Zbyněk Nádeník

Náměty k středoškolské geometrii (Geometrické nerovnosti)

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 19 (1974), No. 6, 324--329

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/138425`

Náměty k středoškolské geometrii*)

(Geometrické nerovnosti)

Zbyněk Nádeník, Praha

Profesor university v Torontu Harold S. M. COXETER začíná úvod k své učebnici *Introduction to Geometry* (New York—London 1961, 2. vyd. 1972, ruský překlad Moskva 1966) doslova takto: „V posledních 30—40 letech ztratilo mnoho Američanů zájem o geometrii. Tato kniha představuje pokus oživit tento předmět, který je v trapném zanedbávání." Autoři předmluvy k ruskému vydání — B. A. ROZENFELD a I. M. JAGLOM — píší, že Coxeterova slova o ztrátě zájmu vůči geometrii platí i v Sovětském svazu.

U nás je tradičně velký sklon ke geometrii. Ale konvexní útvary a geometrické nerovnosti jsou v něm jaksi na okraji. To není radostné ze dvou důvodů. Předně — je mnoho nových proudů v geometrii, které patří konvexním útvarům a geometrickým nerovnostem anebo z teorie konvexních těles aspoň vycházejí. Za všecky uveďme třeba kombinatorickou geometrii, kterou zformoval se svými spolupracovníky asi před dvaceti lety známý švýcarský matematik H. HADWIGER. Za druhé — nemálo z těchto novějších směrů a z teorie konvexních útvarů vůbec lze vyložit už středoškolákům. Kdyby pro nic jiného, tak už jen pro tuto příhodnou okolnost by si konvexní útvary a příbuzné obory zasloužily větší zájem. Někdy se mi zdá, že pro nás není tato oblast geometrie dosti abstraktní — vždyť se v ní dá dokonce všecko nakreslit. Rovněž mi někdy připadá, že nám není tato oblast dosti obecná — vždyť se skoro nevzdálí z euklidovské roviny nebo prostoru. Ostatně zaslouží si vůbec tyto geometrické partie pozornosti matematiků, když mnoho „problémů" z těchto geometrických disciplín lze vyložit i středoškolákovi, který nemá žádné speciální matematické školení?

To jsou stanoviska, která vznikají též z nedorozumění, když se pro velkou přístupnost tyto partie považují za triviální. Ale kdo se přece jen trochu s nimi seznámí, záhy zjistí něco jiného. I v rovině má jejich problematika daleko k prostinkosti a v prostoru už často jde o otázky, které si vynutily mnoho soustředěného úsilí anebo které takovému úsilí dokonce vzdorují. Zmíněný už H. Hadwiger o tom napsal v úvodu ke své knize *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie* (Berlin 1957): „Omezení na elementární předměty nezaručuje, že všecky projednávané otázky lze zodpovědět, jak budeme nakloněni předpokládat, jestliže elementární ukvapeně zaměníme za triviální. Je to dokonce zvláštní pozoruhodnost matematiky, že navzdory nejmodernějšímu stavu mnoha jejích velmi rozvinutých teorií se stále objevují zcela elementární otázky, vůči nimž stojíme zrovna tak bezradně jako před půl stoletím. Tato skutečnost neznamená nikterak nedostatek naší vědy, znamená naopak pramen nevysychajícího bohatství."

*) Článek vznikl z autorovy přednášky na konferenci matematické pedagogické sekce JČSMF v Pardubicích v prosinci 1973.

Bylo a je mnoho vynikajících matematiků, kteří se nerozpakovali zabývat se i jednoduchými úlohami z elementární geometrie. Za všecky alespoň jeden nedávný příklad – VAN DER WAERDEN, který má v našem povědomí hodně daleko k elementární geometrii. Jeden chemik ho podnítil k důkazu, že pětiúhelník se stejnými stranami a stejnými úhly je nutně rovinný. Van der Waerden napsal o tom v roce 1970 článek, v němž analyzuje psychologii matematického myšlení.*)

Dějiny konvexních útvarů a geometrických nerovností sahají až do mytologie k tyrské princezně DÍDÓ jako zakladatelce Kartága. Přesto má i dnešní jejich teorie v sobě mnoho životnosti. Navíc je v ní něco, čím by mohla vyhrávat: Je názorná a z velké části srozumitelná už středoškolákům, kteří si v ní mohou brzy ověřovat vlastní samostatné pokusy. Nezáleží vůbec na tom, že budou objevovat objevené. Důležité je, že se mohou učit, jak objevovat. Z tohoto hlediska napsali znamenitou knížku moskevští autoři I. M. JAGLOM a V. G. BOLTJANSKIJ: *Vypuklyje figury* (Moskva – Leningrad 1951, německý překlad Berlin 1956). Sestavili v ní sbírku téměř 150 příkladů – od jednoduchých k obtížnějším; doprovodili je přiměřeným výkladem z teorie konvexních útvarů; vzájemně motivovali jejich vznik, takže čtenář je přímo veden, jak z jedné úlohy odvíjet další; opatřili je podrobnými řešeními, často s různými modifikacemi. Ještě v rukopisu probrali autoři všecky úlohy v matematickém proseminář pro první ročník na moskevské universitě anebo v matematickém žákovském kroužku, který má při Lomonosovově universitě dlouhou tradici. Autoři v předmluvě píší, že ve všech případech studenti a žáci na úlohy stačili.

Podobný charakter má knížka D. O. ŠKLJARSKÉHO - N. N. ČENCOVA - I. M. JAGLOMA: *Geometričeskije něravěnstva i zadači na maksimum i minimum* (Moskva 1970). Je to sbírka úloh s úplnými řešeními, mnohdy i v několika variacích. Výňatek z knížky zpracoval Z. MATOUŠEK v článku „*Erdösova-Mordellova nerovnost*" v časopisu Matematika a fyzika ve škole [4 (1973), 27 – 33].

Protějškem je publikace holandského geometra O. BOTTEMY a čtyř bělehradských autorů R. Ž. DJORDJEVIĆE, R. R. JANIĆE, D. S. MITRINOVIĆE a P. M. VASIĆE: *Geometric Inequalities* (Groningen 1969). D. S. Mitrinović je autor posledního ze tří významných pokusů o shrnutí a klasifikaci nerovností. První podnikla trojice G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD a G. PÓLYA v roce 1934 (*Inequalities*, 2. vyd. 1952), druhý E. BECKENBACH a R. BELLMAN v roce 1961 (rovněž „*Inequalities*") a třetí daleko nejrozsáhlejší je od D. S. Mitrinoviće z roku 1970 (*Analytic Inequalities*). Můžeme tedy D. S. Mitrinoviće právem považovat za předního specialistu. Se třemi bělehradskými spolupracovníky vydal srbochorvatsky knížku *Geometrijske nejednakosti* (Beograd 1966), kterou o tři roky později spolu s O. Bottemou rozšířili v kolekci téměř 400 nerovností s množstvím literárních odkazů. Z nich

do let	18. st.	19. st.	1900–9	1910–19	1920–29	1930–39	1940–49	1950–59	1960–
patří prací	1	12	4	4	17	50	38	98	217

Tendence je tedy zřejmá.

*) Srovnej *Poznámku k metaolympiádě*, Pokroky *18* (1973), 219–221.

S geometrickými nerovnostmi pracoval už Euklides, když v „Základech“ psal, že součet dvou stran v trojúhelníku je větší než strana třetí. Po starořeckých geometrech je dlouhá staletí prázdno. Teprve Galileův žák E. TORRICELLI vnáší do elementární geometrie nové myšlenky a s nimi i návrat ke geometrickým nerovnostem. Okolo roku 1640 vydal knihu *De maximis et minimis*, v níž řeší úlohu, kterou označujeme jeho jménem: V trojúhelníku nalézt bod, který má od jeho vrcholů nejmenší součet vzdáleností.

Není nezajímavé sledovat další vývoj geometrických nerovností anebo alespoň náběhů k nim. Zmíním se však pouze o jediném odkazu na práci z 18. století v Bottemově-Mitrinovićově knížce. Citace se vztahuje k Eulerovu vzorci z roku 1767, podle něhož pro vzdálenost d středů kružnice trojúhelníku opsané a vepsané s poloměry R a r platí

$$d^2 = R(R - 2r)\,. \tag{1}$$

H. WIELEITNER v *Geschichte der Mathematik* (2. díl Berlin—Leipzig 1923) se zmiňuje, že Angličan W. CHAPPLE uveřejnil vzorec (1) už v roce 1746.

Je vůbec možné ještě po dvou stech letech působit na současnou problematiku elementární geometrie?*)

Už v minulém století vypisovala maďarská matematická a fyzikální společnost studentské soutěže. V ní jako sedmnáctiletý poznamenal L. FEJÉR (později matematik světové proslulosti; pěkně na něho vzpomíná G. PÓLYA v článku *Matematikové, které jsem znal*, přetištěném v překladu v předloňských Pokrocích), že z (1) plyne

$$R \geqq 2r \tag{2}$$

s rovností právě jen pro rovnostranný trojúhelník, neboť právě jen při něm splývají středy kružnice opsané a vepsané.

L. Fejér nadhodil později i otázku, jak přenést nerovnost (2) do prostoru. Její řešení mu sdělil v roce 1943 mladý maďarský matematik I. ÁDÁM, který byl pak deportován do Německa, kde po něm mizí každá stopa. Ádámův důkaz se snadno přizpůsobí dimenzi. V rovině pro trojúhelník $A_1A_2A_3$ vypadá takto (viz obr. 1): Středy B_1, B_2, B_3

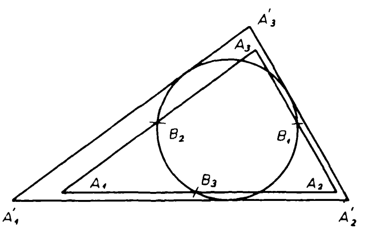
*) V přednášce v bratislavské pobočce JSMF v říjnu 1973 jsem se pokusil ukázat takové působení s odstupem doby tří významných matematiků — K. Borsuka (*1905), D. Hilberta a L. Eulera. K. Havlíček, který zápis přednášky v lednu 1974 četl, mě laskavě upozornil na jiný markantnější rys Eulerova vlivu po dvou stoletích. Díky Havlíčkově ochotě mohu připojit tyto jeho řádky:

„Když L. Euler koncem svého života zavedl do kombinatoriky tzv. latinské čtverce, narazil i na obtížné problémy, které se mu nepodařilo vyřešit. Nejznámější je tu úloha o šestatřiceti důstojnících: seřadit do čtverce 36 důstojníků po šesti ze šesti různých pluků a šesti hodností tak, aby v každé řadě a v každém zástupu každí dva důstojníci byli z různých pluků a různých hodností. Teprve G. Tarry v letech 1900 a 1901 dokázal, že podmínkám této úlohy nelze vyhovět čili že je neřešitelná. Až do třicátých let našeho století byla literatura o latinských čtvercích velmi chudá. Mezitím se latinské čtverce uplatnily při studiu základů geometrie a zásluhou R. A. Fischera i v matematické statistice při plánování pokusů v rostlinné výrobě. Dnes známe jejich uplatnění i v jiných oblastech života. Bohatý rozvoj teorie latinských čtverců nastal vlastně teprve po druhé světové válce vlivem samočinných počítačů. L. Euler otevřel tedy problematiku, která díky moderní technice přináší ovoce až dnes.“

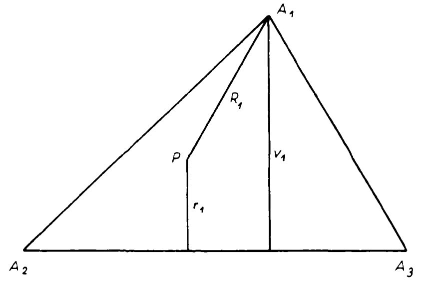
stran A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 tvoří opět trojúhelník, jehož opsaná kružnice má poloměr $\frac{1}{2}R$. Sestrojme trojúhelník $A_1'A_2'A_3'$, který je přímo homotetický s trojúhelníkem $A_1A_2A_3$ a který má za kružnici vepsanou právě kružnici opsanou trojúhelníku $B_1B_2B_3$. Protože

$$\text{troj. } A_1A_2A_3 \subset \text{troj. } A_1'A_2'A_3' , \tag{3}$$

platí mezi poloměry r a $\frac{1}{2}R$ kružnic jim vepsaných vztah $r \leqq \frac{1}{2}R$ s rovností právě jen tehdy, když trojúhelníky z (3) splynou. K tomu dojde tehdy a jen tehdy, když kružnice opsaná trojúhelníku $B_1B_2B_3$ je kružnicí vepsanou trojúhelníku $A_1A_2A_3$, což charakterizuje rovnostranný trojúhelník $A_1A_2A_3$.



Obr. 1.



Obr. 2.

Ádámův výsledek říká, že pro poloměry R a r koulí čtyřstěnu opsané a vepsané platí

$$R \geqq 3r \tag{4}$$

s rovností právě jen pro pravidelný tetraedr. L. Fejes Tóth – dnes velmi známý maďarský geometr – přednášel v roce 1946 ve Fejérově semináři, jak se nerovnost (2) přenese na konvexní mnohoúhelník a nerovnost (4) na konvexní mnohostěn. Znamenají-li s, h, v počty jeho stěn, hran a vrcholů, je

$$R : r \geqq \operatorname{tg} \frac{\pi s}{2h} \operatorname{tg} \frac{\pi v}{2h} \tag{5}$$

a extrémní případy jsou právě jen pravidelné polyedry. Z Eulerovy relace $s - h + v = 2$ plyne snadno $\pi s/2h < \frac{1}{2}\pi$, $\pi v/2h < \frac{1}{2}\pi$. Speciálně pro čtyřstěn je $s = v = 4$, $h = 6$ a z (5) vychází opět (4). Fejes Tóthovy důkazy jsou však už středoškolákům nepřístupné.

Zůstaňme proto jen u trojúhelníka $A_1A_2A_3$. Lze nerovnost (2) zlepšit? Označme R_i vzdálenosti jeho vrcholů A_i od libovolného jeho bodu P. V roce 1935 uveřejnil M. Schreiber jako úlohu nerovnost

$$\tfrac{1}{3}(R_1 + R_2 + R_3) \geqq 2r . \tag{6}$$

Sám ji též dokázal s tím, že rovností je v ní charakterizován rovnostranný trojúhelník s bodem P ve středu. Splyne-li bod P se středem opsané kružnice, přejde Schreiberova nerovnost v Eulerovu-Fejérovu nerovnost (2).

Označme r_1 vzdálenost bodu P od strany A_2A_3 a cycl. V roce 1935 vyslovil P. Erdös, dnes rovněž velmi známý maďarský matematik, domněnku, že

$$R_1 + R_2 + R_3 \geqq 2(r_1 + r_2 + r_3) \tag{7}$$

s rovností právě jen pro rovnostranný trojúhelník a bod P v jeho středu. Ještě v témže roce ji v maďarském časopisu Matematikai Lapok ověřil anglický odborník v geometrické teorii čísel L. J. Mordell. Dnes je známa celá řada různých důkazů, vesměs přístupných středoškolákům. Několik jich uvádí Z. Matoušek v citovaném článku. Švýcarský gymnasiální profesor L. Leuenberger napsal v Elemente der Mathematik [*17* (1962), 16], že „dnes už má učitel matematiky dvě jednoduchá odůvodnění Erdösovy věty, která jsou srozumitelná středoškolákovi již v nižších třídách a která působí radost, jak si autor sám vyzkoušel".

Z Erdösovy-Mordellovy nerovnosti plyne snadno Schreiberova nerovnost. Položíme-li $a_1 = A_2A_3$ a cycl. a označíme-li obsah našeho trojúhelníka třeba F a výšku z vrcholu A_1 třeba v_1 a cycl., je $2F = a_1v_1 = a_2v_2 = a_3v_3 = (a_1 + a_2 + a_3)\,r$, takže máme známý vztah

$$1/r = 1/v_1 + 1/v_2 + 1/v_3\,. \tag{8}$$

Mezi třemi pozitivními čísly x, y, z platí nerovnosti

$$\tfrac{1}{3}(x + y + z) \geqq (xyz)^{1/3} \geqq 3(1/x + 1/y + 1/z)^{-1}$$

se znameními rovnosti právě jen tehdy, když $x = y = z$. Nerovnost vlevo je známá relace mezi aritmetickým a geometrickým průměrem. Píšeme-li v ní $1/x$, $1/y$, $1/z$ místo x, y, z, dostaneme nerovnost napravo. Vzhledem k (8) je tedy

$$\tfrac{1}{3}(v_1 + v_2 + v_3) \geqq 3(1/r)^{-1}\,, \quad \text{tj.} \quad v_1 + v_2 + v_3 \geqq 9r \tag{9}$$

s rovností právě jen tehdy, když $v_1 = v_2 = v_3$. Samozřejmě $R_1 + r_1 \geqq v_1$ (viz obr. 2); k rovnosti dochází právě jen pro bod P ve výšce z vrcholu A_1. Analogicky $R_2 + r_2 \geqq v_2$, $R_3 + r_3 \geqq v_3$, a proto

$$R_1 + R_2 + R_3 + r_1 + r_2 + r_3 \geqq v_1 + v_2 + v_3 \tag{10}$$

s rovností právě jen pro bod P v ortocentru našeho trojúhelníka. Užijeme-li Erdösovy-Mordellovy nerovnosti a nerovnosti (9), dostaneme z (10)

$$R_1 + R_2 + R_3 + \tfrac{1}{2}(R_1 + R_2 + R_3) \geqq 9r\,, \tag{11}$$

kde rovnost platí právě jen tehdy, když současně a) jsou si rovny výšky, b) bod P je v ortocentru, c) trojúhelník je rovnostranný a bod P v jeho středu. a) a b) je ovšem obsaženo v c), a (11) tak dává Schreiberovu nerovnost.

V konvexním mnohoúhelníku $A_1 \ldots A_n$ označme vzdálenosti libovolného jeho bodu P od vrcholu A_1 a strany A_1A_2 třeba R_1 a r_1 (a cycl.). L. Fejes Tóth v roce 1948 opět jako domněnku uvedl nerovnost

$$R_1 + \ldots + R_n \geqq \left(\cos \frac{\pi}{n}\right)^{-1} (r_1 + \ldots + r_n) .$$

Pro $n = 4$ ji ověřil v roce 1957 Rakušan A. FLORIAN pomocí známého kritéria pro pozitivní definitnost kvadratické formy. Ale lze to udělat zcela elementárně bez tak silného prostředku. Zatím se však nezdařil přímý důkaz pro obecné n. Švýcar H. LENHARD verifikoval v roce 1962 Fejes Tóthovu domněnku metodou nepřímého důkazu, který se existenční částí zcela vymyká středoškolské látce.

Prostorovou analogii (4) k nerovnosti (2) už známe. Také Schreiberova nerovnost (6) má takový protějšek. Maďarský matematik J. BERKES si v roce 1967 všiml, že z Fejes Tóthova vzorce $n!\, V \geqq (n + 1)^{(n+1)/2}\, n^{n/2} r^n$ pro objem V a poloměr r vepsané koule simplexu $A_1 \ldots A_{n+1}$ v E_n a z nerovnosti $R_1 + \ldots + R_{n+1} \geqq (n + 1)^{(n-1)/2n} / (n!)^{1/n}$ . . $n^{1/2} V^{1/n}$, kterou pro vzdálenosti $R_1 = PA_1$ (a cycl.) libovolného bodu P simplexu od jeho vrcholů odvodili v roce 1955 C. M. PETTY a D. WATERMAN, spojením pro simplex v E_n plyne

$$\frac{1}{n + 1} (R_1 + \ldots + R_{n+1}) \geqq nr . \tag{12}$$

Jak je to s prostorovou analogií Erdösovy-Mordellovy nerovnosti (7)? Označme r_1 vzdálenost bodu P_1 simplexu $A_1 \ldots A_{n+1}$ od jeho stěny $A_2 \ldots A_{n+1}$ (a cycl.). Podle vzoru prostorového tvaru (12) Schreiberovy nerovnosti bychom asi očekávali, že $R_1 + \ldots + R_{n+1} \geqq n(r_1 + \ldots + r_{n+1})$. Ale tu dochází k překvapení. Americký matematik D. K. KAZARINOFF dokázal – jeho důkaz publikoval až po jeho smrti jeho syn v roce 1957 – že pro čtyřstěn $A_1A_2A_3A_4$ je

$$(R_1 + R_2 + R_3 + R_4) : (r_1 + r_2 + r_3 + r_4) > 2\sqrt{2} \tag{13}$$

a poměr vlevo lze učinit libovolně blízkým k $2\sqrt{2}$. Představme si, že náš čtyřstěn má výšku A_1A_4 o délce v a základnu $A_1A_2A_3$ v pravoúhlém trojúhelníku s odvěsnami $A_1A_2 = A_1A_3 = 1$. Zvolíme-li bod P v půlicím bodě přepony A_2A_3, snadno se přesvědčíme, že $R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = \frac{3}{2}\sqrt{2} + \sqrt{(\frac{1}{2} + v^2)}$; $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 1$. Pro v dostatečně blízké nule je podíl vlevo v (13) vskutku libovolně blízký k $2\sqrt{2}$. Kazarinoffův důkaz je bohužel příliš složitý. Analogie Erdösovy-Mordellovy nerovnosti pro simplex v E_n při $n > 3$ dokonce dosud známá není.

Zhruba můžeme říci: Nerovnosti pro trojúhelník jsou středoškolákům velmi dobře přístupné. O nerovnostech pro mnohoúhelník a čtyřstěn to už platí jen zcela částečně. Nerovnosti pro simplex jsou zatím jen málo probádaným polem.

Co jsem takto naznačil, byla ukázka, jak z jednoduché věci – v našem případě z Eulerovy relace (1) – lze odvíjet netradiční problematiku přístupnou už gymnazistům. Geometrie může živým způsobem seznámit žáky s nerovnostmi a připravit je tak na práci i v jiných oborech matematiky.