

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Jiří Závorka

Základy automatické regulace

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 10 (1965), No. 4, 202--226

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/138462>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1965

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

ZÁKLADY AUTOMATICKÉ REGULACE

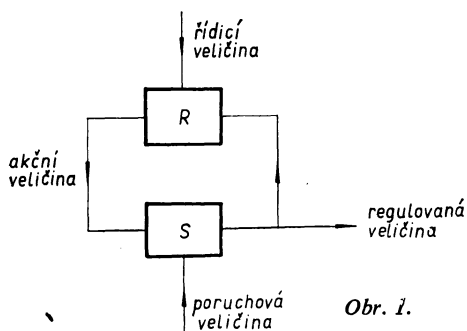
PŘEHLED LINEÁRNÍ TEORIE ŘÍZENÍ

Jiří ZÁVORKA, Praha

1. ÚVOD A ZÁKLADNÍ POJMY

Při rozvoji techniky v různých oblastech jejího uplatnění se vyskytuje jeden společný problém, úkol, který vyplývá z požadavku zajistit určitý časový průběh některých veličin a parametrů technologického procesu – otáček, průtoků, tlaků, teplot, složení aj.

Řešení tohoto úkolu je předmětem oboru *automatizace*, který je součástí širšího vědního oboru – kybernetiky. Automatická regulace je výsledkem vývojové linie techniky, kterou lze v hrubých rysech charakterisovat těmito stadii: *mechanizace* – proces vývoje techniky, kde se využívá technických zařízení k osvobození člověka od namáhavé a opakující se fyzické práce; *automatizace* – proces vývoje techniky, kde se využívá technického zařízení k osvobození člověka nejen od technické, ale zejména od duševní řídicí práce. Mezi těmito dvěma stadii stojí (významově, nikoli časově z hlediska vývoje) *ovládací automatické zařízení*, vykonávající samočinně daný úkol určitým sledem operací, které se však samy nekontrolují, nemají zpětnou vazbu (viz níže). Na ně navazují *regulační zařízení*, která slouží k udržování hodnot regulované veličiny podle daných podmínek a hodnot této veličiny zjištěných měření. Podle toho, zda spojovacím článkem mezi měřicím členem a regulačním orgánem (viz níže) je člověk nebo technické zařízení, rozlišujeme *ruční regulaci* a *samočinnou (automatickou) regulaci*. Společný název pro ovládání a regulaci je *řízení*. Od regulačních automatických zařízení je plynulý přechod k zařízením označovaným jako *kybernetická zařízení*, která nejen samočinně řídí, ale sama volí podmínky a způsob řízení tím, že adaptují své parametry k určitým vnějším parametrům procesu, vyhledávají optima zvolených kritérií kvality procesu apod.



Obr. 1.

Obecným principem řešení úkolu zajistit určitý časový průběh veličiny je princip *zpětné vazby*. Tento princip, vyskytující se nejen v technických, ale i v ekonomických a biologických soustavách, si vysvětlíme na obr. 1. Uvažované technické zařízení, resp. jeho část znázorníme obdélníkem S. Toto zařízení budeme z hlediska automatické regulace nazývat *regulovaná soustava*. Šipkou směřující do obdélníku znázor-

ňujeme veličinu, která má vliv na hodnotu veličiny upravované regulací podle stanovených podmínek. Prvou nazýváme *poruchová veličina*, druhou *regulovaná veličina*. Regulovaná veličina je znázorněna v schématu na obr. 1 šipkou vystupující z obdélníku S. Skutečný časový průběh regulované veličiny je zjišťován *snímačem (čidlem)*. Informace o okamžité hodnotě regulované veličiny vstupuje do zařízení, které uskutečňuje samočinnou regulaci – do *regulátoru*. Do regulátoru vstupuje také veličina, která nastavuje *žádanou hodnotu regulované veličiny* (tj. hodnotu regulované veličiny, danou regulačním úkolem). Tato veličina se nazývá *řídící veličina*. V regulátoru se samočinně zjistí rozdíl mezi žádanou a skutečnou hodnotou regulované veličiny a podle jeho velikosti se vytváří výstupní veličina regulátoru, nazývaná *akční veličina*. Akční veličina se odčítá od poruchové veličiny. Popsaný obvod, ve kterém probíhá samočinná regulace, se nazývá *jednoparametrový regulační obvod*. Od tohoto základního zapojení rozlišujeme *rozvětvený regulační obvod*, tj. takové spojení regulované soustavy a regulátoru, kde se na vstup regulátoru zavádí kromě regulované a řídicí veličiny ještě jedna nebo více pomocných veličin nebo kde z regulátoru vystupuje více akčních veličin. Regulační obvody s více regulovanými veličinami se nazývají *víceparametrové regulační obvody*.

Podle toho, jakými podmínkami je vytvářen požadovaný časový průběh regulované veličiny, hovoříme o různých druzích regulace:

regulace na konstantní nastavenou hodnotu – regulace, při níž se nemění nastavená hodnota regulované veličiny;

regulace s proměnnou nastavenou hodnotou (řízení regulačního obvodu) – žádaná hodnota regulované veličiny se mění nezávisle na regulačním obvodu, do něhož vstupuje;

ruční řízení regulačního obvodu – řízení regulačního obvodu, kde se mění ručně žádaná hodnota regulované veličiny;

programová regulace – řízení regulačního obvodu, při němž je žádaná hodnota regulované veličiny předepsanou funkcí času;

vlečná regulace – řízení regulačního obvodu, při němž se žádaná hodnota regulované veličiny mění podle zvolené nezávisle proměnné veličiny;

spojitá regulace – regulace, při níž všechny členy regulačního obvodu pracují spojitě, tj. výstupní signály jsou spojitými funkcemi vstupních signálů;

nespojité regulace – regulace, při níž alespoň jeden člen regulačního obvodu pracuje nespojitě.

U všech veličin vyskytujících se v regulačním obvodu rozlišujeme *ustálený stav určité veličiny*, tj. stav, v němž se daná veličina v čase nemění od *přechodového jevu*, při němž přechází veličina z jednoho ustáleného stavu do druhého. Tvar závislosti výstupní veličiny na čase je dán jednak tvarem závislosti vstupní veličiny na čase, jednak vlastnostmi soustavy. Tuto závislost popisují diferenciální rovnice. U lineárních soustav (viz níže) je to lineární diferenciální rovnice, u nelineárních soustav nelineární diferenciální rovnice, kterou linearizujeme, tedy převedeme na lineární.

Obecný tvar takové rovnice n -tého řádu je

$$a_n \frac{d^n X(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} X(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dX(t)}{dt} + a_0 X(t) =$$

$$b_m \frac{d^m Y(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} Y(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dY(t)}{dt} + b_0 Y(t).$$

Tuto rovnici podrobíme L -transformaci proměnné t na komplexní číslo s .*) Formálně to znamená, že i -tou derivací funkce $X(t)$ nahrazujeme i -tou mocninou čísla s podle schématu

$$\frac{d^i X(t)}{dt^i} \Rightarrow s^i X(s).$$

Uvedená diferenciální rovnice pak tedy přechází na tvar

$$X(s) = G(s) \cdot Y(s),$$

kde $G(s)$ je funkce komplexní proměnné s , vyjadřující dynamické vlastnosti soustavy. Tato funkce se nazývá *operátorový přenos soustavy* a je definována vztahem

$$G(s) = \frac{X(s)}{Y(s)},$$

tedy jako poměr Laplaceova obrazu (nebo obrazu v nějaké jiné transformaci – LW , z -transformaci apod.) výstupní veličiny k témuž obrazu vstupní veličiny, jestliže v čase $t < 0$ je člen nebo soustava bez energie. Je zřejmé, že výstupní veličina regulované soustavy se nebude po změně vstupní veličiny měnit okamžitě do nového odpovídajícího ustáleného stavu, ale že tato změna bude probíhat se zpožděním. Tato zpoždění jsou způsobena jednak prostým transportem hmoty v soustavě, pak jde o *dopravní zpoždění*, nebo jsou způsobena procesem ukádání, resp. uvolňování hmot nebo energií v soustavě, pak jde o *kapacitní zpoždění*. Při návrhu regulačního

*) *Laplaceova transformace (L-transformace)* je matematický postup založený na tom, že originální funkci času převedeme na tzv. obraz, který je funkcí komplexního čísla s (v některých pracích se značí p). Vztah mezi obrazovou a originální funkcí je dán definičním vztahem

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t) e^{-ts} dt$$

a zpětná transformace (z proměnné s na t) je definována vztahem

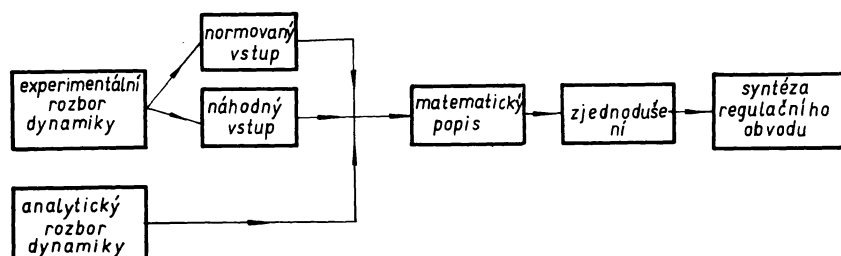
$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{x-j\omega}^{x+j\omega} F(s) e^{ts} ds.$$

V tomto článku se nemůžeme zabývat podrobněji transformačními metodami a čtenáři, který není s touto metodou seznámen, doporučíme specializovanou literaturu. Poznamenejme jenom ještě, že smysl použití L -transformace spočívá v tom, že se jí lineární diferenciální rovnice převádějí na algebraické rovnice, což podstatně zjednodušuje další výpočet.

obvodu, který byl výše popsán, je třeba vycházet z té skutečnosti, že působení akční veličiny se na regulované veličině projeví se zpožděním. Při nerespektování této skutečnosti by se totiž obecně mohlo stát, že by zpoždění mezi vstupem a výstupem soustavy bylo právě takové, že by akční veličina působila místo ke zmenšení odchylky regulované veličiny k jejímu zvětšení a hodnoty veličin v uzavřeném regulačním obvodu by pak byly periodickými funkcemi času se vzrůstající amplitudou. Je proto nutno při návrhu regulačního obvodu jednak vhodně vybrat veličinu, na níž působí akční veličina regulátoru, jednak vhodně volit přenos regulátoru tak, aby průběh regulované veličiny odpovídal technickým požadavkům.*) Řešení této úlohy je předmětem *syntézy regulačního obvodu*. Je to obor dnes již značně propracovaný, bez zásadních teoretických mezer. Pro syntézu regulačního obvodu je však nezbytným podkladem popis dynamických vlastností regulované soustavy. Z této potřeby se vyvinul obor automatické regulace, zabývající se obtížným úkolem *identifikace soustav*, popisem jejich dynamických vlastností. Tento obor je dodnes nedořešený. Metody vypracované pro identifikaci soustav lze rozdělit do dvou skupin:

i) metody založené na vyhodnocování experimentálně získaných odezev soustavy na změny vstupní veličiny buď náhodné, nebo uměle vyvolané;

ii) metody analytické, které řeší dynamické vlastnosti soustavy cestou matematického odvození z diferenciálních rovnic popisujících nestacionární stavy.



Obr. 2.

Výsledkem identifikace soustav je nejčastěji operátorový přenos, který ve většině případů bývá jako podklad pro syntézu regulačního obvodu příliš složitý. Proto je třeba jej vhodným způsobem zjednodušit. Úkolem aproximace přenosů (soustav) je nalézt vhodnou matematickou náhradu přesného popisu soustavy jednodušší funkcí, která s dostatečnou přesností vystihuje ty stránky chování soustavy, které jsou pro syntézu regulačního obvodu důležité.

V některých případech vzniká problém aproximace přenosů regulátorů navržených na základě požadavků týkajících se speciálních vlastností víceparametrových

*) Řešení takového úkolu není jednoznačné, protože podle povahy regulované soustavy se někdy požaduje, aby regulovaná veličina co nejrychleji dospěla do ustáleného stavu, třeba i za cenu velkých překmitnutí, jindy se požaduje, aby překmitnutí bylo minimální a záleží pak méně na trvání přechodového procesu.

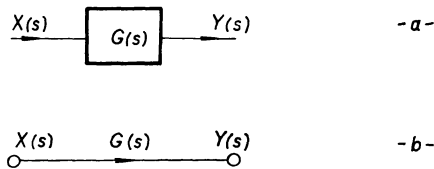
regulačních obvodů; vypočtené přenosy takových regulátorů bývají totiž pro technickou realizaci příliš složité.

Postup při racionálním návrhu automatické regulace určitého objektu ukazuje schematicky obr. 2.

Pro usnadnění operací při analýze i syntéze regulačních obvodů se v praxi vytvořil postup zobrazování systémů*) v blokových, resp. signálových diagramech.

Blokové a signálové diagramy jsou v podstatě topologickým znázorněním (grafickým modelem) vztahů mezi více proměnnými. Jsou-li tyto vztahy lineární, reprezentují diagramy soustavu simultánních algebraických rovnic. Grafický popis dynamiky soustavy je rovnocenný popisu rovnicemi nebo přenosovými funkcemi.

V praxi se vžily dva způsoby grafického znázorňování soustav. Kromě „blokových schémat“ již dříve používaných se v posledních letech v regulační technice stále častěji vyskytují „diagramy toku signálů“. Rozdíl mezi oběma způsoby zápisu záleží v tom, že v blokových diagramech je soustava, popř. jen její část zobrazována blokem (obr. 3a), v němž si představujeme „soustředěny“ dynamické vlastnosti této soustavy



Obr. 3.

(její části); vstupní, resp. výstupní veličiny jsou „rozloženy“ po čarách, které ústí do bloku, popř. z něho vycházejí. Tyto čáry představují vedení (šíření) signálu. V signálových diagramech je naopak soustava znázorněna čárou (obr. 3b s šipkou značící smysl šíření signálu) a signály jsou představovány koncovými body této čáry, vyznačenými kroužky. Soustava je zde tedy „rozložena“ po délce čáry, kdežto signály jsou „soustředěny“ do jejich koncových bodů.

Slučování signálů se v blokových i signálových diagramech naznačuje kroužkem, který nazýváme slučovacím uzlem (nebo jen uzlem) diagramu. Tyto uzly vyjadřují algebraické rovnice

$$\sum_{i=1}^n X_i(s) = X_{n+1}(s)$$

V případě blokových diagramů ústí do kroužku všechny signály (sčítanci) a vychází z něho jediný signál, který je jejich algebraickým součtem. Není-li signálů vstupujících do uzlů více než tři, pak obvykle značíme sčítací uzel kroužkem s křížkem uvnitř, přičemž černě vyplněné políčko značí, že signál, který do něho vstupuje, je

*) *Systémem* rozumíme technický, biologický nebo ekonomický celek, jehož nestacionární stavy jsou předmětem zkoumání. Zahrnuje tedy soustavy a regulátory jako užší pojmy.

odečítán. Je-li sčítanců více než tři, pak se užívá jiného způsobu – kroužek není rozdělen křížkem a k odečítanému signálu se připsuje záporné znaménko.

V signálových diagramech je slučování signálů značeno také kroužkem, který však reprezentuje všechny slučované signály i výsledný signál. Pro znázornění vstupních, resp. výstupních veličin celého schématu byly v signálových diagramech zavedeny tzv. vstupní uzly, resp. výstupní uzly. Jsou to uzly z nichž větve pouze vycházejí, resp. do nichž větve pouze vstupují. Vstupní uzly představují nezávisle proměnné a výstupní uzly závisle proměnné v systému rovnic popisujících dynamiku soustavy.

Rozdělování signálu do několika větví se v blokovém diagramu značí prostým rozvětvením čáry značící příslušný signál. V signálovém diagramu se rozdělení signálu projeví tím, že z uzlu vychází více větví. Toto rozdělení signálu nemá kvantitativní význam. Při výpočtech regulačních obvodů a popisu soustav se často vyskytuje zpětnovazební zapojení – výstupní signál větve (bloku), který je současně výstupním signálem zapojení se slučuje se vstupním signálem. Přenos zpětnovazebního zapojení (zpětnovazební smyčky) je dán zlomkovým výrazem, v jehož čitateli je součin všech přenosů, nacházejících se v přímé větvi mezi vstupem a výstupem a ve jmenovateli je dvojnásobek, vzniklý přičtením, resp. odečtením součinu všech přenosů, nacházejících se v uzavřené smyčce od jednotky podle toho, je-li zpětná vazba záporná, resp. kladná.

Pojmem regulovaná soustava se označuje obecně každé zařízení (nebo jeho část), které se reguluje. Je tedy regulovanou soustavou např. nádoba s obsahem kapaliny, kde regulovanou veličinou je výška hladiny. Podobně válcovací stolice, letadlo, tepelná elektrárna, jaderný reaktor, chemický reaktor, rektifikační kolona, parní turbína apod. jsou příklady regulovaných soustav. Regulovanými veličinami mohou být rychlost, otáčky, stavy hladiny, teplota, tlak, složení a jiné.

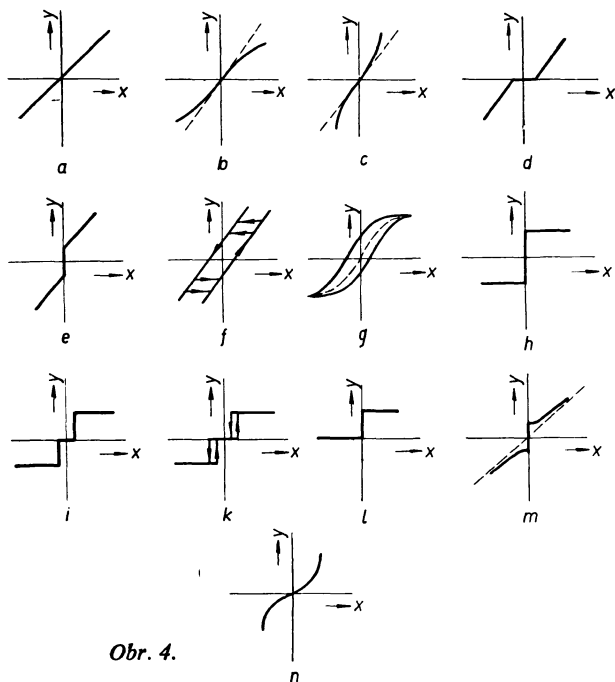
2. DRUHY REGULOVANÝCH SOUSTAV

Nestacionární stavy veličiny v soustavě popisují diferenciální rovnice. Je-li tato rovnice lineární, mluvíme o *lineární soustavě (členu)* a naopak, je-li rovnice nelineární, mluvíme o *nelineární soustavě (členu)*.

Lineární soustavy (členy) mají společnou vlastnost. Působí-li na ně součet signálů, rovná se jejich společný účinek součtu účinků způsobených každým signálem zvlášť. Tento důležitý princip se nazývá *princip superpozice*.

Podle toho, zda parametry takové soustavy (např. hmota, pružnost, kapacita) jsou nebo nejsou závislé na pochodech probíhajících v soustavě, resp. v čase, rozlišujeme *lineární soustavy s časově proměnnými parametry* a *lineární soustavy se stálými parametry*. Pro nelineární soustavy princip superpozice neplatí! Lineární a nelineární soustavy se liší také svými *statickými charakteristikami* (závislost hodnoty výstupní veličiny na hodnotě vstupní veličiny v ustáleném stavu).

V obr. 4a je uvedena statická charakteristika lineárního členu. V tomtéž obrázku pod písmeny b–n jsou uvedeny statické charakteristiky některých typických nelineárních členů v uspořádání podle [3]. Obr. 4a je charakteristika závislosti výchylky (vodorovná osa) na síle, resp. momentu (svislá osa) pro *měkkou pružinu*, 4c je charakteristika pro *tvrdou pružinu*. Na obr. 4d je charakteristika *prvku s necitlivostí* (např. hydraulické šoupátko s krytím), 4e je charakteristika prvku se *zbytkovým signálem* na výstupu, 4f a 4g jsou *hysterezní charakteristiky* (vůle v převodech). *Reléové charakteristiky* jsou v 4h, i, k, l. První z nich se nazývá také *charakteristika suchého tření* neboli *charakteristika Coulombova*. Tato charakteristika je však idealizací, skutečná má tvar uvedený v obr. 4m. Charakteristika *tlumení v kapalině* je v obr. 4n. Ve všech obrázcích jsou vstupní, resp. výstupní signály označeny obecnými symboly x , resp. y . Mají ovšem



Obr. 4.

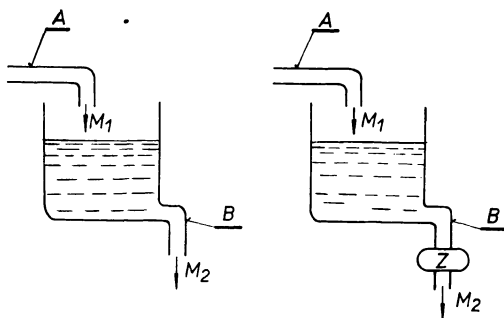
různý fyzikální význam, např. v obr. 4m a 4n je x rychlost a y tření.

S metodikou vyšetřování dynamických vlastností a s regulací nelineárních soustav se čtenář může seznámit např. v knižních publikacích [1, 3, 4].

Jak jsme již řekli výše, je zpoždění výstupního signálu proti vstupnímu způsobeno jednak ukládáním, popř. uvolňováním hmot nebo energií do objemových, tepelných, elektrických kapacit, jednak omezením průtoků hmot nebo energií odpory. Soustavy, v nichž jsou kapacity a odpory soustředěny geometricky odděleně, v různých místech, se nazývají *soustavy se soustředěnými parametry*. Takové soustavy jsou vlastně pouhou idealizací, zjednodušením, protože ve skutečnosti nemůže existovat soustava nebo její část, která by měla vlastnost buď pouze odporu, nebo pouze kapacity: při průtoku každou kapacitou (objemovou, tepelnou, elektrickou) se překonává určitý odpor, a naopak každá část soustavy, v níž dochází k překonávání odporu, má určitou kapacitu. Protože však tyto skutečnosti jsou u řady soustav zanedbatelné a odpory i kapacity si lze představit oddělené, v různých místech, považujeme je za soustavy se soustředěnými parametry a nestacionární jevy v nich popisujeme obyčejnými diferenciálními rovnicemi. Existuje však skupina soustav,

jejichž odpory a kapacity nelze považovat za oddělené (např. dlouhé úzké potrubí, jímž protéká vzdušina). Ty nazýváme *soustavy s rozloženými parametry* a nestacionární jevy v nich popisujeme parciálními diferenciálními rovnicemi, protože hodnota veličiny v takové soustavě je funkcí nejenom času, ale i geometrické souřadnice.

Soustavy, jejichž výstupní veličiny po změně vstupní veličiny přejdou do nového ustáleného stavu, se nazývají *statické soustavy*. Za *astatické* považujeme soustavy, u nichž po změně vstupní veličiny se mění výstupní veličina trvale a monotónně (až do nějakého omezení daného konstrukcí zařízení). Jako příklad statické soustavy je v obr. 5a uvedena nádoba, do níž přitéká kapalina potrubím A a odtéká potrubím B. Zvětší-li se přítok kapaliny, začne stoupat hladina v nádobě a tím se zvětšuje i výtok z nádoby, až se ustaví nová rovnováha mezi přítokem a výtokem (při novém stavu hladiny). Budeme-li uvažovat uspořádání podle obr. 5b,



Obr. 5. b)

kde výtok M_2 z nádoby je neměnný (je určen zubovým čerpadlem), je zřejmé, že po změně přítoku M_1 z hodnoty $M_1 = M_2$ bude se výška hladiny v nádobě neustále měnit stejnou rychlostí (dokud nedosáhne horního okraje nádoby); — jde tu tedy o soustavu astatickou.

Jako *autoregulované soustavy* označujeme ty, které vlivem svých fyzikálních vlastností samy dostatečně vyrovnávají vliv poruchové veličiny na výstupní veličiny. Takové soustavy obvykle nevyžadují regulátory. Jako příklad takové soustavy můžeme uvést soustavu v obr. 5a. Záleží ovšem na požadavcích, které máme na polohu hladiny, zda můžeme soustavu považovat za autoregulovanou, či zda ji musíme vybavit regulátorem.

3. ZPŮSOBY POPISU DYNAMICKÝCH VLASTNOSTÍ SOUSTAV

V prvním přístupu popisujeme dynamické vlastnosti systému rovnicí. Protože jde o popis závislosti *časového průběhu* hodnot výstupní veličiny na *časovém průběhu* hodnot vstupní veličiny, bude to rovnice diferenciální na rozdíl od popisu statických závislostí, pro nějž stačí algebraické rovnice*). Tyto diferenciální rovnice se označují jako *rovnice regulované soustavy*. Je-li rovnice regulované soustavy nelineární,

*) Jak bylo řečeno již výše, jsou nelineární soustavy popsány nelineárními diferenciálními rovnicemi, lineární soustavy se soustředěnými parametry obyčejnými lineárními diferenciálními, rovnicemi s konstantními nebo proměnnými koeficienty a soustavy s rozloženými parametry (kontinua) jsou popsány parciálními diferenciálními rovnicemi.

provedeme její linearizaci. Je to postup, který záleží v tom, že uvažujeme jen malé odchylky veličin od ustáleného stavu a v této oblasti nahradíme nelineární funkční závislosti přímkami. V praxi se linearizace vyznačí tak, že se veličiny píší v odchylkovém tvaru (od ustáleného stavu) – např. $X = X_0 + \Delta X$, kde X_0 je hodnota veličiny v ustáleném stavu a ΔX je proměnná odchylka. Po provedení algebraických úkonů zanedbáme odchylky vyšších řádů – tedy součiny odchylek. Jako příklad linearizace si uveďme linearizaci součinu veličin $XY = Z$:

$$Z = Z_0 + \Delta Z = (X_0 + \Delta X)(Y_0 + \Delta Y) = X_0 Y_0 + X_0 \Delta Y + Y_0 \Delta X + \Delta X \Delta Y.$$

Zanedbáme poslední součin na pravé straně rovnice a dostáváme

$$Z_0 + \Delta Z = X_0 Y_0 + X_0 \Delta Y + Y_0 \Delta X.$$

Protože $Z_0 = X_0 Y_0$, dostáváme po odečtení této rovnice

$$\Delta Z = X_0 \Delta Y + Y_0 \Delta X.$$

Jiný postup linearizace záleží v tom, že nelineární členy rozvedeme v Mc Laurinovu řadu a zanedbáme všechny její členy od druhé derivace výše. Tímto postupem dospějeme ke stejným výsledkům.

Po provedení linearizace můžeme již rovnici podrobit L -transformaci a odtud získáme operátorový přenos. Jako příklad si vytvoříme přenos $G(s) = X(s)/Y(s)$ soustavy popsané rovnicí

$$a_2 \frac{d^2 X}{dt^2} + a_1 \frac{dX}{dt} + a_0 = b_1 \frac{dY}{dt} + b_0.$$

L obraz rovnice je

$$(a_2 s^2 + a_1 s + a_0) X(s) = (b_1 s + b_0) Y(s)$$

a odtud dostáváme pouhou úpravou

$$\frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}.$$

Operátorový přenos soustav se soustředěnými parametry má obecně tvar poměru dvou celých racionálních funkcí – tedy funkce racionální lomené

$$(1) \quad G(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{B(s)}{A(s)}.$$

Hodnota exponentu n určuje řád soustavy. V přenosech popisujících soustavu bez zjednodušení je vždy $m < n$.

Kořeny polynomu v čitateli přenosu se nazývají *nuly*, ve jmenovateli *póly*. Póly

	statická soustava			astatická soustava		
	rovnice - přenos	frekvenční - charakteristika	inverzní frekvenční charakteristika	rovnice - přenos	frekvenční charakteristika	inverzní frekvenční charakteristika
I.	$b_1\dot{X} + X = Y$ $F(s) = \frac{1}{Ts + 1}$			$b_1\dot{X} = Y$ $F(s) = \frac{1}{b_1 s}$		
II.	$b_2\ddot{X} + b_1\dot{X} + X = Y$ $F(s) = \frac{1}{b_2 s^2 + b_1 s + 1}$			$b_2\ddot{X} + b_1\dot{X} = Y$ $F(s) = \frac{1}{b_2 s^2 + b_1 s}$		
III.	$b_3\ddot{X} + b_2\dot{X} + b_1\dot{X} + X = Y$ $F(s) = \frac{1}{b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + 1}$			$b_3\ddot{X} + b_2\dot{X} + b_1\dot{X} = Y$ $F(s) = \frac{1}{b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s}$		
dopravní zpoždění	$F(s) = e^{-Td} s$					

Obr. 6.

i nuly mohou být reálné nebo komplexně sdružené. Rozložení pólů i nul v komplexní rovině určuje chování soustavy, její stabilitu a je východiskem sledování stability uzavřeného regulačního obvodu při syntéze (viz kap. 5).

Jde-li o statickou soustavu, je v její rovnici, resp. v operátorovém přenosu $a_0 \neq 0$. Naopak astatické soustavy mají $a_0 = 0$. Jsou tedy charakterizovány tím, že mají pól v počátku Gaussovy roviny.

Záporné převrácené hodnoty reálných částí pólů, resp. nul se nazývají *časové konstanty*. Mají rozměr času a značíme je symbolem T .

Operátorový přenos kontinuí má tvar elementárních nebo vyšších transcendentních funkcí.

Jiný způsob popisu dynamiky systému je *frekvenční přenos*. Je to závislost poměru vektoru odezvy k vektoru harmonického vstupu na frekvenci. Vzniká z obrazového Laplaceova nebo Laplaceova-Wagnerova přenosu dosazením $j\omega$ za s . Podstata této souvislosti je vysvětlena např. v [8].

Frekvenční přenos bývá často znázorňován graficky, obvykle v Gaussově rovině. Toto grafické zobrazení se nazývá *frekvenční charakteristika*. Někdy se zobrazuje zvlášť závislost absolutní hodnoty frekvenčního přenosu na frekvenci harmonického

vstupu – *amplitudová charakteristika* a zvláště závislost argumentu (fáze) frekvenčního přenosu na frekvenci harmonického vstupu – *fázová charakteristika*.

V některých případech vyšetřování soustav je výhodné sestrojít frekvenční charakteristiku z převrácené hodnoty přenosu. Nazývá se *inverzní frekvenční charakteristika*.

Tvar frekvenčních charakteristik má zásadní význam pro vyšetřování stability soustavy a zejména uzavřeného regulačního obvodu, jak bude vyloženo v kap. 5. Pro názornost jsou v obr. 6 uvedeny typické frekvenční a inverzní frekvenční charakteristiky pro několik druhů soustav.

Protože je konstruování frekvenčních charakteristik v komplexní rovině zvláště pro přenosy s polynomy vyšších stupňů značně pracné, navrhl Bode vynášet *frekvenční charakteristiky v logaritmických souřadnicích*. Bode dokázal, že pro lineární stabilní soustavy, které mají reálnou část kořenů čitatele i jmenovatele zápornou – tzv. *soustavy s minimální fází* – je frekvenční přenos jednoznačně určen závislostí buď jen absolutní hodnoty, nebo jen fáze na frekvenci. V jeho práci je také uveden odvozený vztah závislosti fáze na amplitudě pro různé frekvence.

Rozkladem čitatele a jmenovatele operátorového přenosu (1) na součin kořenových činitelů (při sinusovém vstupu) dostáváme

$$(2) \quad G(j\omega) = \prod_{k=1}^m (T_k j\omega + 1) / \prod_{l=1}^n (T_l j\omega + 1).$$

Logaritmováním výrazu (.2) pak dostáváme

$$(3) \quad \log G(j\omega) = \sum_{k=1}^m \log (T_k j\omega + 1) - \sum_{l=1}^n \log (T_l j\omega + 1).$$

Dále je zřejmé

$$\log |T_j\omega + 1| = \log \sqrt{(T^2\omega^2 + 1)}.$$

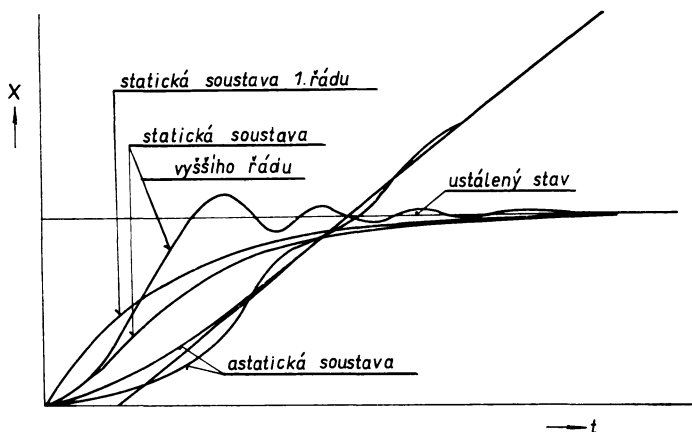
Na osu pořadnic se podle Bodeho vynášejí hodnoty výrazu $20 \log \sqrt{(T^2\omega^2 + 1)}$ na osu souřadnic $\log \omega$ buď při základu 2, nebo 10. Jsou tedy frekvenční charakteristiky kresleny v soustavě decibel oktáv nebo decibel dekad.

Logaritmus činitele v součtu v rovnici (.3) pro libovolné k , resp. l a pro $T\omega < 1$ lze aproximovat hodnotou 0 a pro $T\omega > 1$ hodnotou $\log T\omega$. Amplitudovou charakteristiku v logaritmických souřadnicích lze tedy nahradit asymptotickými přímkami (v souřadnicích $20 \log |G(j\omega)|$ a $\log \omega$ po úsecích od $\omega_n = 1/T_n$ do $\omega_{n+1} = 1/T_{n+1}$).

Největší chyba při této aproximaci vzniká v průsečíku asymptot. V tomto průsečíku je $T\omega = 1$, takže chyba je $20 \log \sqrt{2} \doteq 3 \text{ dB} \doteq 1.4$, tedy 40%.

Nakonec jmenujme ještě jednu skupinu způsobů popisu dynamických vlastností regulovaných soustav. Je to popis křivkou odezvy na normovaný tvar vstupní veličiny. Nejčastěji používaná *přechodová charakteristika* je grafické znázornění *přechodové*

funkce. Přechodová funkce je odezva na vzruch jednotkovým skokem*). Přechodová charakteristika statické soustavy se asymptoticky blíží k novému ustálenému stavu — přímce rovnoběžné s osou času. Přechodová charakteristika astatické soustavy se asymptoticky blíží k přímce s kladnou derivací. Uvedené typy přechodových charakteristik jsou znázorněny v obr. 7. Výstupní veličiny statických soustav vyššího řádu



Obr. 7.

než druhého včetně a astatických soustav vyššího řádu než třetího včetně mohou oscilovat kolem střední hodnoty rovné ustálenému stavu, resp. ustálenému stavu rychlosti. Mají-li tyto oscilace zmenšující se amplitudu, nazývá se tato soustava stabilní; vzrůstá-li amplituda kmitů, považujeme ji za nestabilní. Stabilní soustavy mají reálnou část kořenů jmenovatele přenosu zápornou, nestabilní kladnou. Souvislost mezi polohou pólů a stabilitou bude vysvětlena v kapitole 5.

Pro hrubou charakterizaci dynamických vlastností soustavy a zejména pro jejich vzájemné porovnávání se vžil označení některých parametrů přechodové charakteristiky (viz obr. 8).

Doba průtahu T_u — časový úsek od okamžiku skokové změny vstupní veličiny do časové souřadnice průsečíku tečny k přechodové charakteristice v inflexním bodě (resp. v ustáleném stavu rychlosti u astatických soustav) s časovou osou.

Dopravní zpoždění T_d — časové zpoždění výstupního signálu proti vstupnímu způsobené konečnou rychlostí šíření signálu při pohybu hmoty nebo při šíření energie.

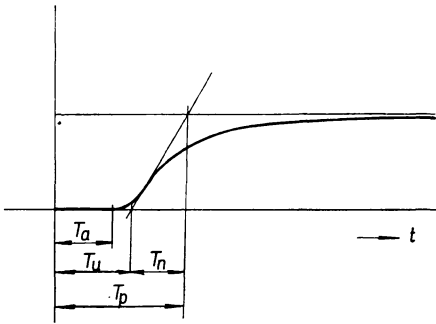
Doba náběhu T_n — časový úsek mezi průsečíky tečny k přechodové charakteristice v jejím inflexním bodě s osou času a přímkou ustáleného stavu (jen u statických soustav).

*) Jednotkový skok nebo Heavisideova funkce se definuje vztahem

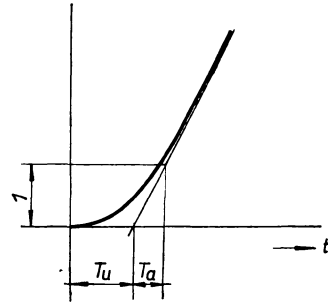
$$Y(t) = 0 \text{ pro } t < 0, \quad Y(t) = 1 \text{ pro } t > 0$$

Doba astatického náběhu T_a – časový interval podle obr. 9.

Vedle přechodových charakteristik se pro hrubý popis dynamiky soustav někdy také určují odezvy na jiné normované vstupní veličiny – jednotkový impuls, obdélníkový impuls, rampová funkce.



Obr. 8.



Obr. 9.

4. ZPŮSOBY IDENTIFIKACE SOUSTAV A APROXIMACE PŘENOSŮ

Pro identifikaci soustav byla vypracována řada metod a postupů, které lze rozdělit do dvou skupin:

i) Analytická identifikace soustav, která vychází z popisu dynamického chování soustavy diferenciálními rovnicemi, jak bylo popsáno výše. Z těchto rovnic se odvozují přenosy.

ii) Experimentální identifikace soustav, která vychází z vyhodnocování časových průběhů veličin buď při odezvách na normované vstupní signály (jednotkový skok, jednotkový impuls, rampová funkce, harmonický vstup), nebo na náhodné vstupní signály.

Obecně však je třeba poznamenat, že žádná z dosud vypracovaných metod není univerzální pro všechny typy soustav, každá má své přednosti i nedostatky. V tom smyslu je nutno považovat problematiku identifikace soustav za stále otevřenou.

Za přednost analytického postupu lze považovat, že jej můžeme aplikovat i na soustavy, které jsou teprve ve stadiu projektu, jakož i to, že umožňuje sledovat vlivy různých částí soustavy na dynamiku celku a konečně že skýtá v mnoha případech přesnější výsledky než experimentální postupy. Mimoto nevyžaduje tento způsob identifikace žádných umělých zásahů do provozu soustavy. Nevýhodou analytického postupu je poměrně značná složitost a náročnost na teoretickou erudici pracovníků, kteří ho uskutečňují. Mimoto výsledky bývají pro praktické použití příliš složité a vyžadují proto aproximaci.

Do skupiny experimentální identifikace soustav patří jednak metody založené na vyhodnocování tvarů odezvy na normované vstupní veličiny (skok, impuls, harmo-

nický vstup) nebo na náhodný průběh vstupní veličiny, jednak metody založené na přizpůsobování modelu k soustavě (na základě srovnávání odezvy modelu a soustavy na normovaný nebo náhodný vstup).

Za společnou nevýhodu těchto experimentálních metod lze považovat, že výsledky jsou chudší, nezachycují některé méně vlivné časové konstanty, jakož i to, že některé z metod předpokládají zavádění umělé poruchy vstupních veličin, což může způsobovat provozní potíže. Proto v některých případech lze tento postup aplikovat jen velmi omezeně (letadla, jaderné reaktory).

Experimentální metody založené na vyhodnocování odezev soustavy vycházejí nejčastěji z přechodové charakteristiky, kterou lze poměrně nejsnáze získat. Jako nejprimitivnější aproximace přenosu soustavy se někdy používá jednoduše přenosu s dopravním zpožděním s tak volenou časovou konstantou, aby shoda přechodových charakteristik byla co nejlepší. Protože tato náhrada je příliš hrubá a nevyhovující, navrhuje autor práce [6] nahrazovat všechny soustavy vyššího řádu než druhého a soustavy druhého řádu, pro něž platí $T_2/T_1 > 0,5$, soustavou druhého řádu se stejnými časovými konstantami a ostatní soustavy soustavami druhého řádu s různými časovými konstantami. V práci je dále provedena analýza citlivosti různých parametrů přechodové charakteristiky na parametry soustavy. Jejím výsledkem je pak návrh postupu pro výpočet časových konstant aproximačního přenosu ze změřené přechodové charakteristiky. Uvedená metoda předpokládá soustavy, jejichž přenosy nemají žádné nuly. Tento předpoklad nelze však apriori učinit, a pokud není splněn, metoda selhává. Rovněž náhrada soustavou druhého řádu není postačující pro všechny soustavy.

Výpočtu přenosu z tvaru přechodové charakteristiky je věnována také práce [10]. Autor využívá skutečnosti, že odezva na jednotkový skok vstupní veličiny je u statických lineárních soustav se soustředěnými parametry popsána součtem exponenciál. Proto zobrazuje přechodové charakteristiky v logaritmických souřadnicích a nahrazuje je tečnami (podobně jako Bode frekvenční charakteristiky). V článku je odvozena grafická metoda přibližné analýzy neklesajících přechodových charakteristik vyšších řádů a náhrada dané soustavy n -tého řádu statickou soustavou sestavenou ze sériově zapojených jednoduše přenosů s $n - 1$ stejnými časovými konstantami a jednou větší časovou konstantou.

Skupina prací [5, 6, 11] a ještě jiných je založena v podstatě na společné myšlence určovat koeficienty diferenciální rovnice (přenosu) soustavy její postupnou integrací.

Lineární statická soustava se soustředěnými parametry je popsána rovnicí

$$(4) \quad a_n \frac{d^n X}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} X}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dX}{dt} + a_0 X = Y.$$

Předpokládejme, že v čase $t < 0$ a v čase dostatečně velkém tak, abychom mohli

psát $t \rightarrow \infty$, je regulovaná soustava v ustáleném stavu. Pak tedy platí

$$(5) \quad \frac{dX(0)}{dt} = \frac{d^2X(0)}{dt^2} = \dots = \frac{d^{n-1}X(0)}{dt^{n-1}} = 0$$

a

$$(6) \quad \frac{dX(\infty)}{dt} = \frac{d^2X(\infty)}{dt^2} = \dots = \frac{d^{n-1}X(\infty)}{dt^{n-1}} = 0.$$

Uvážíme-li nejprve případ

$$(7) \quad \begin{aligned} Y(0) &= Y(\infty), \\ X(0) &= X(\infty), \end{aligned}$$

dospějeme integrací rovnice (4) od nuly do nekonečna a spojením s rovnicemi (5) a (6) k výrazu pro konstantu a_0 rovnice (4)

$$a_0 = \int_0^\infty Y dt : \int_0^\infty X dt.$$

Dvojnásobnou integrací rovnice (4), poprvé v mezích od t do nekonečna a podruhé od nuly do nekonečna, a spojením s rovnicemi (5) a (6) dostáváme

$$(8) \quad a_1 = [a_0 \int_0^\infty \int_t^\infty X dt^2 - \int_0^\infty \int_t^\infty Y dt^2] : \int_0^\infty X dt.$$

Podobně trojnásobnou integrací (dvakrát v mezích od t do ∞ a potřetí od 0 do ∞) a spojením s (5) a (6) bychom dospěli k výrazu pro a_2 a analogicky pro všechny koeficienty vyšší. Pro koeficient a_r platí obecný vztah

$$(9) \quad a_r = (-1)^r [I(Y) - \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i a_i I(X)] : I(X),$$

kde

$$I(X) = \int_0^\infty \int_t^\infty \int_t^\infty \dots \int_t^\infty X dt^n.$$

Není-li splněna podmínka (7), je nutno transformovat pořadnice vstupní a výstupní veličiny tak, aby jejich hodnoty pro $t \rightarrow \infty$ byly nulové.

Postupy identifikace soustav založených na uvedeném principu integrace vstupních a výstupních veličin mají společný nedostatek v tom, že několikanásobnou integrací se vnáší do výpočtu tak velká chyba, že stanovení koeficientů u vyšších derivací v rovnici (4) je velmi nepřesné.

Ucelený obor identifikace soustav představují metody statistické dynamiky, které umožňují z náhodného vstupu a odezvy na něho výpočet přenosu soustavy. Popis těchto metod by vyžadoval blíže se seznámit s teorií náhodných procesů. Takový výklad by však vybočoval z rozsahu tohoto článku.

Identifikaci soustav přizpůsobováním analogového modelu k soustavě lze provádět buď v sériovém, nebo v paralelním zapojení modelu a soustavy. Prvý způsob je nevhodný, protože vyžaduje modelovat inverzní přenos. To je technicky těžko

realizovatelné. Běžně se proto používá druhého zapojení. Do soustavy i modelu se přivádí společný průběh vstupního signálu a porovnávají se výstupy. Pro porovnání výstupních veličin byla navržena řada kritérií E :

$$E = \int_0^{\infty} \varepsilon(t) dt, E = \int_0^T \varepsilon(t) dt, E = \int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) dt, E = \int_0^{\infty} |\varepsilon(t)| dt,$$

kde $\varepsilon(t)$ je rozdíl výstupů soustavy a modelu.

Dále pak byla navržena kritéria, která zvyšují váhu pozdějších hodnot ε

$$E = \int_0^{\infty} t\varepsilon(t) dt, E = \int_0^{\infty} t\varepsilon^2(t) dt, E = \int_0^{\infty} t^2\varepsilon(t) dt, E = \int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) C^t dt.$$

Pro eliminaci vlivu tvaru vstupní veličiny je vhodné jí normovat výstup podle vztahu

$$E = \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon^2(t) dt : \int_{t_1}^{t_2} X^2(t) dt.$$

Základní problém popisované metody záleží v tom, že je nutno nastavovat několik parametrů modelu (časových konstant a zesílení) tak, aby hodnota kritéria E byla minimální. Optimální nastavení každého parametru je však funkcí hodnot ostatních parametrů, a proto při jejich postupném nastavování nelze obecně dojít k cíli. Aby se vyhnuli těmto obtížím, volí někteří autoři značně jednoduchou strukturu modelu. Jiní navrhují využít vlastností ortogonálních funkcí a vytvořit z nich přenos modelu soustavy, aby se jednotlivé parametry mohly autonomně nastavovat. Takový postup má však tu nevýhodu, že model soustavy je značně složitý. Mimoto při nastavování parametru modelu působí nepříznivě ještě ta skutečnost, že kritérium E má minimální hodnotu nejen při identitě modelu a soustavy, ale ještě další lokální minima při jiných hodnotách parametrů modelu. Při tomto způsobu identifikace soustavy se používá normovaných i obecných vstupních signálů.

Syntéza regulačního obvodu se značně komplikuje, je-li přenosová funkce regulované soustavy příliš složitá. Z toho důvodu byly vypracovány různé postupy aproximace složitých přenosových funkcí (ať již racionálních lomených nebo transcendentních) jednoduššími výrazy, které dostatečně vystihují chování soustavy.

Druhá potřeba aproximace složitých výrazů vzniká při výpočtu přenosů regulátorů víceparametrových soustav. Úkolem aproximace v tomto případě je nalézt jednodušší, snáze technicky realizovatelné přenosy regulátorů, které s dostatečnou přesností splňují vytčené požadavky.

Prvním úkolem při aproximaci složitých přenosů jednoduššími funkcemi je volba kritéria, podle kterého budeme posuzovat jak dalece náhradní přenos vystihuje vlastnosti soustavy. Nejčastěji se dokonalost náhrady posuzuje podle shody přechodových nebo frekvenčních charakteristik, obvykle samotné soustavy. Přitom není dořešeno, zda náhrada vyhovující těmto kritériím při otevřené smyčce bude ještě vyhovovat v uzavřeném regulačním obvodu. Proto autor práce [11] volí jako kritérium shodu geometrického místa dominantního páru kořenů původní a náhradní soustavy v Gaussově rovině.

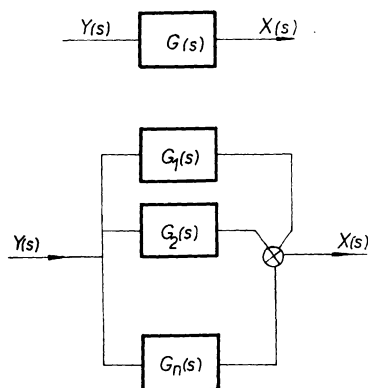
Jedna z cest zjednodušení složitých přenosů daných racionální funkcí lomenou

$$G(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}$$

záleží v rozkladu této funkce na součet parciálních zlomků

$$G(s) = \sum_{i=1}^n G_i(s).$$

Takovému rozkladu odpovídá blokové schéma v obr. 10.



Obr. 10.

V řadě přenosových funkcí $G_i(s)$ pak sledujeme zesílení a časové konstanty jako funkce i a vyšetřujeme, jak rychle konvergují tyto konstanty k nule se vzrůstajícím i . Podle požadavků na přesnost náhrady pak zanedbáme od určitého i všechny další přenosy. Sumu zesílení zanedbaných členů buď nahradíme paralelní větví s přenosem nultého řádu, nebo rozdělíme k jednotlivým přenosům podle charakteru odezvy aproximované soustavy.

Za aproximaci přenosů soustav můžeme považovat také metody [6, 9, 10], o kterých jsme se zmiňovali výše.

Autor práce [11] vychází z úvah o dominantním páru kořenů charakteristické rovnice,

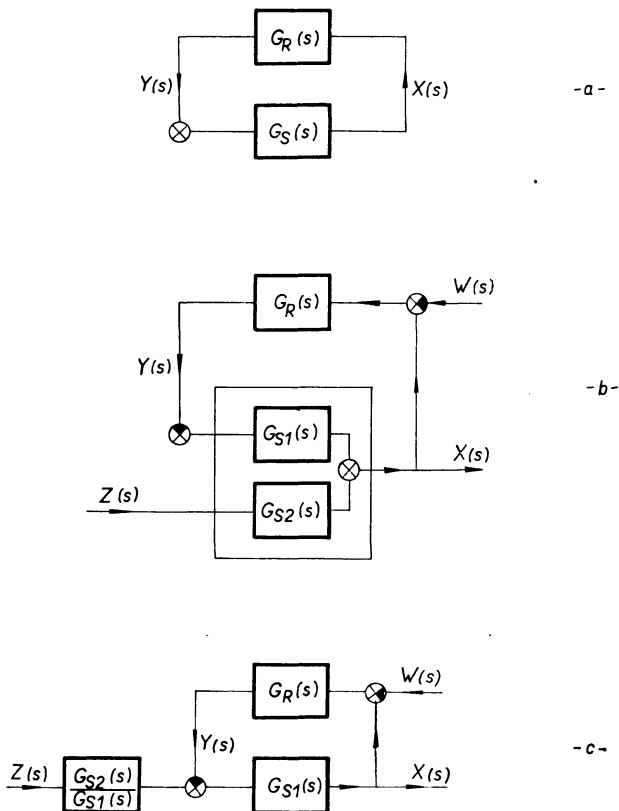
kteřý má převážný vliv na nestacionární děje v uzavřené smyčce. Z koeficientů u tří posledních členů charakteristické rovnice se vypočítá kritické zesílení, součet časových konstant a další ukazatel nazývaný „porovnávací řád soustavy“. Podle hodnot těchto tří parametrů se pak z grafů uvedených v citované práci nalezne aproximace tak, aby se dosáhlo co největší shody geometrických míst kořenů původní a náhradní soustavy. Metoda selhává u těch soustav, které nemají dominantní pár kořenů dosti výrazný.

Při aproximaci přenosů kontinuí daných transcendentními funkcemi s nekonečným počtem pólů lze někdy výhodně postupovat tak, že se přenos upraví na podíl dvou celistvých funkcí, které se rozloží v nekonečné řady. Jestliže tyto řady dostatečně rychle konvergují, je možno zanedbat jejich vyšší členy. Někdy lze využít k aproximaci rozkladu celistvých funkcí v nekonečný součin.

Lze konstatovat, že ucelená a spolehlivá teorie aproximace operátorových přenosů nebyla dosud vypracována. Je známo, že někdy dobře vyhoví i velmi hrubá aproximace a v jiných případech naopak i sotva znatelné odchylky v náhradní přechodové charakteristice regulované soustavy způsobují nepřijatelné chyby v popisu chování uzavřené smyčky.

5. SYNTÉZA REGULAČNÍCH OBVODŮ

Regulační obvody jsou zásadně dvojího druhu – spojitě a diskrétní. *Spojitá regulace*, která se někdy nazývá *analogová* (podle prostředků, jimiž se realizuje) je historicky starší. V poslední době se stále více rozšiřuje *regulace diskrétní (nespojité)*. Vykonává-li funkci diskrétního regulátoru číslicový počítač, mluvíme o regulaci číslicové. Výsledky identifikace soustav jsou podkladem pro syntézu jak spojitých, tak nespojitých regulačních obvodů. Číslicová regulace umožňuje snáze realizovat optimalizaci, samočinné nastavování konstant regulátoru a jiné složité operace.



Obr. 11.

Teorie syntézy číslicových regulačních obvodů vyžaduje jiný matematický aparát, než kterého se používá v tomto článku, a proto se zde nemůžeme jejím výkladem zabývat.

V uzavřeném regulačním obvodu (obr. 11a) se informace o hodnotě regulované veličiny X , získaná příslušným čidlem, vede do regulátoru, kde se porovná s žádanou hodnotou regulované veličiny nastavenou na řídicím členu regulátoru. Podle velikosti rozdílu žádané a změřené hodnoty regulované veličiny se v regulátoru vytváří akční

veličina Y , která je výstupní veličinou regulátoru a současně vstupní veličinou regulované soustavy. Akční veličina musí však působit s opačným znaménkem – viz obr. 11b, aby její působení vedlo k zmenšení odchylky regulované veličiny.

Tok signálů v uzavřeném regulačním obvodu je důsledkem působení vnějších veličin – poruchové veličiny Z a řídicí veličiny W , která nastavuje žádanou hodnotu regulované veličiny. Místo vstupu řídicí veličiny do regulačního obvodu je patrné z obr. 11b. Poruchová veličina vstupuje do regulačního obvodu obecně v jiném místě než akční veličina (obr. 11b). Posunutím uzlu lze však toto schéma převést na tvar uvedený v obr. 11c. V některých případech je $G_1(s) = G_2(s)$ – akční veličina působí na tomtéž místě jako porucha.

Přenos poruchy na regulovanou veličinu je, jak patrné z obr. 11b

$$(10) \quad G_Z(s) = \frac{X(s)}{Z(s)} = \frac{G_{S2}(s)}{1 + G_{S1}(s)G_R(s)},$$

a přenos řízení na regulovanou veličinu je

$$(11) \quad G_W(s) = \frac{X(s)}{W(s)} = \frac{G_{S1}(s)G_R(s)}{1 + G_{S1}(s)G_R(s)}.$$

Zatím jsme přenos regulátoru psali obecně $G_R(s)$ a řekli jsme si, že správná volba jeho dynamických vlastností podle dynamiky regulované soustavy je právě podmínkou správné funkce regulačního obvodu, resp. dosažení žádaného regulačního pochodu. Běžně vyráběné analogové regulátory mají jednu ze tří základních složek: proporcionální (P), derivační (D) a integrační (I), popř. jejich kombinace: PI, PD a PID. Diferenciální rovnice PID regulátoru má obecně tvar

$$b_n \frac{d^n Y(t)}{dt^n} + \dots + b_1 \frac{dY(t)}{dt} + b_0 Y(t) = r_{-1} \int X(t) dt + r_0 X(t) + r_1 \frac{dX(t)}{dt},$$

jemuž odpovídá přenos

$$G_R(s) = \frac{r_0 + r_{-1}/s + r_1 s}{b_n s^n + \dots + b_1 s + b_0}.$$

Při konstrukci regulátoru se vychází ze snahy, aby na levé straně jeho diferenciální rovnice byl pouze člen $Y(t)$, aby tedy vlastní zpožďující členy regulátoru byly zanedbatelné. Tento regulátor se nazývá *ideální regulátor*.

Je-li $r_{-1} = r_1 = 0$, je výstupní veličina ideálního regulátoru úměrná vstupní veličině

$$Y(t) = r_0 X(t)$$

a regulátor se nazývá *proporcionální*.

Je-li $r_0 = r_1 = 0$, je rychlost výstupní veličiny $dY(t)/dt$ úměrná vstupní veličině

$$dY(t)/dt = r_{-1} X(t).$$

Výstupní veličina je pak časovým integrálem regulační odchylky

$$Y(t) = r_{-1} \int X(t) dt$$

a regulátor se nazývá *integrační*.

Je-li konečně $r_0 = r_{-1} = 0$, je výstupní veličina regulátoru úměrná časové změně derivace vstupní veličiny

$$Y(t) = r_1 dX(t)/dt$$

a regulátor se nazývá *derivační*.

Při návrhu uzavřeného regulačního obvodu se vyskytuje řada navzájem souvisejících problémů. Jednak je třeba vhodně volit výstupní veličinu, která má být měřena, i místo působení akční veličiny, jednak je třeba správně vybrat vhodnou technickou realizaci zpětné vazby. Při jedné z nejstarších klasických realizací regulačního obvodu – při regulaci otáček známým Wattovým regulátorem – se ukázala skutečnost pro techniky tehdejší doby velmi překvapující: zdokonalování výroby regulátoru, které přineslo snížení tření v ložiscích rotujících částí, způsobilo, že nové, z hlediska výrobního dokonalejší výrobky neplnily svoji funkci, docházelo ke kolísání otáček, ač uvedené regulátory starší výroby se již mnohokrát osvědčily. To vedlo k tomu, že byl podniknut zevrubnější teoretický průzkum funkce regulátoru a ukázalo se, že právě tření, které bezděčně plnilo funkci tlumení, je podmínkou správné funkce regulátoru. Tento poznatek byl později zevšeobecněn v tomto smyslu, že přenos zpětné vazby (regulátoru) je třeba správně volit (pro určitou soustavu vzhledem k její dynamice), aby regulační obvod splňoval apriori dané technické požadavky. Úkolem syntézy regulačních obvodů je nalézt na základě známých dynamických charakteristik regulované soustavy přenosy regulátorů tak, aby byly splněny žádané vlastnosti regulačního obvodu. K tomu účelu byla vypracována řada metod pro zjišťování stability regulačních obvodů a byla navržena řada kritérií kvality regulačního obvodu. Zvláštní kapitolou syntézy jsou víceparametrové regulační obvody. Blíže se může čtenář seznámit s problematikou syntézy např. v [7].

Jako pomůcka pro navrhování regulačních obvodů vznikala nejprve různá kritéria stability. Při rozboru stability vycházíme z homogenní diferenciální rovnice regulačního obvodu, protože na stabilitu mají vliv pouze vlastnosti obvodu (levá strana rovnice), kdežto hodnoty budičích veličin (pravá strana rovnice) vliv nemají.

Obecný integrál rovnice

$$(12) \quad a_n \frac{d^n X}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} X}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dX}{dt} + a_0 X = 0$$

je

$$(13) \quad X(t) = \sum_i C_i e^{a_i t} + \left\{ \sum_k C_k e^{a_k t} \cos(\omega_k t + \Phi_k) \right\}.$$

První člen rovnice (13) je součet aperiodických exponenciálních složek odezvy, druhý člen je součet periodických, kmitavých složek. Aby byl regulační pochod stabilní, musí všechny členy rovnice (13) pro $t \rightarrow \infty$ konvergovat k nule. Odtud vyplývá obecná podmínka stability regulačního obvodu – reálné části kořenů charak-

teristické rovnice α_i a α_k musí být záporné. Jinými slovy řečeno: všechny kořeny charakteristické rovnice musí ležet v levé polovině Gaussovy roviny. Jak patrně, všechny členy $e^{\alpha_i t}$ a $e^{\alpha_k t}$ pak (pro $\alpha_i < 0$ a $\alpha_k < 0$) konvergují k nule se vzrůstajícím t . Kořeny s kladným α_i , resp. α_k způsobují trvalý vzrůst aperiodické, resp. periodické složky výstupu a soustava je pak nestabilní. Je-li $\alpha_k = 0$ říkáme, že soustava je na *mezi stability*. Poloha kořenů rovnice (12) v Gaussově rovině záleží na hodnotách koeficientů a_0, a_1, \dots, a_n . Tyto koeficienty jsou vytvářeny z parametrů soustavy a regulátoru. Protože hodnoty parametrů soustavy obvykle nelze měnit, musíme vhodnou volbou parametrů regulátoru tak ovlivnit velikost konstant a_0, \dots, a_n , aby byla splněna podmínka $\alpha_i < 0, \alpha_k < 0$.

Problém vyšetřování stability je tedy vlastně problém vyhledávání souvislostí mezi množinou koeficientů a_0, \dots, a_n a polohou pólů v Gaussově rovině.

Podmínka nutná (ale postačující jen pro soustavy druhého řádu) pro to, aby $\alpha_i < 0$ a $\alpha_k < 0$ je, že všechny koeficienty a_0, \dots, a_n v diferenciální rovnici uzavřeného regulačního obvodu musí mít stejné znaménko. Pro soustavy vyšších řádů byla vypracována řada kritérií stability, která vycházejí buď z numerického rozboru konstant v charakteristické rovnici, nebo jsou založena na posuzování tvaru frekvenční nebo přechodové charakteristiky.

Nejstarší osvědčený způsob vyšetřování stability je *Routhův-Schurův algoritmus*. Je to algoritmus postupné redukce řady konstant diferenciální rovnice soustavy. Regulační obvod je stabilní, jestliže všechny koeficienty ve všech řadách vytvořených tímto postupem (i v původní řadě) mají stejné znaménko.

Jinou formou vyjádření Routhových-Schurových podmínek jsou *Hurwitzovy podmínky stability*. Vycházejí ze schématu pro sestavení matice z koeficientů charakteristické rovnice. Podmínkou stability je, aby se jednak žádný z koeficientů charakteristické rovnice nerovnal nule, jednak aby znaménka determinantů a všech subdeterminantů (až do druhého řádu) uvedené matice byla stejná.

Skupina kritérií je založena na tom, že diferenciální rovnici regulačního obvodu vyjádříme křivkou a formulujeme kritéria stability jako požadavky na tvar této křivky vzhledem k určitému tzv. „kritickému bodu“ Gaussovy roviny. Prochází-li křivka kritickým bodem, je obvod na *mezi stability*.

Nejznámější z těchto kritérií je *Nyquistovo*: regulační obvod (uzavřená smyčka) je stabilní, jestliže při postupu po frekvenční charakteristice od hodnot $-\infty$ přes $0_-, 0_+$ k $+\infty$ obíhá frekvenční charakteristika bod -1 Gaussovy roviny kladným směrem (proti směru pohybu hodinových ruček) a počet oběhů se rovná počtu pólů přenosu otevřeného regulačního obvodu, které leží v pravé polovině Gaussovy roviny. Nyquistovo kritérium je výhodné pouze při vyšetřování obvodů popsaných naměřenou frekvenční charakteristikou nebo při vyšetřování obvodů popsaných transcendentními přenosy.

Michajlovovy-Leonhardovy podmínky stability jsou formulovány pro grafické

zobrazení funkce

$$a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1j\omega + a_0 = H(j\omega).$$

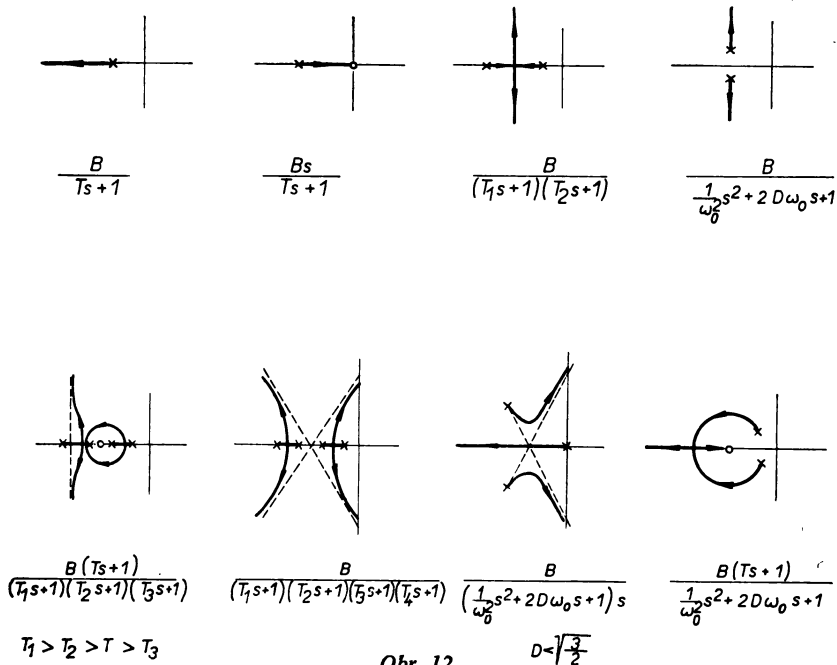
Křivka $H(j\omega)$ musí začínat (pro $\omega = 0$) na kladné části reálné osy (ne v počátku) a s ω vzrůstajícím od 0 do ∞ musí v kladném smyslu procházet n za sebou následujícími kvadranty, kde n je řád rovnice. Kreslení křivek $H(j\omega)$ je velmi zdoluhavé a pracné, zvláště při vyšetřování obvodů popsaných rovnicemi vyšších řádů. HELLER a VEVERKA [2] proto vypracovali podstatné zjednodušení uvedené metody, které záleží v tom, že se sledují pouze průsečíky křivky $H(j\omega)$ s reálnou a imaginární osou. Rozdělíme-li funkci $H(j\omega)$ na reálnou část a imaginární část

$$(14) \quad u(\omega) = a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \dots,$$

$$(15) \quad v(\omega) = j(a_1\omega - a_3\omega^3 + a_5\omega^5 - \dots),$$

můžeme podmínky stability formulovat:

1. Kořeny rovnic $u(\omega) = 0$ a $v(\omega) = 0$ musí být jen reálné a musí se střídat ve velikosti svých hodnot při vzrůstajícím ω .



Obr. 12.

2. Reálná část a první derivace imaginární části funkce $H(j\omega)$ pro $\omega = 0$ musejí mít stejná znaménka, aby se $H(j\omega)$ pro rostoucí ω otáčela kolem počátku v kladném smyslu.

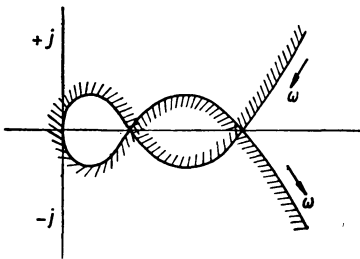
Je-li frekvenční charakteristika znázorněna v logaritmických souřadnicích, lze stabilitu regulačního obvodu posoudit podle toho, zda amplitudová charakteristika protíná osu 0 dB vlevo nebo vpravo od frekvence, při níž dochází k fázovému posunutí $(2k + 1)\pi$. V prvním případě je obvod stabilní, ve druhém labilní.

Jednou z nejracionálnějších metod vyšetřování stability uzavřeného regulačního obvodu je metoda *geometrického místa kořenů*, vypracovaná *Evansem*. Záleží v tom, že v komplexní rovině se na základě známého rozložení pólů a nul přenosu otevřené smyčky konstruují křivky geometrických míst kořenů uzavřené smyčky. Na ně se vynášejí stupnice hodnot zesílení regulátoru, odpovídajících poloze kořenů. Konstrukce geometrického místa je přibližná. Několik příkladů geometrických míst kořenů je uvedeno v obr. 12.

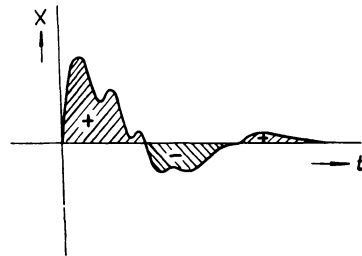
Rozklad D vypracovaný NEJMARKEM je postup pro vyšetřování stability založený na následující myšlence. Určité oblasti, v níž jsou soustředěny konstanty $a_0 \dots a_n$ lineární diferenciální rovnice rozpojeného regulačního obvodu odpovídá oblast kořenů v komplexní rovině. Komplexní rovina je imaginární osou rozdělena do dvou částí (pravá — labilní, levá — stabilní). Obraz imaginární osy v oblasti konstant zjistíme tak, že z rovnice

$$a_n(j\omega)^n + \dots + a_1j\omega + a_0 = 0$$

vypočítáme hodnoty a_i pro ω od 0 do ∞ — obr. 13. Hodnoty a_i vycházejí obecně komplexní, význam mají ovšem jen reálné hodnoty. Vyšrafováním jedné strany křivky obr. 13 si usnadníme představu rozdělení plochy na dvě části. Při přechodu



Obr. 13.



Obr. 14.

hodnot konstanty a_i na reálné ose ze šrafované na nešrafovanou stranu křivky přechází v komplexní rovině kořen imaginární osu. Která strana křivky odpovídá levé a která pravé straně Gaussovy roviny, zjistíme jednoduchým testem — vyšetřením stability, např. Hurwitzovým kritériem pro některý bod roviny.

Společnou nevýhodou matematických kritérií stability je to, že odpovídají jen na otázku, zda soustava je či není stabilní, neposkytují však informaci, jak daleko od meze stability se nachází. Tuto nevýhodu odstraňuje Schur-Nekolného test.

Dosud jsme rozebírali stabilitu regulačních obvodů. Je to vlastnost, která rozhoduje zásadně o použitelnosti regulačního obvodu. Je-li výsledek vyšetření stability pro

uvažovaný regulátor pozitivní, je ještě třeba jemněji posoudit kvalitu jím realizovaného regulačního pochodu, aby bylo možno provést optimální nastavení konstant regulátoru. Je ovšem nutno pamatovat na skutečnost, že optimální regulační pochod není obecný pojem. V různých technických oblastech jsou požadavky na průběh regulačního pochodu různé. Někdy je nutno dosáhnout aperiodického průběhu regulované veličiny i za cenu větších překmitnutí. Proto byla vypracována různými autory celá řada kritérií pro posouzení kvality regulačního pochodu a při řešení konkrétního případu je třeba zvolit to z nich, které nejlépe vyhoví individuálním požadavkům. Je třeba však pamatovat na to, že obvod navržený podle kritéria kvality jako optimální nemusí být obecně stabilní a stabilitu je třeba vyšetřovat zvlášť.

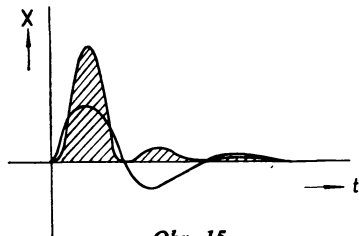
Lineární regulační plocha omezená přechodovou charakteristikou a čarou ustáleného stavu je znázorněna na obr. 14. Má-li regulátor integrační složku, pak je regulační odchylka v ustáleném stavu ($t \rightarrow \infty$) nulová a pro lineární regulační plochu můžeme psát výraz

$$S = \int_0^{\infty} X dt .$$

Nedostatkem tohoto kritéria je, že plocha pod osou a nad osou času mají opačná znaménka a v důsledku toho můžeme pak dospět k regulačnímu pochodu s trvalými kmity jako k pochodu optimálnímu. Proto musí být při použití lineární regulační plochy k určení nastavení vzato v úvahu ještě další kritérium — nejčastěji činitel tlumení regulačního pochodu.

Kvadratická regulační plocha (viz obr. 15) nemá záporné části, a proto nemá nevýhodu lineární regulační plochy. Kromě toho jsou při kritériu kvadratické regulační plochy zdůrazněny velké odchylky od ustáleného stavu. Je definována integrálem

$$\int_0^{\infty} X^2 dt .$$



Obr. 15.

Kromě uvedených kritérií byla navržena řada dalších:

$$\int_0^{\infty} tX dt, \int_0^{\infty} |X| dt, \int_0^{\infty} t|X| dt, \int_0^{\infty} tX^2 dt, \int_0^{\infty} t^2X^2 dt, \int_0^{\infty} t^2X dt .$$

GRAHAM a LATHROP provedli srovnání těchto kritérií a jako nejvýhodnější doporučují

$$\int_0^{\infty} t|X| dt .$$

WHITELEY vyšel při odvozování kritéria pro nastavení regulátoru z přenosu regulačního obvodu. Položil podmínku, aby průběh závislosti poměru amplitud X_0/W_0 , resp. X_0/Z_0 na frekvenci (amplitudové spektrum) byl konstantní v co nejširší oblasti frekvencí:

$$\frac{d^n}{d\omega^n} \frac{X_0}{W_0} \rightarrow 0 \text{ pro } n = 1, 2, 3, \dots$$

OLDENBOURG a SARTORIUS vycházejí také z amplitudového spektra a kladou podmínku, že má klesat se vzrůstajícím kmitočtem.

Matematický vztah mezi průsečíky záporné inverzní frekvenční charakteristiky s osami a hodnotami optimálního nastavení regulátoru PID bez zpoždění odvodil SYRBE.

Literatura*)

- [1] CUNNINGHAM W. J.: *Introduction to Nonlinear Analysis*. McGraw Hill, New York—London—Toronto 1958.
- [2] HELLER B., VEVERKA A.: Michjlov-Leonhardovo kritérium stability. *Elektrotechn. obzor* 42 (1953), 467.
- [3] KOTEK Z., KUBÍK S.: *Nelineární obvody*. SNTL, Praha 1962.
- [4] KU Y. H.: *Analysis and Control of Nonlinear Systems*. New York 1958.
- [5] SIMOJU M. P.: Opredělenie koeficientov peredatočnych funkcij linearizovannych zveněv i sistem avtoregulirovanija. *Avtomatika i telemekhanika* 18 (1957), 514.
- [6] STREJC V.: *O možnostech vyššího využití teorie regulace v praxi*. Práce, Praha 1958.
- [7] STREJC V., ŠALAMON M., BALDA M.: *Základy teorie samočinné regulace*. SNTL Praha 1958.
- [8] ŠALAMON M.: *Matematika pro regulaci a automatizaci*. SNTL, Praha 1957.
- [9] ŠALAMON M.: Výpočet konstant náhradních statických soustav s dopravním zpožděním z měření signálem obecného tvaru. *Automatizace* 2 (1959), 292.
- [10] ŠALAMON M.: Příspěvek k analýze přechodových charakteristik. *Slaboproudý obzor* 18 (1957), 573.
- [11] ŠTĚPÁN J.: Aproximace přenosů pomocí dominantního páru kořenů. *Automatizace* 3 (1960), 193.

Lantan dává optickým sklům

mimořádné optické i jiné vlastnosti, zejména odolnost proti mechanickým a chemickým vlivům, stejnorodost a světelnou propustnost. Lantanová skla zavádí do výroby n. p. Schott & Gen. v Jeně.

Sk

Památník dobyvatelů vesmíru

byl postaven v Moskvě poblíž vchodu do výstavy úspěchů národního hospodářství. Jeho zděná část obsahuje muzejní sál o ploše 1000 m², promítací sál s 200 místy a několik pomocných místností. Na tuto část plynule navazuje ocelová konstrukce 100 m vysoká, pokrytá leštěnými titanovými plechy a zakončená maketou rakety. Konstrukce je chráněna před korozí zinkováním a asfaltovým nátěrem; části, které nemohly být takto chráněny, byly zhotoveny z nerezavějících materiálů a spoje různých kovů jsou chráněny ebonitovými podložkami proti elektrochemickým vlivům.

Křivka památníku, která znázorňuje dráhu rakety, byla nalezena empiricky prohýbáním pravitka; počítač pak určil její analytický tvar a vypočítal tvar 600 žulových desek pro obložení zděné části.

Sk

*) Poznámka. Podle redakčních zvyklostí byl původní autorův seznam literatury (celkem 39 položek) podstatně zkrácen. Redakce jej však zájemcům zašle na požádání.