen postupné probouzení z „*el sueño de la razón*“[4])?

Mnou navrhované východisko z paradoxu těchto dvou zdánlivě nesmiřitelných názorů na matematiku využívá jeden argument Edmunda Husserla. Týž argument je užitečný při mnoha jiných filosofických záhadách a zaslouží si proto pojmenování. Rád bych jej pokřtil „argument *ex universali*“.

[4]) *Spánku rozumu.* Pozn. překl.

Nejprve si problém shrňme. Na jedné straně je matematika nepochybně záznamem jevů, které nejsou libovolně určovány lidskou myslí. Matematické fakty sledují nepředvídatelné *apriorní* chování přírody, která je, Einsteinovými slovy, *raffiniert*, ne však *boshaft*. Na druhé straně síla rozumu dříve či později redukuje každý takový fakt na analytický výrok znamenající totéž, co trivialita. Jak mohou být obě tato tvrzení pravdivá?

Všimněte si však, že takové křiklavě duplicitní chování není hájemstvím pouze matematického bádání. Fakty jiných věd, fyziky a chemie, a jednou (pevně věříme) i biologie, vykazují totéž duplicitní chování.

Každý zákon fyziky, je-li vhodně zaobalen do matematického prostředí, se stává matematickou trivialitou. Hledání univerzálního zákona hmoty, hledání, jímž se fyzika zabývala v tomto století, je ve skutečnosti hledáním trivializujícího principu, univerzálního „nic než". Unifikace chemie, která byla vypracována kvantovou mechanikou, není motivována odlišně. A současnou módu molekulární biologie lze připsat zdání naděje, že tato skvělá nová oblast nabízí biologii, poprvé v historii věd o životě, možnost konečně uniknout vrtošivosti přírodní náhody do útulku kantovské analytičnosti.

Ideálem *každé* vědy, nejen matematiky, je zbavit se jakéhokoli druhu syntetických *aposteriorních* výroků a ponechat v působnosti jen analytické triviality. Vědu lze definovat jako transformování syntetických faktů přírody na analytické fakty rozumu.

Argument *ex universali* tedy ukazuje, že paradox víry v objevování pravd matematiky sdílejí pravdy všech věd. Přijmeme-li to, nedostane se nám sice žádné bezprostřední útěchy v naší lopotě, přesto však je útěchou vědět, že nejsme ve své bídě sami. A navíc poznání univerzálnosti našeho paradoxu nás varuje před tím, abychom se byť jen pokusili vypořádat s tímto paradoxem v úzkém rámci filosofie matematiky. V tomto bodě vše, co můžeme udělat, je vrátit celý problém epistemologům nebo metafyzikům a připomenout jim důtklivě: *hic Rhodus, hic salta.*[5])

[5]) *Tady je Rhodos, tady skoč.* Z ezopské bajky o muži, který se vychloubal, že na Rhodu skočil dále než všichni ostatní Rhoďané. Na to mu řekli: tady je Rhodos, tady nám to předveď, tady skoč! Pozn. překl.