Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Simon G. Gindikin
Joseph Louis Lagrange (1736-1813)

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 31 (1986), No. 6, 297--313

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138440

Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813)

S. G. Gindikin, Moskva

Zabývám se studiem matematiky v klidu a tichosti. Protože mne nic a nikdo nehoní, pracuji více pro své potěšení než z povinnosti: ... stavím, bourám, přestavuji až do té doby, než dostanu něco, s čím jsem alespoň trochu spokojen.

Lagrange

Dopis z Turína

V srpnu 1755 dostal velký Euler (1707 – 1883) dopis z Turína od 19letého Lagrange. Nebyl to první dopis, který od něho dostal, a proto nepochybně věděl, že jeho autor je přes své mládí nadaným a vyzrálým matematikem. Přesto ho obsah posledního listu překvapil.

Od konce 17. století přitahovaly zájem matematiků úlohy, které nyní nazýváme variačními; tehdy jim říkali izoperimetrické. Začalo to úlohou o brachystochroně – křivce nejrychlejšího sestupu mezi dvěma body, zformulovanou Johannem Bernoullim (1667 – 1748). Úlohy o křivkách majících jisté extremální vlastnosti byly ovšem známy již dříve: kružnice omezuje mezi všemi křivkami dané délky obrazec s největším obsahem (tato její izoperimetrická vlastnost dala i pojmenování danému typu úloh), úsečka je nejkratší spojnice dvou bodů, apod. Objevovaly se stále nové a nové úlohy tohoto typu, matematikové je s potěšením řešili a každý se přitom snažil vymyslet svůj způsob řešení.

Duch epochy diferenciálního a integrálního počtu však požadoval vytvoření obecné metody pro řešení izoperimetrických úloh. Významní matematikové, kteří se těmito úlohami zabývali, intuitivně vycítili to společné při řešení jednotlivých případů. Mnohé v tomto směru udělal Jakub Bernoulli (1654 – 1705). Přesto však celkový obraz zůstával velmi různorodý a k vytvoření obecné metody bylo potřebné ještě velmi mnoho vykonat.

Eulerovi bylo právě 19 let, když mu jeho učitel Johann Bernoulli předložil úlohu o brachystochroně v prostředí, jehož odpor nelze zanedbat. Potom se objevila úloha o nejkratších křivkách na plochách (geodetických křivkách). Variační úlohy byly stále středem Eulerovy pozornosti a k roku 1732 vykrystalizovala jeho obecná metoda pro jejich řešení. Na zdokonalení metody bylo potřeba ještě dalších 12 let a v roce 1744 vychází souhrnné dílo o řešení „izoperimetrických úloh v nejširším smyslu“. Metoda je v něm ilustrována na řešení 60 nejrůznějších úloh.

Zkrácená a redakčně upravená verze delšího rukopisu, který autor nabídl časopisu Pokroky k 250. výročí Lagrangeova narození.

Dnes již jasně chápeme tehdejší obtíže při řešení variačních úloh: v jistém smyslu vznikly v 17. století v matematice předčasně. V té době se studovaly převážně funkce jedné proměnné a v menší míře funkce několika proměnných. Avšak křivky vyskytující se ve variačních úlohách se zpravidla nedají charakterizovat konečným počtem parametrů. Jde v nich fakticky o funkce nekonečně mnoha proměnných, což je doména analýzy 20. století (funkcionální analýzy).

Základní Eulerův postřeh spočívá v tom, že křivky řešící izoperimetrické úlohy odpovídají řešením jistých diferenciálních rovnic. Základní úlohu proto vidí v odvození těchto rovnic. Postupuje velmi opatrně, aby nevyšel za rámec tehdejší analýzy: nahrazuje křivky lomenými čarami, které již závisejí na konečném počtu parametrů, které charakterizují jejich vrcholy. Dojde tak ke hledané rovnici, ale způsobem velmi složitým. Jak píše Delambre (1749–1822), věrný přítel a životopisec Lagrangeův (s jeho výroky se ještě dále setkáme vícekrát): jeho metoda „nebyla tak prostá, jak požadovala čistá analýza“.

Tato slova vyjadřují pravděpodobně i názor Lagrangeův. S mladistvou rozhodností se odvažuje zobecnit známý postup rozpracovaný tehdy pro funkce: najde se hlavní lineární část $\mathrm{d}f$ přírůstku funkce $f(x)$ odpovídající přírůstku $\mathrm{d}x$ nezávisle proměnné x a hledají se ty body, v nichž je $\mathrm{d}f = 0$. Lagrange uvažuje funkce křivek – funkcionály $I(l)$ (samozřejmě speciálního tvaru) a nebojí se toho, že jde fakticky o funkce nekonečně mnoha proměnných; danou křivku l pozmění malou „poruchou“ δl, určí hlavní část δI přírůstku příslušného funkcionálu a pro křivky, pro něž je $\delta I = 0$, dostává diferenciální rovnici, k níž Euler docházel složitou oklikou. Tuto rovnici nyní nazýváme Eulerovou-Lagrangeovou rovnicí. Stojí za povšimnutí i to, že Lagrange zavedl nový symbol δ, který je podobný symbolu diferenciálu d, ale zároveň se od něho liší. Také tento vhodně zvolený symbol byl na prospěch věci.

Tato stručná informace stačila Eulerovi k tomu, aby si uvědomil přednosti Lagrangeova nového přístupu. Mezi Eulerem a Lagrangem se rozvíjí bohatá korespondence, vysoké ocenění velkého vědce dalo začínajícímu matematikovi křídla. V dopisech diskutují o stále složitějších variačních úlohách, neboť sílu nové metody bylo nutné prokázat na řešení nových úloh, které se nedaly řešit starým postupem. Po Lagrangeově objevu vzrostl i Eulerův zájem o extremální úlohy. Už v r. 1756 přednáší v berlínské Akademii věd dvě sdělení související s Lagrangeovou metodou. V témže roce byl Lagrange na Eulerův návrh zvolen zahraničním členem této Akademie, což byla pro mladého vědce, který ještě ani nestihl uveřejnit své výsledky, výjimečná pocta (poznamenejme však, že tehdy taková volba znamenala méně než dnes).

Euler nespěchal s uveřejněním vlastních výsledků, aby dal svému mladému kolegovi možnost v klidu připravit do tisku svou práci. Píše o tom v dopise z 10. října 1759: „Tvoje analytické řešení izoperimetrické úlohy obsahuje podle mého názoru vše, čeho si je možné v dané oblasti přát, a já jsem rád, že tato teorie, kterou jsem se po svých prvních pokusech fakticky zabýval sám, byla tvými výsledky dovedena do nejvyšší dokonalosti. Důležitost otázky mne přiměla k tomu, abych také odvodil analytické řešení této úlohy. Rozhodl jsem se však nepublikovat je do té doby, dokud neuveřejníš své výsledky, protože tě v žádném případě nechci připravit o část zasloužené slávy“. Není to krásný příklad vědecké etiky?

Eulerův dopis dodal Lagrangeovi odvahy k uveřejnění výsledků, a tak ve 2. svazku časopisu Miscelanea Taurinensia (1761–62) vychází jeho práce *Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies.* V r. 1764 uveřejňuje své výsledky i Euler, který publikaci doprovází slovy: „Po dlouhých a neúspěšných pokusech o řešení daného problému jsem s překvapením zjistil, že v Miscelanea Taurinensia je úloha rozřešena, a to jak lehce, tak i šťastně. Tento významný objev mne nadchl i z toho důvodu, že používá jiných a přitom podstatně jednodušších metod". Může nás trochu překvapit, že se Euler nezmiňuje o předcházející korespondenci s Lagrangem. Euler navrhl nazvat novou metodu „variačním počtem" podle analogie s diferenciálním počtem (δI, resp. δl se nazývá variací I, resp. l).

Takový tedy byl Lagrangeův vědecký začátek. Je v jistém smyslu výjimečný. I když jsou známy další případy, kdy velcí matematikové dosáhli svých prvních významných výsledků ve stejném věku jako Lagrange, šlo převážně o řešení konkrétních úloh. Snaha o zdokonalení metody se objevuje obyčejně až později. A tak už v prvním Lagrangeově díle se projevuje to, co je typické pro celou jeho další práci: úplné vyjasnění situace, zdokonalení metody a hledání „prapříčiny" se pokládá za cennější než řešení konkrétních úloh.

Giuseppe Luigi

Začali jsme první velkou Lagrangeovou prací. Vraťme se nyní alespoň stručně k některým dřívějším událostem jeho života. Joseph Louis Lagrange se narodil 25. ledna 1736 v Turíně v Itálii, kde jej nazývali Giuseppe Luigi. Jeho praděd přijel z Francie a dal se do služeb savojského krále Karla Emanuela. Jeho děd a otec v těchto službách pokračovali. V době, kdy se narodil budoucí matematik, byla rodina na mizině. „Kdybych byl bohatý, nedosáhl bych pravděpodobně svého postavení v matematice; a v jaké jiné činnosti bych mohl dosáhnout stejných úspěchů?" říká sám později. Podle původních rodinných plánů se měl stát advokátem. Proto se ve 14 letech zapsal na turínskou univerzitu, ale brzy přešel do dělostřeleckého učiliště, což bylo důsledkem jeho rostoucího zájmu o matematiku. V devatenácti letech je už profesorem matematiky na této škole (podle některých pramenů dokonce dříve).

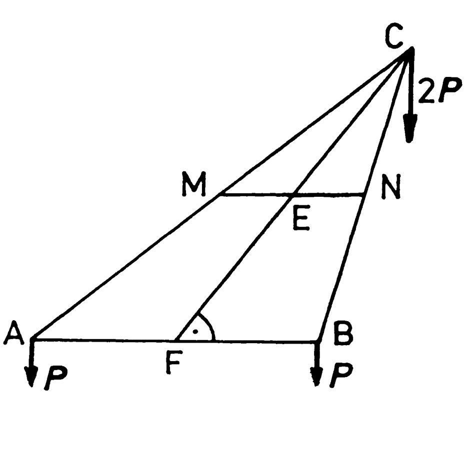
Jeho první pokusy objevit něco nového v matematice skončily „objevením již známého". Kontakty s mimořádně originálním italským matematikem hrabětem di Fagnano (1682–1766) pomohly mladíkovi pochopit, že samostatné práci musí předcházet důkladné studium současné matematiky. Jak jsme viděli, již první Lagrangeovy výsledky nebyly jen šťastným nálezem mladého diletanta, ale výsledkem usilovné práce už vyspělého profesionála. Umění všestranně a kriticky pochopit a přetvořit již známé zkušenosti je typické pro celou vědeckou Lagrangeovu činnost od samého začátku.

Kolem Lagrange se vytvořila skupina mladých matematiků a fyziků, z níž později vznikla turínská Akademie věd. Od roku 1759 vycházejí sborníky Miscelanea Taurinensia. Už jsme si řekli, že v jejich 2. svazku byla uveřejněna Lagrangeova práce o variačním počtu. V 1. svazku byly otištěny dvě jeho práce, jednou z nich byl článek *O podstatě a šíření zvuku.* Z matematického hlediska jsou v ní velmi poučné komentáře k úloze o kmitech struny. Tuto úlohu studovali tři velcí matematikové té doby: d'Alembert (1717–1783), Euler a Daniel Bernoulli (1700–1782). Jejich úvahy se však v lecčems podstatně lišily. Zatímco d'Alembert, který jako první vyřešil rovnici kmitání struny, se domníval, že počáteční poloha struny se musí dát popsat funkcí danou jednotným analytickým výrazem (tehdy nebylo jasné, co to má přesně znamenat), pak Euler tvrdil, že to může být funkce zcela libovolná (my bychom dnes řekli libovolná spojitá). Bylo to vlastně poprvé, kdy se v analýze objevily obecné funkce, zadávané grafem a nikoli analytickým výrazem. A konečně Bernoulli zkoumal harmonické kmity s různými frekvencemi a tvrdil, že libovolný kmitavý pohyb se dá napsat jako superpozice nekonečně mnoha harmonických kmitů, a tomu nevěřili ani d'Alembert ani Euler.

Základy statiky

Lagrange byl duší turinského kroužku. Jeho silný vliv je jasně patrný na článcích jeho kolegů, uveřejněných v Miscelanea Taurinensia. Týká se to především práce Foncenexovy (1734–1799), který byl podle všeho pouze Lagrangeovým řadovým spolupracovníkem při zkoumání základů mechaniky. Na toto téma, které jasně ukazuje hloubku Lagrangeova přístupu později navázala jeho znamenitá *Analytická mechanika*. Jde o srovnání dvou základních zákonů statiky: zákona páky a zákona skládání sil působících ve stejném bodě. Archimedes bral za základ své teorie páky axióm o rovnováze páky se stejnými rameny i břemeny a o dvojnásobném zatížení působícím na opěrný bod. Mnozí autoři se snažili Archimedovy úvahy zpřesnit a doplnit, ale podle Lagrangeových slov „pouze ztratili jednoduchost, aniž by cokoli získali na přesnosti". Lagrange poznamenává, že první část axiómu je možné považovat za zřejmou z důvodů symetrie: „není možné si představit žádný důvod pro to, aby jedno břemeno převážilo druhé". Nevidí však žádný logický důvod pro to, že by zatížení opěrného bodu muselo být rovno součtu vah obou břemen. „„… podle všeho všichni mechanikové považovali tuto hypotézu za výsledek každodenního pozorování, které nám říká, že váha tělesa závisí pouze na jeho hmotnosti a nezávisí na jeho tvaru".

Lagrange navrhuje následující odvození druhé poloviny axiómu z první. Uvažuje vodorovnou trojúhelníkovou destičku ABC, kde ABC je rovnoramenný trojúhelník se základnou AB. Destička je podepřena po střední příčce MN, rovnoběžné s AB. Vrcholy A a B zatížíme stejnými břemeny P a vrchol C břemenem $2P$. Destička bude v rovnováze, jak plyne z první části axiómu, užité na dvojici pák AC a BC s opěrnými body M, N. Potom ale bude také v rovnováze páka CF, kde F je střed úsečky AB s opěrným bodem E (což je střed úsečky CF ležící na úsečce MN). To však znamená, že zatížení v bodě F musí být rovno břemenu $2P$ v bodě C (fakticky podle obrácení první části axiómu, které se snadno odvodí). Ale to je tedy zatížení opěrného bodu páky AB.



Dále Lagrange zkoumá zákon skládání sil působících ve stejném bodě a snadno jej dokazuje pomocí skládání pohybů. Podstatný rozdíl mezi těmito dvěma zákony (tj. zákonem páky a zákonem skládání sil) spočívá v tom, že v prvním případě síly působí v různých bodech a ve druhém v témže bodě. Nicméně je možné mnohá tvrzení statiky odvodit z kteréhokoli z nich. Vzniká proto přání vůbec vypustit zákon o páce ze soustavy axiómů, ale Lagrange postupuje opatrně, neboť ví, že všechna známá odvození Archimedova axiómu ze zákona skládání sil jsou velmi umělá: „...ačkoli oba zákony – páky i skládání sil – vedou ke stejným výsledkům, ukazuje se, že případy nejjednodušší z hlediska jednoho jsou nejobtížnější z hlediska druhého“. Intuicí se Lagrangeovi podařilo tuto jemnost odhalit, i když ji nedokázal beze zbytku vysvětlit. Ukazuje se, že je to problém vztahu mezi mechanikou a geometrií. Zatímco zákon skládání sil, působících ve stejném bodě nezávisí na axiómu o rovnoběžkách, pak v Lobačevského prostoru zatížení na opěrný bod páky vždy převyšuje součet vah působících břemen. Analýza výše uvedeného odvození druhé poloviny Archimedova axiómu ukazuje, že se používá toho, že výška v rovnoramenném trojúhelníku a střední příčka se navzájem půlí, což je pravda za předpokladu platnosti axiómu o rovnoběžkách a neplatí to v Lobačevského geometrii. To pravděpodobně Lagrange nevěděl, ačkoli je známo, že se problémem V. postulátu také zabýval.

Princip minimální akce

Ve 2. svazku Miscelanea Taurinensia je hned za článkem o variačním počtu uveřejněn další Lagrangeův článek *O použití metody, vyložené v předchozím článku na řešení různých dynamických úloh.* I zde jde Lagrange v Eulerových stopách. V roce 1744 Maupertuis (1698–1759) zformuloval velmi obecný, ale „mlhavý“ princip, podle něhož se vše v přírodě chová tak, aby jistá veličina – „akce“ – byla minimální. Pro pohyb v centrálním poli dal Euler tomuto nejasnému tvrzení přesný smysl, když akci definoval jako $\int v \, \mathrm{d}s$ – integrál rychlosti po dráze. Eulerův princip zobecnil Lagrange na případ libovolné soustavy bodů s libovolnými vazbami a vzájemným působením.

První astronomické práce

Vidíme, že Lagrangeova činnost probíhala ve svých začátcích v rámci tradičních otázek matematiky 18. století, v rámci problematiky patřící do okruhu zájmů jeho starších současníků Eulera a d'Alemberta. Logika doby ho nutně musela přivést k tomu, aby zkusil své síly v nebeské mechanice. Nejvíce vzrušujícím problémem bylo sladění zdánlivého pohybu nebeských těles s gravitačním zákonem. Na jedné straně bylo třeba v rámci tohoto zákona vysvětlit nepochybné odchylky od Keplerových zákonů, na druhé straně bylo třeba vysvětlit další zákonitosti v nebeské mechanice, např. proč vidíme pouze jednu stranu Měsíce. Vysvětlení tohoto jevu zařazuje pařížská Akademie věd jako téma na svoji cenu za rok 1764.

Je nutné říci, že témata pro akademické ceny byla v Paříži volena s velkým umem, a získat cenu bylo pro matematika (a pro mladého matematika obzvláště) prestižní otázkou. Lagrangeově práci byla udělena první cena, doprovázená nadšeným oceněním d'Alembertovým: „S velikým potěšením jsem si přečetl výsledky Vašich prací o libraci. Opravdu si zasluhují cenu, která Vám bude udělena."

Cesta do Paříže

V roce 1766 bylo Lagrangeovi 30 let. Byl to rok v jeho životě velmi důležitý. Provinciální Turín začal být pro jeho vědeckou práci těsný. V osobním životě byl Lagrange nenáročný, jeho zdraví bylo nevalné, jeho skromnost ve styku s lidmi často přerůstala v ostýchavost a samotářství. Kontaktů s kolegy si však velice cenil a dovedl jich využít. Zpočátku mu postačovali přátelé z jeho kroužku, jejich práci se věnoval tělem i duší, ale nevyhnutelně je přerostl. Neměl už systematické kontakty s di Fagnanem, který byl starý a v roce 1766 zemřel. Vedl rozsáhlou korespondenci, ale jak je důležitý přímý kontakt s vědci, pochopil Lagrange při své cestě do Paříže. Doprovázel tehdy svého přítele Caraccioliho, který byl jmenován vyslancem v Londýně. Do Londýna totiž Lagrange nakonec nedojel, jak vzpomíná Delambre: „Těžce onemocněl po obědě u opata Nolleta, který jej hostil jídly připravenými v duchu italské kuchyně. Proto nemohl jet do Londýna a zůstal v Paříži na léčení. Když se uzdravil, spěšně se vrátil do Turína". Na vysvětlení: V severní Itálii připravují jídla na ricinovém oleji, který ovšem nejdříve silně prohřejí. Nolletovi kuchaři, kteří chtěli připravit oběd „po italsku" použili tohoto oleje bez potřebné předběžné úpravy, a tak se projevily v plné míře jeho „léčebné" účinky, které se prohřátím ztrácejí. Z hlediska rozvoje vědy se však tato nemoc ukázala být velmi plodnou. Lagrange se v Paříži stýkal s největšími francouzskými matematiky: d'Alembertem, Clairautem (1713–1765), Condorcetem (1743–1794), ale i mezi méně známými našel přátele na celý život. Sám prohlašoval vícekrát, že ten půlrok v Paříži byl nejšťastnějším obdobím v jeho životě.

Lagrange v Berlíně

V roce 1766 odjíždí Euler z Berlína do Petrohradu, čímž se uvolnilo místo ředitele fyzikálně-matematické třídy berlínské Akademie věd. Jako svého nástupce doporučuje Euler Friedrichovi II. Lagrangea. Tuto kandidaturu velmi podporoval i d'Alembert, na jehož mínění dal Friedrich II. ještě více. A tak Lagrange dostal pozvání s lichotivou motivací: „...je třeba, aby největší matematik Evropy žil v blízkosti největšího z králů". Pokud se jeho samotného týče, měl snad Friedrich pravdu, ale v době, kdy žili a pracovali Euler a d'Alembert, je Lagrangeovo ocenění přehnané. Zdá se, že tím chtěl Friedrich II. trochu oklamat vlastní ješitnost, když na ředitelské místo nedokázal získat d'Alemberta a s Eulerem se musel rozloučit. Nicméně bylo přijetí třicetiletého Lagrange na matematický Olymp zcela zasloužené. Byl to už vyzrálý matematik. Základy všeho, čím se měl v budoucnu zabývat, už byly položeny, jasným se stal i jeho pracovní styl, jeho silné i slabé stránky. Lagrange začal svou matematickou dráhu jako žák Eulerův a d'Alembertův v nejlepším smyslu tohoto slova. Pokračoval ve zkoumání jimi započatých úloh a dokázal v nich objevit nová východiska, neznámá jeho učitelům. Jejich nadšení je toho důkazem. Přitom se v Lagrangeově práci tvůrčím způsobem odráží tvůrčí činnost obou jeho učitelů: když si osvojil formulace úloh a tvrzení téměř uhodnutá geniální Eulerovou intuicí, dovádí je do dokonale jasné formy, precizuje potřebné pojmy a technické prostředky, což bylo příznačné spíše pro d'Alemberta. I později bude Lagrangeova síla nikoli jen v objevování nových cest, ale v překvapivé schopnosti prohloubit, vyjasnit a doplnit jedině možnými tahy obraz, který před ním započali jiní. A na této cestě pro něj neexistují žádné nepřekonatelné obtíže.

V listopadu roku 1766 se tedy Lagrange ujímá své funkce v Berlíně, i když jej sardinský král pouštěl nerad. Lagrange však přišel do berlínské Akademie věd v době ne pro ni nejlepší. Nebyli přítomni ani Euler ani d'Alembert ani Maupertuis. Zato zde pracoval významný matematik Lambert (1728–1777), který mj. dokázal iracionalitu čísla π. Lagrange a Lambert měli mnoho společného jak v matematice, tak i po čistě lidské stránce. Jejich přátelství trvalo deset let až do Lambertovy smrti a mělo pro oba velký význam. Uzavřený Lagrange si nesnadno zvykal na život na pruském dvoře. Na rozdíl od Eulera se mu to přece jen podařilo a dokázal se vyhnout konfliktům. Život Lagrangeův běží pravidelně – povinnosti, setkání, korespondence zaplňují převážnou část dne, ale večer po povinné procházce se cele věnuje vědě, v tichosti, za zavřenými dveřmi. Lagrange se oženil a při této příležitosti si vyměnili s d'Alembertem dopisy. d'Alembert: „Dověděl jsem se, že jste učinil nebezpečný krok. Velký matematik si musí především vypočítat své štěstí. A pochybuji, že by výsledkem těchto výpočtů bylo manželství". Lagrange: „Nevím, zda jsem počítal dobře nebo špatně – nebo přesněji – vůbec jsem nepočítal, neboť by to se mnou mohlo dopadnout jako s Leibnizem, který se ke sňatku nemohl odhodlat. Přiznávám, že jsem nikdy neměl velké sklony k manželství ... prostě bylo potřeba vyhovět jedné mé příbuzné; bylo třeba, aby se někdo o mne a o mé záležitosti staral. Ale dopadlo to tak, že se Lagrange brzy musel starat o svou ženu umírající na tuberkulózu a tuto svou povinnost zcela splnil.

„Analytická mechanika"

Lagrange strávil v Berlíně něco přes 20 let. Bylo to období zralosti, nejproduktivnější období jeho života. Je několik matematiků, kteří napsali jednu svoji „hlavní" knihu: Newton *Principia*, Huygens *Horologium oscillatorium* (*Kyvadlové hodiny*), Lagrange *Analytickou mechaniku*. Vyšla v r. 1788, když už byl Lagrange v Paříži. Ale obsáhla to hlavní, co udělal v Berlíně a rozmýšlel už v Turíně. Hlavní myšlenky knihy nejlépe vystihl sám její autor: „Existuje již několik učebnic mechaniky, ale plán tohoto díla je zcela nový. Teorii mechaniky a umění řešit její úlohy jsem chtěl založit na obecných vzorcích, jejichž jednoduché modifikace by daly všechny rovnice potřebné k řešení každé konkrétní úlohy. Doufám, že způsob, kterým jsem se toho snažil dosáhnout, je uspokojivý". „Toto dílo bude užitečné i z jiného hlediska: sjednotí a ukáže z jednotného obecného pohledu různé principy, dosud používané k řešení úloh mechaniky, ukáže jejich vzájemné souvislosti a oblasti jejich použitelnosti". O způsobu výkladu hovoří takto: „V tomto díle nejsou obrázky. Vyložené metody nevyžadují ani geometrické konstrukce, ani mechanické úvahy, vystačí pouze s algebraickými operacemi, prováděnými podle přesně určeného jednotného schématu. Milovníci analýzy s uspokojením zjistí, jak se mechanika stává její novou součástí a budou mi vděčni za toto rozšíření její oblasti působení."

Stručně řečeno, Lagrange chce ukázat, že mechanické úlohy lze řešit čistě analytickými prostředky, že je možné navrhnout „jednotná" (dnes bychom řekli algoritmická) pravidla pro řešení těchto úloh a že celou mechaniku lze založit na jednoduchých obecných principech. Nakolik je tento přístup originální? Vzpomeňme, že Euler jako první ve své *Mechanice* z r. 1736 upustil od čistě geometrických úvah Newtonových ve prospěch čistě analytických metod založených na zkoumání změn souřadnic a soustav diferenciálních rovnic. (Lagrange nazývá tuto knihu „první velkou prací, ve které byla ke studiu pohybu použita analýza".) Na druhé straně d'Alembert doprovází svou knihu *Dynamika* (1743) slovy: „V této knize jsem se snažil o dvě věci: rozšířit rámec mechaniky a její výklad udělat plynulým a přímým... — řečeno ještě stručněji — snažil jsem se rozšířit oblast použití principů a současně zmenšit jejich počet". Lagrange tuto knihu vysoce hodnotil: „... je v ní navržena přímá a obecná metoda, umožňující rozřešit nebo alespoň vyjádřit rovnicemi všechny úlohy mechaniky, které si lze představit."

V čem tedy spočívá Lagrangeův přínos? V tom, že dovedl do konce to, co načrtli jeho předchůdci, že přeměnil jejich skvělé studie v univerzální pracovní aparát. Svůj program si cení velmi skromně, v žádném případě se nesrovnává s Newtonem, „který měl to štěstí, že mu připadl úkol vysvětlit vesmírnou soustavu". Lagrange pečlivě rozebírá a vykládá na stránkách *Analytické mechaniky* dřívější práce z tohoto oboru. Stránky věnované historii jsou ozdobou knihy. Lagrangeovi však bylo vytýkáno, že do tohoto přehledu zařadil definice základních mechanických pojmů (síla, hmota aj.), které dostatečně nepropracoval.

Svůj popis mechaniky začíná tedy Lagrange přehledem toho, co udělali jiní. Mechanika se dělí na statiku a dynamiku. Výše jsme již mluvili o dvou základních zákonech statiky: o zákonu páky a o zákonu skládání pohybů. K nim se dále řadí princip virtuálních (možných) rychlostí (nazývaný dnes principem virtuálních posunutí nebo virtuálních prací), přisuzovaný Galileovi a rozpracovaný Stevinem, bratry Bernoulliovými a d'Alembertem. Tento princip říká, že v případě rovnováhy se anuluje práce všech sil při libovolných virtuálních nekonečně malých posunutích, tj. při posunutích, která jsou slučitelná s vazbami, jimž je daný mechanický systém podroben. Lagrange nejprve zapisuje tuto podmínku ve tvaru analytické rovnice a snaží se pak ukázat nejen efektivnost tohoto principu (to už dělali jiní), ale především jeho univerzálnost, postačitelnost pro vybudování celé statiky. „S mistrovstvím vlastním možná jen jemu a dosud nepřekonaným odvozuje Lagrange z tohoto obecného vzorce základní vlastnosti rovnovážného stavu a řeší nejdůležitější úkoly statiky" (A. N. Krylov).

V dynamice Lagrange využívá d'Alemberovu ideu o převedení dynamiky na statiku, kterou poněkud jiným způsobem rozvíjeli na konkrétních úlohách Hermann a Euler. Jde o to, že po oddělení sil, které nezpůsobují pohyb a kompenzují se reakcemi vazeb (d'Alembert hovořil o ztracených impulsech k pohybu), zbylé síly, k nimž je třeba počítat i tzv. inerciální síly, splňují podmínky rovnováhy. Tak dostává Lagrange ze základní rovnice statiky základní rovnici dynamiky. To je emocionální vrchol knihy. Cílem další části je pak ukázat, že ze základní rovnice (jediného vzorce) plyne celá mechanika.

Realizace tohoto plánu začíná v knize tím, že se ze základní rovnice odvodí všechny „principy mechaniky“: zákon zachování energie, zákon pohybu těžiště, zákon ploch. Vrcholem této části je pak odvození principu minimální akce. Lagrange chápe, že je možný i opačný postup — odvození základní rovnice z principu minimální akce, a je možné, že v dřívějších plánech analytické mechaniky chtěl užít právě tohoto, dnes běžného postupu. Dal však přednost prvnímu, možná z taktických důvodů: současníci nebyli připraveni na variační výklad mechaniky.

Dalším Lagrangeovým úkolem bylo naučit čtenáře pracovat se základní rovnicí. Nejdůležitější je správně uvážit vazby, kterým je soustava podrobena. Z toho důvodu je vhodné přejít od kartézských souřadnic k jakýmsi zobecněným souřadnicím, které už se mohou měnit nezávisle. Může to být např. úhel vychýlení kyvadla, „zeměpisná šířka a délka“ bodu pohybujícího se na kulové ploše, apod. Lagrange ukazuje, že pro libovolné nezávislé souřadnice se pohybová rovnice dá zapsat pomocí kinetické energie T a potenciální energie U, a dokonce k tomu stačí i jejich rozdíl $L = T - U$ — Lagrangeova funkce. Příslušné rovnice nyní nazýváme Lagrangeovými rovnicemi 2. druhu.

Rovnice 1. druhu se týkají případů, kdy vazby není možné nebo žádoucí zcela explicitně vyjádřit, tj. kdy zůstává několik rovnic svazujících souřadnice. Lagrange ukazuje, jak napsat pohybové rovnice pomocí vazbových rovnic, přičemž tyto rovnice obsahují veličiny, které lze velmi užitečně interpretovat jako reakce jednotlivých vazeb. Tak se poprvé objevily Lagrangeovy multiplikátory — patrně nejpopulárnější odkaz z jeho matematického dědictví (zmíníme se o nich ještě níže).

Zbylá část knihy je věnována realizaci tohoto obecného schématu pro důležité konkrétní úlohy: malé kmity, pohyb těles v gravitačním poli (převážně nebeská mechanika), pohyby vázané (kyvadla, pohyb tuhého tělesa).

Nebeská mechanika

Mezi několika typy mechanických úloh, jimiž se Lagrange zabýval, měly nespornou prioritu úlohy nebeské mechaniky. Taková byla stupnice hodnot v matematice 18. století: žádný velký matematik nemohl obejít úlohy související se vztahem mezi gravitačním zákonem a výsledky konkrétních astronomických pozorování. Viděli jsme, že se touto problematikou Lagrange začal zabývat už v Turíně a potom v ní intenzívně pokračoval v Berlíně. V okruhu jeho zájmů byly všechny základní problémy nebeské mechaniky. Rozpracovává techniku výpočtů prvků drah planet a komet na základě tří pozorování. A zase je tu jeden detail pro Lagrange typický: rozpracování metody není provázeno výpočtem žádné konkrétní dráhy. Vidí totiž svou úlohu pouze v řešení matematické úlohy a potom svou metodu předává výpočtářům: „Nezacházím do podrobností v naději, že každý trochu schopný výpočtář dokáže na kometu použít teorii vyloženou v této práci“. Vzniká dojem, že Lagrange výpočetní úlohy příliš nemiloval. Jeho metoda, protože nebyla ověřena v praxi, obsahovala přes svou hloubku slabá místa. Tato místa později odstranil Gauss (1777—1855), který neustále vypočítával dráhy a musel přitom spěchat, aby pozorovatelé stihli najít ztracený asteroid, nebo aby výpočty bylo možné použít na přímé sledování komety. A tak metoda, kterou v podstatě vymyslel Lagrange, nese jméno Gaussovo. Hlavní potíž (jak se ukázalo později) spočívala v tom, že k dostatečně přesnému určení pohybu nebeských těles je třeba vzít v úvahu vzájemné působení více těles. Na pohyb Měsíce má reálný vliv nejen Země, ale i Slunce, na pohybu Saturna a Jupitera se projeví i jejich vzájemné přitahování. Navíc srovnáváním výsledků pozorování počínaje dávnověkem se podařilo objevit stabilní odchylky od Keplerových zákonů – „poruchy". A bylo třeba vyjasnit, zda tyto „poruchy" jsou vysvětlitelné v rámci gravitačního zákona působením dalších těles. Pathos Newtonových *Principií* nebyl ani tak v tom, že odvodil z gravitačního zákona zákony Keplerovy, ale především v tom, že se mu podařilo vysvětlit některé „poruchy" v pohybu Měsíce. Od Newtona přejali štafetu Euler, Clairaut, d'Alembert. Ukázalo se, že objasnění „poruch" je problém velmi obtížný, a nezřídka začali zoufalí vědci pochybovat o univerzálnosti gravitačního zákona.

Bylo přirozené pokusit se o explicitní řešení úlohy tří těles popsáním pohybu trojice těles vzájemně na sebe působících podle gravitačního zákona. Poměrně brzy se ukázalo, že to asi není možné; nicméně Lagrange v práci z r. 1772 maximálně objasňuje celou situaci. Mistrně ukazuje, jak výchozí soustavy rovnic 18. řádu lze převést na soustavu 6. řádu, ale tvar této soustavy nedával žádou naději na konečný úspěch. A proto uvádí speciální případy, kdy tuto soustavu lze integrovat: jsou-li v počátečním okamžiku všechna tělesa na jedné přímce, anebo jsou-li ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka při současném splnění speciálních vztahů na další parametry. Lagrange uvažuje tyto případy „z čisté zvědavosti", ale později si na ně vědci vzpomněli, když se zjistilo, že každý z asteroidů Jupiterovy skupiny tvoří spolu s Jupiterem a Sluncem trojúhelník blízký k rovnostrannému.

Další možnost se nabízela v tom, že tělesa tvořící trojici bývají obvykle nerovnoprávná, a je proto přirozené uvažovat vzájemné působení dvou z nich a přidat poruchu způsobenou třetím. Lagrange začíná rozpracovávat systematickou teorii poruch, jejíž základy položili již jeho předchůdci. Přitom je přirozené uvažovat „porušenou dráhu" opět jako elipsu jen se změněnými parametry. Rozlišují se dva typy „poruch": periodické a sekulární. Periodické poruchy závisejí jen na poloze tělesa na dráze a s časem se v průměru kompenzují. Sekulární poruchy jsou způsobeny pouze vzájemnou polohou drah jako celku a mohou s časem narůstat a vést k nestabilitě sluneční soustavy. Zvláště to bylo největší příčinou neustálého zájmu o sekulární poruchy. Na druhé straně pro zkoumání poruch na krátkém časovém úseku (což je nezbytné v případě periodických poruch) nebylo ještě dostatek pozorování, zatímco pro studium sekulárních poruch bylo možné využít (i když nepřesných) pozorování učenců dávnověku. Periody poruch mohou být často několikanásobně větší než periody oběhu a dlouhoperiodické poruchy je možné zařadit mezi sekulární. Velmi důležité proto bylo naučit se tyto dva typy poruch rozlišovat.

Při studiu sekulárních poruch Lagrange porušil svoji zásadu a soustavně se obracel ke konkrétním číselným příkladům. Těmito otázkami se zabýval souběžně s mladším, ale již uznávaným Laplacem (1749–1827). Co do stylu práce se oba podstatně lišili. Pro Laplace byly orientačními body zcela konkrétní úlohy nebeské mechaniky a metoda byla pro něho jen prostředkem k dosažení konkrétních cílů. Nepřitahovala jej metoda sama o sobě, nějaké její vnitřní zdokonalování. A v práci nad blízkými problémy se projevily silné i slabé stránky obou těchto velkých vědců. Laplace ukázal, že v první aproximaci neexistují sekulární poruchy velkých poloos drah Jupitera a Saturna (tyto poruchy byly zařazeny mezi dlouhoperiodické s velkou periodou). Laplace byl přesvědčen o správnosti tohoto tvrzení i v případě všech ostatních planet, což by byl velký pokrok, i když by to ještě nebyl důkaz stability sluneční soustavy (neboť šlo pouze o hlavní části poruch 1. řádu). Laplace se snažil svou domněnku dokázat obecně, ale bez úspěchu, zatímco Lagrange pomocí své obecné metody obdržel důkaz „jedním tahem pera", jak se vyjádřil Jacobi.

A teď opačný příklad. Lagrange vyvinul velké úsilí ve snaze vysvětlit sekulární zrychlení průměrného pohybu Měsíce, objeveného v roce 1693 Halleyem (1656–1742), objevitelem mnoha tehdy známých „poruch". K tomu účelu se pokouší využít svůj oblíbený trik založený na tom, že Měsíc a Země nejsou dokonalé koule. Když tak vyčerpal všechny (jak se mu zdálo) myslitelné možnosti, dochází k závěru, že buď stará pozorování obsahují zásadní chyby, anebo je tento jev v rámci gravitačního zákona nevysvětlitelný. Zároveň vypracoval způsob, jak využít při studiu sekulárních poruch členy vyššího řádu, a zjistil, že v případě Jupitera a Saturna tyto členy nehrají roli. Toto zjištění extrapoloval na ostatní případy. Na druhé straně Laplace, který měl mnohem více výpočetních zkušeností, pochopil, že u měsíců může být situace jiná v důsledku jejich rychlé rotace. Nejdříve ukázal, že členy, které našel Lagrange, mají podstatný vliv na Jupiterovy měsíce, a když provedl stejné výpočty pro Měsíc, dostal Halleyovo zrychlení.

Plodné vědecké soupeření mezi Lagrangem a Laplacem nedospělo ke konfliktu jedině díky Lagrangeově taktu a sebeovládání. Ambiciózní Laplace k tomu často zadával příčinu svými neopodstatněnými požadavky a i nekorektním jednáním. Typický je příklad z r. 1774, kdy se Laplace v Paříži seznámil s Lagrangeovou prací o sekulárních poruchách ještě před tím, než byla publikována. Rychle postřehl další možnosti a uveřejnil svůj článek ještě před Lagrangeovým. V úvodu tohoto článku napsal: „Nezačal bych se tím zabývat, kdybych si předtím nepřečetl brilantní práci pana Lagrange, která byla zaslána do Akademie a má vyjít v následujících svazcích". Přidává další argumenty ve snaze odůvodnit svůj spěch: že chtěl co nejdříve seznámit veřejnost se všemi možnostmi Lagrangeovy metody, ale o jeho netaktnosti není pochyb. A Lagrange? Poděkoval Laplaceovi za zdokonalení své metody, neboť „tím může věda jedině získat". V roce 1779 Laplaceovi napsal: „Dívám se na spory jako na věc pro rozkvět vědy zcela neužitečnou, vedoucí jen ke ztrátě času a klidu ..." A tímto pravidlem se řídil po celý život.

Algebraické úvahy

Algebraickými rovnicemi a soustavami se Lagrange zabýval z různých hledisek. K některým problémům ho přivedlo jeho studium nebeské mechaniky. Zabýval se i přibližným výpočtem kořenů a jejich oddělením, vyloučením neznámých ze soustavy algebraických rovnic. Ale jedna z Lagrangeových prací znamenala začátek nové éry v algebře, jak se vyjádřil Cauchy.

V letech 1770–71 vyšla jeho práce *Úvahy o řešení rovnic* (*Réflexions sur la résolution des equations*), započatá ještě v Turínu. Je to ve skutečnosti úplná kniha o 200 stranách. Vedle *Analytické mechaniky* je to vrchol Lagrangeova díla, i když, jak se zdá, nebyla ve vědě patřičně doceněna. Byl to základ procesu, který vyvrcholil vznikem Galoisovy teorie.

V 16. století byly odvozeny vzorce pro řešení obecné rovnice 3. a 4. stupně a potom se po dvě staletí nedařilo najít vzorec pro řešení obecné rovnice 5. stupně. Objevily se další důležité úlohy, které matematiky odváděly od tohoto tajemného problému a přinášely jim uspokojení. Ale mnozí významní matematikové – mezi nimi Leibniz (1646 až 1716) a Euler – neztráceli naději. Všichni cítili, že umělé vyhledávání zvláštních formulí pro každý stupeň (jako tomu bylo dosud) není ta nejlepší cesta. Lépe by bylo najít jednotnou metodu, hodící se na všechny stupně, a pak se snad podaří ji použít i na rovnice vyšších stupňů. Tschirnhaus (1651–1708) sděluje svému příteli Leibnizovi, že se mu podařilo najít univerzální substituci, která převádí obecnou rovnici n-tého stupně na rovnici tvaru $y^n + a = 0$ (což je právě to, co je třeba k řešení rovnice v radikálech). Tato substituce dává známý vzorec pro $n = 3$ a hodí se i pro $n = 5$. Ale Leibniz musel svého přítele zarmoutit: při $n = 5$ je k nalezení koeficientů této substituce třeba řešit rovnici stupně vyššího než 5. Potom ještě Euler postřehl, že pro $n = 3, 4$ lze vzorec dostat pomocí substituce tvaru $x = \sqrt[n]{A} + \ldots + \sqrt[n]{F}$, ale dále již nepokročil.

Problém vyžadoval podstatně hlubší přístup, a kdo jiný by se do toho měl pustit než Lagrange. Vždyť právě on dovedl nepřekonatelným způsobem odhalit podstatu věci, najít společnou strukturu tam, kde druzí viděli jen rozrůzněné případy. Začíná studiem vzorců pro $n \leqq 4$ a věnuje zvláštní pozornost výrazům pod znakem n-té odmocniny. Pro rovnici 2. stupně $x^2 + ax + b = 0$ je to $\Delta = a^2/4 - b$, pro rovnici 3. stupně $x^3 + ax + b = 0$ je to $\Delta_\pm = -b/2 \pm \sqrt{[(b/2)^2 + (a/3)^3]}$ (přitom je $x = \sqrt[3]{\Delta_+} + \sqrt[3]{\Delta_-}$). Veličiny $\Delta_\pm$ jsou kořeny kvadratické rovnice, jejíž koeficienty se dají racionálně (tj. pomocí aritmetických operací) vyjádřit pomocí koeficientů původní rovnice. Lagrange se snaží vyjádřit $\Delta_\pm$ pomocí kořenů x_1, x_2, x_3 a ukazuje, že $\Delta = x_1 + x_2 \,.\, \varepsilon + x_3 \,.\, \varepsilon^2$, kde ε je kořen rovnice $\zeta^3 = 1$, různý od 1.

Dva kořeny $\varepsilon_\pm$ rovnice $y^3 = 1$ dávají tedy obě hodnoty $\Delta_\pm$. Ve skutečnosti nemůžeme kořeny x_1, x_2, x_3 rozlišit, ale ať je očíslujeme jakkoli, vždy bude funkce $\Delta(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2\varepsilon + x_3\varepsilon^2$ při všech možných permutacích kořenů (kterých je $3! = 6$) nabývat pouze dvou hodnot $\Delta_\pm$. To je podstatný Lagrangeův postřeh! Pro kvadratickou rovnici $\Delta = (x_1 - x_2)^2$ na pořadí kořenů vůbec nezáleží. V případě rovnice 4. stupně jsou pod znaménkem 4. odmocniny výrazy tvaru $x_1x_2 + x_3x_4$, kde x_j jsou kořeny, které při $4! = 24$ způsobech očíslování kořenů mohou nabývat pouze tří různých hodnot.

Snadno se ověří, že každá racionální funkce kořenů rovnice n-tého stupně. která nabývá nejvýše q hodnot při všech možných permutacích kořenů je kořenem rovnice q-tého stupně, jejíž koeficienty jsou racionálními funkcemi koeficientů původní rovnice. Tento fakt nazývá Lagrange „pravým principem", „metafyzikou rovnic 3. a 4. stupně". A právě proto se řešení kubické rovnice převádí na kvadratickou rovnici a bikvadratické na kubickou.

Ukazuje se tedy, že je třeba hledat racionální funkce kořenů, které nabývají $q < n$ hodnot při všech permutacích kořenů. Přitom ovšem působí velké potíže příliš rychlý růst $n!$ při rostoucím n. Především si všimněme, že koeficienty původní rovnice jsou racionálními funkcemi kořenů, které se při permutaci kořenů nemění vůbec $(q = 1)$, je ale třeba hledat méně triviální možnosti. Lagrange nazývá rezolventami výrazy $\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2\varepsilon + \ldots + x_n\varepsilon^{n-1}$, kde $\varepsilon \neq 1$ je n-tá odmocnina z 1. (Tyto výrazy se vyskytovaly ve vzorcích pro kvadratickou a kubickou rovnici. To, že se nevyskytují u rovnice bikvadratické, je možné přičíst tomu, že 4 není prvočíslo.) Dalo by se čekat, že se rezolventy vyskytnou i ve vzorcích pro rovnice vyšších stupňů. Výpočty však ukazují toto: funkce $\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nabývají při všech permutacích kořenů $(n - 1)!$ hodnot. Pro $n = 3$ je $(n - 1)! < n$. Jsou tedy všechny rezolventy Δ kořeny rovnice stupně $(n - 1)!$, jejíž koeficienty jsou racionální funkce koeficientů rovnice původní.

Toto tvrzení je možné pro prvočíselné n přeformulovat takto: Δ jsou kořeny rovnice stupně $(n - 1)$, jejíž koeficienty jsou kořeny rovnice stupně $(n - 2)!$ a koeficienty poslední rovnice jsou racionálními funkcemi koeficientů výchozí rovnice stupně n. Pro $n = 5$ jsou tedy Δ kořeny bikvadratické rovnice, jejíž koeficienty jsou kořeny rovnice 6. stupně. Nyní je pochopitelné, proč se objevovaly rovnice vyšších stupňů v konstrukcích Tschirnhausových a Bézoutových. Jaký z toho činí Lagrange závěr: „Odtud plyne, že je velmi nepravděpodobné, aby naše dosavadní metody mohly dát úplné řešení rovnice 5. stupně."

Dále je přirozené zkoumat, zda kromě rezolvent neexistují i jiné funkce kořenů, nabývající q hodnot, kde q není velké. Proto Lagrange zkoumá strukturu permutací, a tím fakticky vytváří základy teorie grup. Mnoho Lagrangeových tvrzení, vyjádříme-li je v moderní terminologii, přejde přímo ve věty z teorie grup.

Krize

Matematika byla jedinou Lagrangeovou vášní. Stačila mu zaplnit celý život, přinést mnoho radostných chvil. Vše ostatní bylo podřízeno jeho vědecké práci. Delambre nám popisuje Lagrangeův vztah k hudbě: „Mám ji rád, protože mne izoluje; slyším první tři takty, při čtvrtém již nic nerozlišuji, oddávám se vlastním úvahám, nic mne nevyrušuje, a tehdy řeším nejobtížnější problémy". Pro Lagrangea bylo typické, že velké cíle poznání pravdy a světové harmonie se u něj nespojovaly s osobními ambicemi, se snahou soutěžit a předehnat současníky. Když zjistil, že se někdo úspěšně zabývá problémem, nad nímž přemýšlel sám, okamžitě tento problém odložil s upřímným pocitem, že byl „zproštěn povinnosti". Díky tomu byl Lagrange neobyčejně duševně vyrovnaný, což mu dodávalo síly překonávat životní překážky a pokračovat v usilovné práci.

Jediné, co mohlo narušit jeho klid, byla ztráta perspektiv, nejistota při výběru správných cílů. Tento pocit se objevuje brzy po jeho příjezdu do Berlína. V roce 1772 píše d'Alembertovi: „Nezdá se Vám, že vyšší matematika se zčásti blíží k úpadku? Podepíráte ji pouze Vy a Euler". To píše vědec v rozkvětu sil (je mu 36 let), který připravuje svoji *Analytickou mechaniku* a kterému právě vyšla práce, která na 100 let předznamenala rozvoj algebry.

Tento výrok je třeba promyslet. Je samozřejmé, že Lagrange věděl, čím se zabývat po nejbližších 10–15 let, ale vzdálenější perspektivy se mu zdály pochybné. Možná, že se také projevily zvláštnosti jeho způsobu práce. Hlavní směry své činnosti si určil už v mládí, s jistou dávkou konzervatismu se jich držel a ne bez opodstatnění doufal, že se mu jeho plány v dohledné době podaří uskutečnit. Taková myšlenka o konci matematiky nemohla pravděpodobně vzniknout u Eulera, který po celý svůj dlouhý vědecký život nepřestal hledat stále nové a nové úlohy, přecházel od jedné úlohy k druhé a nebál se něco nechat nedořešené. Lagrange se nikdy nesrovnával s Eulerem a d'Alembertem. Typické je také, že záviděl některým svým současníkům jejich umění lehce nacházet nové úlohy, např. Mongeovi: „Ten čertovský Monge má stále plno nových smělých ideí", nebo „ten větroplach se svou teorií konstrukce ploch dosáhne nesmrtelnosti".

Pocit možného úpadku matematiky Lagrangea neopouští. 21. září 1781 opět píše d'Alembertovi: „Začínám pociťovat sílu své setrvačnosti, která se pomalu zvětšuje a nemohu s jistotou říci, že se ještě po nadcházející desetiletí budu zabývat matematikou. Zdá se mi také, že šachta je příliš hluboká, a bude nutné ji dříve či později opustit, nenajdou-li se nová rudná ložiska. Fyzika a chemie představují nyní mnohem oslnivější a lehčeji využitelné pokladnice. Všichni se podle všeho obrátili k těmto oborům a není vyloučeno, že s místy pro matematiku se jednou v Akademii věd stane totéž, co se nyní děje s katedrami arabštiny na univerzitách".

Vzbuzuje to v nás přirozené rozpaky. Pokud jde o analytickou mechaniku, pak se zamýšlené dílo blížilo k závěru. Avšak v algebře byl pouze vytvořen jazyk, získány první zkušební výsledky, zatímco sám program byl ještě velmi neurčitý a byly zde všechny předpoklady k dlouhodobé usilovné práci. Takové jsou však zákonitosti psychologie vědecké tvorby. Jeden člověk nemůže ujít po obtížné cestě nekonečnou vzdálenost. Byl potřebný takový výsledek, jakého dosáhl Gauss, který na příkladu potvrdil vysokou efektivnost práce s permutacemi kořenů*).

V Paříži

Lagrangeovy předtuchy se splnily. Když v r. 1787, brzy po smrti Friedricha II., přesídlil do Paříže, přestal se v podstatě matematikou zabývat. Bylo mu 51 let. V jednom roce (1783) svět ztratil Eulera a d'Alemberta. Lagrangeovi se dostalo nadšeného přijetí ve francouzských vědeckých kruzích. Teď již byl nepochybně největším matematikem Evropy, vážně mu mohl konkurovat jen Laplace. Lagrange je přátelsky přijat i u dvora. Snadno se odpoutává od matematiky ve prospěch filozofie, chemie, historie, medicíny. Doufal snad najít v jiné vědě nový život? Poměry v Paříži byly příznivé pro rozmanitou vědeckou činnost. Pracovaly zde vědecké kroužky, velmi populární byly kontakty mezi vědci různých oborů. Obzvláštní aktivitou se v tomto směru vyznačoval chemik Lavoisier (1743–1794). Lagrange stejně jako Laplace se účastnil Lavoisierových pokusů. Vědci se aktivně zabývali společenskými otázkami, úlohou vědy v životě státu.

*) Autor zde má zřejmě na mysli Gaussovu konstrukci speciálních pravidelných mnohoúhelníků (např. sedmnáctiúhelníku) pravítkem a kružítkem. Pozn. překl.

Lagrange matematiku neopustil: ještě stále vycházely jeho práce, stále ho zajímaly problémy druhých, v dalším se ještě zmíníme o jeho pedagogické činnosti, o originálních učebnicích, ale vrchol své vědecké činnosti měl již za sebou. Kromě toho se blížila doba, kdy většina francouzských vědců (kromě snad Laplace) přerušila svoji obvyklou práci.

Blížila se revoluce, v níž vědci sehráli aktivní úlohu. Nikdy předtím neměli takovou možnost bezprostředně ovlivňovat život země. Stávají se členy obecní rady, parlamentu, astronom Bailly se stává pařížským prefektem, matematik Lazar Carnot vede obranu Francie (říkalo se mu „organizátor vítězství"), Monge byl ministrem námořnictví. Velmi aktivně se vědci začali zabývat řešením praktických úkolů.

Lagrange zůstává stranou politického života. Zákon z roku 1793 nařizuje cizincům, aby opustili Francii, ale zvláštním dekretem Výboru pro veřejné blaho dostává Lagrange výjimku. V dobách nejtěžších neopouští Francii, sdílí osud svých kolegů. Svou účast v politice zaplatili životem Bailly a Condorcet, také Lavoisier byl popraven. Lagrange pozorně sleduje vše, co se děje kolem. Delambre nám zachoval jeho slova, která pronesl po Lavoisierově popravě: „Stačil moment, aby mu usekli hlavu, a možná nepostačí ani sta let, než se objeví podobná".

Jako vědec plní Lagrange odpovědně své úkoly. Zvětšil se počet různých komisí a orgánů, do nichž byli vědci povoláváni. Zabývá se otázkami řemeslných manufaktur, měřením délky na moři, odhaduje zásoby obilí a masa v zemi, aby objasnil možnost vzniku hladu. Píše práci, v níž spočítal explozívní sílu prachu v dělové hlavni (Za autorova života nebyla uveřejněna; že by to byla první práce označená jako tajná?)

Zvlášť aktivně pracovali vědci v Komisi měr a vah. Dodnes těžko chápeme, proč byla v době rozvratu a hladu věnována taková pozornost reformě soustavy měr a vah. Nepořádky v soustavě měr a vah byla objasňována mnohá neštěstí, s velkým patosem se mluvilo o tom, že nedokonalost soustavy měr a vah je prostředek k vykořisťování národa. Je tu snad ještě jeden důvod – problém soustavy měr a vah je problém mezinárodní – a zavedení účelné soustavy mohlo přispět ke zvýšení mezinárodní prestiže revoluce. Z tohoto důvodu bylo třeba zvolit takové jednotky, které by nebyly svázány s tradicemi jiného národa. Biskup Talleyrand, budoucí napoleonský diplomat, navrhl vzít za jednotku délky délku sekundového kyvadla (tj. kyvadla, které kývá s periodou 1 s). Zvítězil však návrh vzít za jednotku délky část zemského poledníku.

Práce na soustavě měr a vah byly pojaty velkoryse. Lavoisier a Gouy určili váhu vody, začalo se s geodetickými měřeními, na něž nebyl dostatek prostředků, bránily jim i vztahy se Španělskem a koneckonců i poměry na některých místech ve Francii. Ale revoluční Konvent spěchal se zavedením nové soustavy „na všechny časy, všem národům" (toto heslo bylo později vyryto na etalonu metru). Otázky metrické soustavy se probíraly za zasedáních Konventu v r. 1793 zároveň s nejostřejšími problémy. Komise byla obviňována z liknavosti a někteří členové z ní byli vyloučeni pro „nedostatek republikánského uvědomění a nenávisti k tyranům". Takové obvinění stačilo k tomu, aby se člověk dostal pod gilotinu.

Lagrangeovy povinnosti v komisi nebyly jen teoretického charakteru. Zabýval se výběrem základu nové soustavy a navrhl za základ prvočíslo 11. Považoval totiž za důležité, aby se některý díl základní jednotky nezměnil během času v samostatnou jednotku. Nakonec se komise rozhodla pro desítkovou soustavu.

Na čas uzavřená Akademie věd byla obnovena pod jménem Institut de France a Lagrange stojí v čele fyzikálně-matematického oddělení.

Pedagogická činnost

Revoluční Francie věnovala v bouřlivých a na změny bohatých letech 1793–95 velkou pozornost reformě vzdělávací soustavy. „Po chlebu je vzdělání nejdůležitější potřebou lidu", říkal Danton. O vzdělání národa se přemýšlelo ne méně než o zásobování chlebem. Je založena Ecole normale pro přípravu učitelů a Ecole polytechnique pro přípravu vojenských inženýrů. Lagrange, přestože předtím nikdy nevyučoval, přednáší na obou těchto školách. Zájem, se kterým promýšlí obsah svých přednášek, je pro něj novým impulsem ke kritickému přezkoumání současné matematiky, jejích základních pojmů a vztahů mezi různými oblastmi. Na základě přednášek vznikly knihy *Théorie des fonctions analytiques* (1797) a *Leçons sur le calcul des fonctions* (1801). V první z nich se poprvé objevila jeho známá metoda pro nalezení vázaných extrémů: při hledání maxima a minima nějaké funkce $f(x, y)$ více proměnných nutně vzniká úloha najít extrém této funkce při nějaké podmínce omezující proměnné x, y, např. $\varphi(x, y) = 0$. Úloha o extrémech funkce jedné proměnné na intervalu se redukuje na srovnání jejích hodnot na kraji a ve stacionárních bodech uvnitř intervalu. V případě funkcí více proměnných v oblasti D je třeba porovnat hodnoty ve vnitřních stacionárních bodech a hodnoty na hranici oblasti D. Tato hranice však není dvoubodová a dostáváme se k úloze o vázaném extrému na hranici.

Lagrange ukazuje, že tato úloha se redukuje na určení takových čísel λ, že funkce $f + \lambda\varphi$ má pro $\varphi = 0$ stacionární body. Dostáváme soustavu rovnic pro určení bodů x, y a čísel λ. Analogicky se vše provádí v případě funkcí libovolného počtu proměnných i vazeb. Tato metoda Lagrangeových multilpikátorů vznikla na základě Lagrangeových prací o mechanických soustavách s vazbami. V aplikacích mohou mít tyto multiplikátory konkrétní (např. fyzikální) interpretaci. Dnes je oblast použití této Lagrangeovy myšlenky mnohem širší. Jejím zobecněním je např. lineární programování, přičemž v ekonomických aplikacích se dají Lagrangeovy multiplikátory interpretovat v termínech cen.

Poslední léta

Za Direktoria a Konzulátu se Lagrangeovo postavení ještě upevnilo. V době císařství se stává hrabětem, senátorem, nositelem řádu Čestné legie. Napoleon nebyl k matematice lhostejný, a proto chápal, co pro něho Lagrange znamená. Běžné povinnosti císaře mu neponechávaly mnoho času, aby se více staral o pomoc vědě. Omezil se na rozdávání vyznamenání a stručné charakteristiky je doprovázející, které byly určeny přímo pro historii. Lagrange byl charakterizován jako „Cheopsova pyramida vědy".

10. dubna 1813 Lagrange umírá. Delambre vzpomíná, s jakým obdivuhodným smířením očekával svoji poslední hodinu. „... pochopil jsem, že umírám; mé tělo postupně slábne, duševní i fyzické schopnosti pohasínají; zvědavě sleduji, jak mi postupně

ubývá sil, a dojdu na konec bez lítosti, beze smutku, neboť sestup je velmi povlovný ... Nechoval jsem k nikomu zlobu, nikomu jsem také nic zlého neudělal, a nyní chci svou cestu ukončit ..."

Ve své bouřlivé době dokázal Lagrange žít vyrovnaným životem. Současníkům dělalo potíže, aby si vzpomněli na detaily, které by nám jej mohly přiblížit. Nevykládaly se o něm anekdoty jako o Laplaceovi. A. N. Krylov poznamenává, že příhoda s obědem u opata Nolleta (vylíčená výše) je snad jediná v Lagrangeově životě. Vzpomínali si, jak Lagrange pomohl zlepšit Lambertovu situaci v Berlíně, že se nebál v r. 1793 postavit za Delambrea, kterého chtěli vyloučit z Komise měr a vah, že se dojemně staral o Poissona, když byl jeho žákem v Ecole polytechnique, jak uměl obdivuhodně vyslechnout společníka. Někdy se objeví malý, ale výrazný rys: celá jeho bytost jako by byla naplněna tichou ironií.

A nečekaně právě tento skromný člověk se stal vzorem velkého vědce a člověka, a to nejen pro matematiky. J. W. Goethe napsal: „Matematik je dokonalý jen natolik, nakolik je dokonalým člověkem, nakolik v sobě cítí to krásné, které je vlastní pravdě; jenom tehdy je jeho práce důkladná, čistá, jasná, oduševnělá, skutečně dokonalá. A toto všechno je zapotřebí, aby se podobal Lagrangeovi". Nebo na jiném místě: „Lagrange byl bezúhonným člověkem, a právě v tom je jeho velikost. Jestliže bezúhonný člověk je obdařen talentem, stává se bohatstvím lidstva, nositelem štěstí a ušlechtilosti, ať je to umělec, přírodozpytec, básník nebo kdokoli".

Mnohé je obsaženo i ve slovech Fourierových: „Lagrange byl stejně filozofem jako matematikem. Dokázal to celým svým životem, střídmostí nároků na pozemské dary, hlubokou oddaností obecným zájmům lidstva, šlechetnou prostotou svých návyků, vznešeností své duše a hlubokou spravedlivostí při oceňování svých současníků".

Na Eulera a Lagrangea se nyní díváme jako na největší matematiky 18. století, učitele a žáka, jejichž nadání se podivuhodným způsobem doplňovala. Euler, snažící se dohlédnout co možná nejdál, mluvit o věcech, pro něž ještě nebyl vytvořen adekvátní jazyk, zanechal potomkům úlohy, které budou na dlouhou dobu orientačními body. A na druhé straně Lagrange, ve všem se snažící dobrat do podstaty věci, usilující o vytvoření obrazu bez bílých míst, předat pokolením jazyk a metody, které po dlouhou dobu umožní řešení nových úloh.

Přeložil Jiří Kopáček

Aristotelova fyzika zvučí většinou jen termíny logickými .... Ať nikoho nemýlí, že v knihách o živočiších (de animalibus) a o problématech (de problematibus) a v jiných svých rozpravách často se zabývá experimenty. On dospěl k svým závěrům již předem; neradí se řádně se zkušeností, jak by měl, při stavbě svých rozhodnutí a axiómů; ale rozhodnuv nejprve otázku podle své vůle, uchyluje se teprv potom ke zkušenosti a zkroutiv ji, aby se srovnávala s jeho dobrým zdáním, vodí ji kolkolem jako zajatce. Proto je žaloba proti němu daleko důvodnější než proti moderním jeho následovatelům — filozofům scholastickým, kteří vůbec spustili se zkušenosti.

Největší však překážka a poblouzení rozumu lidského pochází ze ztupělosti a nedostatečnosti i šalby smyslů, takže to, co se dotýká smyslů, nabývá vrchu nad tím, co se smyslu bezprostředně nedotýká, byť i by to bylo závažnější. Ustává tedy bádání skoro zároveň se smyslovým vnímáním, takže věci neviditelné jsou zkoumány jen málo nebo nejsou zkoumány vůbec.