Petr Hájek; Antonín Sochor

Klasická logika v kontextu svých zobecnění a boj docenta Fialy proti větrným mlýnům

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 43 (1998), No. 1, 39--45

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138473

Klasická logika v kontextu svých zobecnění a boj docenta Fialy proti větrným mlýnům

Petr Hájek a Antonín Sochor, Praha

Ve svém článku „Je elementární logika totéž co logika prvního řádu?“ [4] diskutuje doc. Fiala otázku, která je názvem jeho článku. Říká, že „mnozí soudí, že není logiky kromě logiky prvního řádu“, a cituje „Hilbertovu tezi“, kterou formuluje takto: „všechny matematické výroky lze vyjádřit v logice prvního řádu a neformální pojem dokazatelnosti lze nahradit formálním pojmem dokazatelnosti v logice prvního řádu“. Takto formulovanou tezi zpochybňuje tím, že uvádí některá známá podstatná rozšíření predikátového počtu 1. řádu (zejména kvantifikátor „existuje nekonečně mnoho“ a tzv. henkinovské kvantifikátory) a navrhuje zahrnout zejména Henkinovy kvantifikátory do „elementární logiky“. Na konci článku uvažuje o tom, zda „zastánci staré logiky budou vymýšlet všelijaké triky (...) na její záchranu.“

Pojem elementární logiky není v uvedeném článku nijak precizován, takže se lze jen domýšlet, co se tím myslí: patrně jde o to, která logika má být vzata za základ (studia) a s kterou mají být všechny ostatní srovnávány. Logikou prvního řádu se zřejmě rozumí dvouhodnotový predikátový počet (1. řádu), tedy to, co je v matematické logice často nazýváno klasickou logikou.

Fialův článek[1]) je nutno z valné části odmítnout jako nevěcný, protože nereflektuje dostatečně situaci v současné matematické logice (o jiné logice zde nebude řeč) a nabízí nevhodné řešení. Pokusíme se

1. pozitivně vymezit místo klasické logiky v matematické logice,
2. objektivně zhodnotit logiku henkinovských kvantifikátorů v kontextu různých zobecnění klasické logiky a nakonec
3. vzít vážně Fialovu otázku chápanou jako otázku, zda je možno, aby centrální místo v logice zaujal jiný systém než klasická logika.

1. Klasická logika má přirozené centrální místo v logice.

Klasickou logiku je možno prezentovat v různých navzájem ekvivalentních podobách[2]), ale jde o jedinečný matematický objekt, podobně jako struktura reálných čísel nebo euklidovská rovina.

[1]) Předpokládáme, že čtenář má tento článek k dispozici.

[2]) Různé možnosti volby základních logických spojek, jeden základní kvantifikátor nebo dva, logika s funkcemi či bez funkcí atd.

Prof. RNDr. Petr Hájek, DrSc. (1940), ÚIVT AV ČR Praha, RNDr. Antonín Sochor, DrSc. (1942), MÚ AV ČR Praha.

Pro pohodlí čtenáře, který není odborníkem v matematické logice, uveďme nejprve některé charakteristické vlastnosti[3]) a připomeňme některé základní pojmy klasické logiky. (Odborník nechť toto shrnutí přeskočí.)

- *Výroky jsou finitní objekty.* Pojem výroku je matematizován pojmem *formule.* Formule si lze představovat jako konečné posloupnosti prvků jisté abecedy (slova, např. $(\forall x)(\forall y)(x + y = y + x)$ nebo $x \leqq y \to x + z \leqq y + z$ apod.), přičemž umíme algoritmicky rozpoznat, zda nějaké slovo v naší abecedě je formule nebo není (např. $\forall$+++ není formule). Technicky řečeno, množina všech formulí je ***rekurzivní.*** Ještě jednou, to znamená, že existuje algoritmus, který pro každé slovo z naší abecedy po konečně mnoha krocích řekne buďto „ano“ — slovo je formule, nebo „ne“ — není to formule. V tomto smyslu budeme používat pojem rekurzivní množiny (slov, přirozených čísel apod.).
- *Sémantika je dobře definována.* Je přesně definováno, co jsou ***modely*** predikátového počtu. Každý model **M** sestává z nosné množiny M a z množinových relací (interpretujících symboly jako $\leqq$, zvané ***predikáty***) a z množinových operací na M (interpretujících symboly jako +, zvané ***funkční symboly***). Je přesně definováno, co znamená, že formule φ je ***pravdivá*** v **M** (pomocí jisté slavné Tarského definice). Jsou dvě pravdivostní hodnoty: pravda a nepravda (dvouhodnotovost klasické logiky).
- *Dedukce je dobře definována. Pojem důkazu je rekurzivní.* Jisté formule jsou prohlášeny za ***logické axiomy*** a jsou definována jistá ***dedukční pravidla. Teorie*** v klasické logice je dána nějakou množinou formulí zvaných ***speciální axiomy*** této teorie (např. axiomy grupy). ***Logický důkaz*** je konečná posloupnost formulí, jejíž každý člen je buď logický axiom, nebo bezprostředně vyplývá z některých předchozích členů podle některého dedukčního pravidla. ***Důkaz v teorii T*** je definován podobně, ale navíc se v něm mohou vyskytovat speciální axiomy teorie T. Formule je ***dokazatelná***, je-li členem nějakého důkazu. Velmi podstatné je, že množina všech logických axiomů a také pojem bezprostředního vyplývání je rekurzivní (v již uvedeném smyslu) a z toho už plyne, že množina všech logických důkazů je rekurzivní. Je-li množina speciálních axiomů nějaké teorie T rekurzivní, pak je rekurzivní i množina důkazů v této teorii. To odpovídá požadavku objektivní verifikovatelnosti toho, zda něco je či není důkaz: kdybychom neuměli rozpoznávat, zda formule je či není axiomem (a také zda bezprostředně vyplývá z jiných podle některého dedukčního pravidla), neuměli bychom ani rozpoznávat, zda nějaký text je či není důkaz, což odporuje „klasické“ představě o logice a dedukci.
- *Dedukce je v dokonalém vztahu k pravdivosti.* Každý axiom klasické logiky je pravdivý ve všech jejích modelech a dedukční pravidla zachovávají pravdivost; tedy každá formule logicky dokazatelná je pravdivá ve všech modelech. ***Model teorie T*** je model logiky, v němž jsou pravdivé všechny speciální axiomy teorie T. Každá formule dokazatelná v T je pravdivá ve všech modelech této teorie. Tato vlastnost se nazývá ***korektnost.*** Obrácená a mnohem hlubší vlastnost je ***úplnost***: Každá formule

---

[3]) Později uvedeme, které z těchto vlastností logika s henkinovskými kvantifikátory má a které nikoli.

pravdivá ve všech modelech (klasické logiky nebo nějaké teorie T nad touto logikou) je dokazatelná (v klasické logice, v teorii T). Tedy: klasická logika (predikátový počet 1. řádu) je ***rekurzivně úplně axiomatizovaná***. Ještě jednou: to znamená, že má rekurzivní axiomatizaci, která je korektní a úplná vůči jeho sémantice.

Historickým vývojem se stala klasická logika centrální součástí matematické logiky. K tomu, že si tuto pozici udržela (a patrně udrží i v budoucnosti), velikou měrou přispěly její právě popsané vlastnosti. Nicméně rozhodující měrou zapůsobila i dostatečná síla klasické logiky a zejména souhlas většiny matematické komunity, že pravidla klasické logiky formalizují pravidla matematického uvažování[4]).

Fialovu formulaci „Hilbertovy teze" je nutno opravit takto: Empiricky se ukazuje, že celou současnou matematiku je možno vybudovat ve vhodných rekurzivně axiomatizovaných teoriích v rámci klasické logiky. Úlohu takovéto vhodné teorie samozřejmě hraje ve většině případů teorie množin. Skutečnost, že lze formulovat rekurzivně axiomatizovanou teorii množin (Zermelo–Fraenkelovu nebo jí ekvivalentní Bernays–Gödelovu) v rámci klasické logiky a uvnitř ní vybudovat zejména pojmy konečných a nekonečných množin, hierarchii mohutností atd., je obrovskou vymožeností: nejsou třeba různé typy[5]) apod., stačí klasická logika. Uvnitř teorie množin je pojem „existuje nekonečně mnoho" definován formulí logiky 1. řádu. *Pozor:* Je tak definován *uvnitř* teorie množin, tj. v každém modelu teorie množin má požadované vlastnosti. Analogicky v každém modelu teorie množin máme různé mohutnosti, přitom celý model se zvnějšku může jevit spočetný — a vidět v tom „paradox" je staromódní, tak jako dnes nikdo z matematiků (ani doc. Fiala) nevidí paradox ve skutečnosti, že nekonečnou množinu lze prostě zobrazit na její vlastní část.

Ještě na vysvětlenou: elementární teorie grup má symboly pro rovnost a grupové sčítání (chcete-li, ještě pro neutrální prvek a prvek inverzní k danému)[6]); skutečnost, že neexistuje formule klasické logiky pravdivá právě ve všech torzních (Fiala říká: periodických) grupách, není žádné neštěstí: elementární teorie grup má vhodnou interpretaci v axiomatické („elementární") teorii množin a v teorii množin lze pochopitelně kvantifikovat přes přirozená čísla v ní vybudovaná, a tedy i rozlišit torzní grupy a grupy bez torze.

Zmiňme ještě axiomatickou aritmetiku 1. řádu (Peanovu aritmetiku PA), která je z hlediska matematické logiky vedle teorie množin snad nejdůležitější teorií. Je rekurzivně axiomatizovaná a lze v ní dokázat spoustu vlastností přirozených čísel (která tvoří standardní model $\mathbf{N}$ této teorie). Ale víme díky Gödelovi a dalším, že ani ona, ani žádné její bezesporné rekurzivně axiomatizované rozšíření nedokazuje ***všechny*** věty pravdivé v $\mathbf{N}$: množina vět pravdivých v $\mathbf{N}$ je vysoce neefektivní (není aritmetická). Ovšemže existuje nerekurzivní axiomatika, dokazující právě všechny věty pravdivé v $\mathbf{N}$, totiž množina vět pravdivých v $\mathbf{N}$. Brát ji za „elementární" aritmetiku

---

[4]) V tomto bodě není rozporu s článkem [4], doc. Fiala navrhuje pouze ***přidat*** další principy. Naopak stoupenci intuicionistické logiky (viz dále) navrhují některé principy vypustit.

[5]) V Russellově pojetí.

[6]) Vida: zde se termín „elementární" vskutku používá.

by však bylo bláhové, protože by nešlo rozhodovat, zda něco je či není axiomem této teorie.

Tato chvála klasické logiky ovšem neznamená, že by se logici bránili intenzivnímu studiu jiných logik, ba naopak:

2. V soudobé logice se studuje (prostředky matematické logiky) bohaté spektrum variant, zobecnění a rozšíření klasické logiky.

Uveďme stručný (nevyčerpávající) přehled.

- *Intuicionistická logika* — zeslabení klasické logiky nedokazující zákon vyloučeného třetího. Rekurzivně axiomatizovaná, úplná vůči vhodné (kripkovské) sémantice. Viz van Dalenovu kapitolu v třetím díle [5].
- *Modální logiky* nejrůznějších druhů, valnou většinou rekurzivně axiomatizované, úplné vůči vhodné kripkovské sémantice. Viz několik kapitol v druhém díle [5].
- *Logiky se zobecněnými kvantifikátory*: mohutnostní, pravděpodobnostní a jiné. Je pozoruhodné, že logika s kvantifikátorem „existuje nekonečně mnoho" není rekurzivně úplně axiomatizovatelná, neboť v ní lze vhodnou formulí odlišit standardní model aritmetiky (Fiala to též uvádí) — a jak jsme řekli, množina formulí pravdivých v **N** je vysoce neefektivní a mj. ji nelze popsat jako množinu formulí dokazatelných v nějaké rekurzivně axiomatizované teorii.

  Je ještě pozoruhodnější, že logika s kvantifikátorem „existuje nespočetně mnoho" *je* rekurzivně axiomatizovatelná [10]. O kvantifikátorech „pravděpodobnost, že $\varphi(x)$ je větší než α" viz [11].

  Henkinovy kvantifikátory popisované Fialou jsou dostatečně intenzivně studovány (viz např. kapitolu „Henkin quantifiers" v [12]). Logika s henkinovskými kvantifikátory se shoduje s klasickou logikou v tom, že formule jsou finitní objekty. Z faktu (zdůrazňovaného Fialou), že v této logice je definovatelný kvantifikátor „existuje nekonečně mnoho", vyplývá, že logika s těmito kvantifikátory není rekurzivně úplně axiomatizovatelná (kdyby měla rekurzivní axiomatizaci[7]), která je úplná, měla by ji i logika s kvantifikátorem „existuje nekonečně mnoho"). Dále je obtížné definovat korektně sémantiku henkinovských kvantifikátorů: Krynicki a Mostowski v [12] uvádějí dvě definice, přičemž první (obvyklá) má přirozené vlastnosti pouze za předpokladu axiomu výběru.
- *Logika na přípustných oborech* (admissible sets). Zobecňuje pojem konečnosti v definici formule jakožto jistého konečného objektu a vymezuje vlastnosti, které musí mít nějaký obor, aby formule konečné ve smyslu tohoto oboru (ale ve skutečnosti možná nekonečné) měly vlastnosti odpovídající vlastnostem klasické logiky (úplnost apod.). Viz klasickou monografii [1].

---

[7]) Ještě jednou: takový systém axiomů a dedukčních pravidel, že příslušný pojem důkazu je rekurzivní.

Nejmenší přípustná množina dá klasickou logiku. Poznamenejme, že pravděpodobnostní kvantifikátory se přirozeně axiomatizují v logikách nad jinými přípustnými množinami.

- *Logika konečných modelů* (finite model theory). Varianta klasické logiky (nebo i jiných systémů) připouštějící jen konečné modely. Široce rozvíjena v teoretické informatice (databáze). Klasický výsledek Trachtenbrotův říká, že není rekurzivně úplně axiomatizovatelná. Viz [3].
- *Vícehodnotové logiky, fuzzy logika.* Místo dvou pravdivostních hodnot se pracuje s algebrami pravdivostních hodnot majícími více (konečně či nekonečně mnoho) prvků. Viz např. [6]. Zvláštní impuls pro studium vícehodnotových logik (s komparativním pojmem pravdivosti) je fuzzy logika jakožto logika vágních výroků. Solidní matematické základy jsou nedávného data [7], [9]. Fuzzy logika (chápaná jako striktní matematická logika) nabízí systémy hluboce analogické logice klasické s rekurzivními axiomatizacemi úplnými vůči velmi přirozené sémantice (vícehodnotový Tarského pojem pravdy).

Z uvedeného přehledu je snad zřejmé, že klasickou logiku není třeba nijak zachraňovat: vede se jí dobře jako první mezi širokým příbuzenstvem jiných logik, které se přirozeně rozvíjejí. Patří ke správnému chování, aby každá nová logika měla vyjasněn vztah ke klasické: v jakém smyslu ji obsahuje či je v ní obsažena, v čem ji přesahuje a jak se to má se základními vlastnostmi, zejména možností rekurzivní axiomatizace úplné vůči vhodné sémantice.

3. Takže: je klasická logika „elementární logika“?

Logika s henkinovskými kvantifikátory je rozvíjena a studována; je však spíše kuriozitou a jako „centrální“, „elementární“ logika místo klasické je velmi obtížně představitelná především pro silnou neefektivnost — nemožnost úplné rekurzivní axiomatizace a také pro problémy s definicí sémantiky[8]). Zdůrazněme, že na požadavku, abychom byli schopni efektivně rozpoznat, co je a co není důkaz, se shodne převážná většina matematiků[9]).

K tomu je nutno podotknout toto: Víme-li, že je nemožné logiku s henkinovskými kvantifikátory rekurzivně axiomatizovat úplně (tj. ještě jednou: tak, aby dokazatelné byly právě všechny formule pravdivé ve všech modelech), je možno se ptát, zda existují aspoň rekurzivní axiomatizace, které jsou korektní (co dokáží, je pravda ve všech modelech) a dostatečně silné, čili zda se v logice s henkinovskými kvantifikátory dá

---

[8]) Článek [4] se o těchto problémových oblastech vůbec nezmiňuje.

[9]) Otázka lineárního zápisu je podružná: formule klasické logiky se často prezentují nelineárně (jako konečné stromy) a formule s henkinovskými kvantifikátory lze kódovat lineárně (jak to ostatně Fiala sám dělá při verbálním přepisu typické henkinovské formule). K tomu ještě dodejme: možnost lineárního zápisu formulí (jako slov v jisté abecedě) koresponduje s linearností přirozeného jazyka (mluveného i psaného).

rozumně *dokazovat.* To je principiální otázka (o níž Fiala nic neříká). Jisté výsledky v tomto směru najde čtenář v citovaném článku Krynického a M. Mostowského v [12].

Co bylo řečeno, zajisté zařazuje logiku s henkinovskými kvantifikátory důstojně mezi systémy vhodné jako témata doktorandských disertací a referátů na odborných konferencích; ale chtít s ní *začínat* znamená začínat s mimořádně komplikovaným, rekurzivně neaxiomatizovatelným a obtížně interpretovatelným systémem.

Navíc připomeňme, v tomto století se někteří matematici pokoušeli nahradit v centrální roli klasickou logiku *logikou intuicionistickou.* Sovětští logici z žertu říkali, že „ještě tato generace bude žít v konstruktivismu" (tedy její logika bude intuicionistická) — ale nebude. Pokus nahradit klasickou logiku intuicionistickou logikou se historicky nezdařil, přestože tato logika má potřebné pozitivní vlastnosti (rekurzivní axiomatizovatelnost i úplnost). Intuicionistická logika zůstává jednou z důležitých teoreticky zajímavých variant klasické logiky, nic více a nic méně.

Daleko spíše než logika s henkinovskými kvantifikátory by mohla na místo „elementární logiky" aspirovat *fuzzy logika* (dostatečně matematicky vybudovaná, viz [9]), která jednak má úplnou rekurzivní axiomatiku, jednak matematicky dobře modeluje vztah důsledku mezi vágními predikáty. Ale znovu: přirozenější je začít s klasickou logikou a prezentovat fuzzy logiku jako její rozšíření.

Ovšemže nevíme, jak se bude logika dále vyvíjet, ani jak se bude vyvíjet celá matematika. Kdoví: možná že jednou budou matematici za základní matematickou strukturu pokládat kvaterniony a odsunou reálná čísla do historické veteše. Dnes se nám to však zdá absurdní — a stejně absurdní nám připadá (při vší úctě k doc. Fialovi) představa centrálního postavení logiky s henkinovskými kvantifikátory. Neznáme žádné zastánce staré logiky, kteří by vymýšleli triky na její záchranu jakožto *jediné* logiky; pokud existují, pak leda na periferii matematickologické komunity. Čím více se rozvíjejí varianty a zobecnění klasické logiky (což se hojně děje)[10]), tím více vyniká centrální místo klasické logiky. Odpověď na Fialovu otázku „Je elementární logika totéž co logika 1. řádu?" tedy zní: ANO.

Literatura

[1] BARWISE, J.: *Admissible sets and structures.* Springer-Verlag 1975.

[2] EBBINGHAUS, H. D., FLUM, J. and THOMAS, W.: *Mathematical Logic.* Springer-Verlag 1984.

[3] EBBINGHAUS, H. D., FLUM, J.: *Finite model theory.* Springer-Verlag 1993.

[4] FIALA, J.: *Je elementární logika totéž co predikátová logika 1. řádu?* Pokroky matematiky, fyziky a astronomie *42* (1997), 127–133.

[5] GABBAY, D. and GUENTHER, F.: *Handbook of Philosophical Logic.* Vol. II (1994), Vol. III (1996), Kluwer.

[6] GOTTWALD, S.: *Mehrwertige Logik.* Akademie-Verlag, Berlin, 1988.

[7] GOTTWALD, S.: *Fuzzy sets and fuzzy logic.* Viehweg 1995.

[10]) Rozšíření klasické logiky si našla už místo i v základních monografiích o matematické logice, např. [13], [2]

[8] HÁJEK, P.: *Fuzzy logic from the logical point of view.* In *SOFSEM'95: Theory and Practice of Informatics; Lecture Notes in Computer Science 1012* (Milovy, Czech Republic, 1995), M. Bartošek, J. Staudek, and J. Wiedermann, Eds., Springer-Verlag, pp. 31–49.

[9] HÁJEK, P.: *Metamathematics of fuzzy logic.* Vyjde v nakladatelství Kluwer.

[10] KEISLER, H. J.: *Logic with the quantifier „there are uncountably many".* Annals of Math. Logic *1* (1970), 1–93.

[11] KEISLER, H. J.: *Probability quantifiers.* In: (Barwise and Feferman, ed.) Model-theoretic logics, Springer-Verlag 1985, 579–596.

[12] KRYNICKI, M., MOSTOWSKI, M., SZCZERBA, L. W.: *Quantifiers: logic, models, computation.* Vol. I. Kluwer 1995.

[13] MONK, D.: *Mathematical logic.* Springer-Verlag 1976.

Co je to elementární logika?

Jaroslav Peregrin

Ve svém článku *Je elementární logika totéž co predikátová logika prvního řádu?* (Pokroky matematiky, fyziky a astronomie *42*, 1997, 127–133) klade Jiří Fiala nesmírně zajímavou otázku, zda je opodstatněné ztotožňovat elementární logiku s predikátovou logikou prvního řádu; s pomocí argumentů propagovaných již delší dobu finským logikem a filosofem Jaako Hintikkou (viz již jeho *Logic, Language-Games and Information*, Clarendon Press, Oxford, 1973; nejnověji jeho *The Principles of Mathematics Revisited*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996) naznačuje, že by tomu tak být nemuselo. Myslím, že uváděná argumentace stojí za bližší rozbor.

Hintikka v podstatě říká: Kvantifikované formule predikátové logiky jsou svou podstatou o vybírání prvků z univerza; například $\forall x \exists y\, R(x,y)$ neříká nic jiného než to, že ke každému x můžeme vybrat y, které je k němu ve vztahu R. Obecněji říká Hintikka to, že každá formule je vlastně zápisem určité hry (ve smyslu matematické teorie her), jejíž některé tahy spočívají ve vybírání individuí. Na základě tohoto se pak ptá: je nějaký rozumný důvod, proč se omezovat jenom na hry toho typu, které jsou vyjádřitelné formulemi standardního predikátového počtu? Proč připouštět jen hry s úplnou informací (tj. ty, při kterých jsou při každém tahu k dispozici všechny tahy předchozí), proč vylučovat hry jiné; tudíž proč připouštět jen lineárně uspořádané kvantifikátory a nepřipustit i kvantifikátory uspořádané třeba jen částečně?

Doc. RNDr. JAROSLAV PEREGRIN, CSc. (1957), Filosofický ústav AV ČR, Jilská 1, 110 00 Praha 1.