Jiří Hořejš

O vztahu formy a obsahu v matematice a logice. I

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 10 (1965), No. 6, 325--338

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138336

O VZTAHU FORMY A OBSAHU V MATEMATICE A LOGICE I

JIŘÍ HOŘEJŠ, Brno

Tento článek by chtěl ukázat úlohu a smysl formalizace (matematických) teorií a tím informovat jednak o některých hlavních výsledcích klasické matematické logiky, jednak o některých poměrně nových tendencích, které se pod názvem „mechanické matematiky" začínají ve stále větší míře uplatňovat v současné matematické logice.

Vedle předběžných historických a heuristických úvah (§ 1) je poněkud detailněji vysvětlena obecná struktura nejobvyklejších formálních systémů a jejich obecný význam (§ 2). Dále jsou uvedeny nejdůležitější příklady formálních systémů: výrokový (§ 3) a predikátový počet (§ 4)*) a aritmetika (§ 5)*). V rámci těchto příkladů je citováno několik fundamentálních vět matematické logiky a ukázány hlavní myšlenky mechanistického pojetí některých aspektů práce v matematice. Je nasnadě, že velký obsahový rozsah článku mu vtiskuje přehledný charakter; čtenář proto nemůže očekávat detailní a zcela precizní definice a důkazy. Bylo však snahou autora uvést aspoň některé jejich rysy.

§ 1

1.1 Čtenář zná celou řadu matematických teorií. Ví, že velmi často se jedny opírají o druhé (klasická analýza o teorii reálných čísel, ta zase např. v pojetí Dedekindově o aritmetiku ap.) a že jen některé z nich sestupují v této vzájemné návaznosti až k „pramenům", tj. až k pojmům a metodám, které se zdají být všeobecně známé a názorné. Většina posledních teorií pak končí — nebo, chcete-li, začíná — u pojmu přirozeného čísla (i když nemíníme, a to nejen z důvodů ateistických, propagovat známé rčení o tom, že přirozená čísla nám dal bůh, zatímco ostatní je výmysl lidí, charakterisuje tento výrok dost výstižně řadu běžně budovaných matematických disciplín) nebo u ještě obecnějšího a fundamentálnějšího pojmu množiny. Byla to především teorie množin, která měla sloužit jako základní kámen schopný svou obecností i průhledností unést celou budovu matematiky. Avšak přes zdánlivou jednoduchost se právě v této teorii vyskytly myšlenkové konstrukce, které při ničím neohraničeném užívání metod jí vlastních vedly k důsledkům nejen velice nenázorným (paradoxní rozklad koule a jiné překvapivé důsledky axiomu výběru — viz např. [K_1]), ale přímo sporným.

K jednomu z nejznámějších sporů tohoto druhu vede např. pojem množiny C všech množin, která by — kdyby existovala, což původní (tzv. naivní) koncepce teorie množin nikterak nemohla

*) V druhé části článku, která vyjde v příštím ročníku Pokroků a naváže na článek P. HÁJKA „Syntaktické metody matematické logiky".

vyloučit — musela podle své definice obsahovat jako podmnožinu systém 2^C všech svých podmnožin, takže mohutnost množiny 2^C by nemohla převyšovat mohutnost množiny C, což je ve sporu s jinými partiemi teorie.

1.2 Otázkou, jak omezit přípustné prostředky teorie množin, abychom ji zbavili sporů a na druhé straně abychom ji příliš neochudili, se zabývá matematika dosud. A problémů podobného charakteru je dost i v jiných důležitých disciplínách. Vzniká tak přirozená otázka, jaké jsou to vůbec prostředky, které jsou opravdu tak bezvýhradně názorné a průhledné, aby skýtaly záruku, že při jejich užití nedojdeme k paradoxům či přímo ke sporům. Dá se předpokládat a zkušenost ukazuje, že nedovolené výsledky nevzniknou tam, kde vyšetřujeme pouze konečné objekty a kde i užité prostředky jsou *finitní*, tzn. takové, při nichž nekonečno (např. posloupnost přirozených čísel) se připouští pouze v *potenciální* formě (je možno postupně uvažovat stále větší a větší přirozená čísla), nikoliv však ve formě *aktuální* (je zakázáno manipulovat s pojmem nekonečné množiny jako hotového celku). Metody tohoto druhu jsou skutečně až na samé hranici jednoduchosti a nedůvěřovat jim by prakticky znamenalo vzdát se jakýchkoliv metod vůbec. Může se ovšem z druhé strany zdát být problematické, zdali takovéto elementární metody mohou přispět k řešení nějakých netriviálních otázek.

1.3 Nesporný význam těch nejjednodušších metod prokázal HILBERT ([H]) svou finitistickou formální koncepcí metamatematiky. Jeho základní myšlenka je prostá: zabýváme-li se nějakou matematickou teorií, musíme užít jistého jazyka (běžného, či v té či oné míře využívajícího zkracující symboliky). Zápisy tohoto jazyka, odpovídající myšlenkovým konstrukcím (tvrzením, důkazům, definicím atd.) dané teorie, jsou — vzato zcela formálně — konečné posloupnosti písmen nějaké abecedy (obvykle běžné, rozšířené o speciální matematické symboly). Je-li popisující jazyk vhodně zvolen, je možno vystopovat, které formální procesy s písmeny odpovídají kterým matematickým obratům. Pak je možno nejen do jisté míry nahrazovat obsahovou práci v dané teorii (např. dokazování vět) formální „hrou" s písmeny podle daných pravidel, nýbrž — a o to šlo původně Hilbertovi především — je možno vyšetřovat vlastnosti dané teorie jako celku v tzv. *metateorii*, která má po takto provedené formalizaci za objekt svého výzkumu právě ty nejjednodušší útvary — konečné posloupnosti symbolů, nad nimiž se provádějí jednoduché operace kombinatorického charakteru a která sama se má omezovat také na finitní prostředky.

Brzy byly sestrojeny jazyky, v nichž bylo možno pohodlně zapsat prakticky všechny důležité teorie; všechny jejich matematické pojmy i procesy usuzování se redukovaly poměrně přehledným způsobem na tvoření a zpracovávání konečných zápisů. Byly formulovány a někdy i řešeny hlavní problémy metateorie celé řady speciálních matematických, resp. logických teorií. Hlavní otázkou metateorie přitom podle Hilberta bylo prokázání (syntaktické) bezespornosti vyšetřované teorie; jak vypadá formální definice bezespornosti je zřejmé, obsahuje-li jazyk popisující danou teorii záporku „ne" (a tak tomu — jak poznáme později — je prakticky u všech teorií): teorie je bezesporná, nevyskytnou-li se v množině zápisů jejich tvrzení současně dvojice zápisů „A" a „ne A", kde A označuje zcela libovolnou kombinaci písmen (všimněme si, že ten, kdo vyšetřuje pouze bezespornost teorie, se nemusí vůbec starat o význam těchto tvrzení).

Základní Hilbertova myšlenka – nahradit zkoumání *sémantiky* (tj. obsahové, významové stránky) teorie vyšetřováním její *syntaxe* (tj. formální struktury zápisů vět, důkazů, ... v nějakém jazyce) a teprve výsledky těchto úvah opět sémanticky *interpretovat* – se ukázala velmi plodnou, a to nejen z hlediska metateoretického, ale, jak jsme toho svědky právě v současnosti, i z hlediska práce v samotných teoriích. Dokonce se zdá, že právě této druhé variantě užití formalizace patří budoucnost; v oblasti metateorie, jak ukážeme dále, formalizace naopak nesplnila celou řadu svých úkolů.

§ 2

2.1 Vlastním úvahám o formálních systémech předešleme vysvětlení několika dalších termínů, které hrají v současné matematické logice důležitou roli. Funkci (obecně libovolného typu) nazveme *vyčíslitelnou*, jestliže předpis přiřazující argumentu funkční hodnotu je *efektivní*, tzn. existuje-li *algoritmus* umožňující skutečně stanovit k danému zvolenému argumentu příslušnou funkční hodnotu.

Příkladem funkcí, jejichž vyčíslitelnost je zřejmá, jsou funkce zadané jednoduchými vzorci. Klasickým příkladem funkce, jejíž vyčíslitelnost neumíme prokázat, je funkce f přiřazující každému přirozenému číslu $n \geqq 1$ nulu nebo jednotku podle toho, zda v dekadickém rozvoji čísla π (nebo jiného, jehož rozvoj není do té míry znám) se vedle sebe vyskytuje nebo nevyskytuje n nul za sebou. Je zřejmě $f(1) = 0$ a ani stanovení několika dalších hodnot by nečinilo potíží. Kolik je však obecně $f(n)$, nevíme. Konečně známe funkce, o nichž lze přímo dokázat, že vyčíslitelné nejsou. Takový důkaz vyžaduje však precizace pojmu vyčíslitelnosti, o níž se zmíníme dále.

Všechny zmíněné pojmy (vyčíslitelnosti, efektivnosti, algoritmu) lze zpřesnit rozmanitými způsoby. Celá řada jich byla popsána v literatuře [viz K, U, H_1] a všechny se ukázaly být ekvivalentní. Pro naše účely není detailní precizace nutná; stačí, když budeme chápat jako vyčíslitelné právě ty funkce, k jejichž výpočtu je možno sestavit program, psaný pro nějaký univerzální číslicový počítač s dostatečně velkou (potenciálně nekonečnou) pamětí, který po zadání argumentu příslušnou funkční hodnotu vždy po *konečném* počtu kroků práce počítače stanoví.

V teoriích vyšetřujících precizovaný pojem vyčíslitelných funkcí (jde např. o teorii Turingových automatů nebo o ekvivalentní teorii rekurzívních funkcí) se obvykle vyšetřují pouze aritmetické funkce (typu $N \to N$, kde $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$); vhodným kódováním se však tohoto omezujícího předpokladu můžeme zbavit. Ve zmíněných teoriích se také dokazuje induktivní struktura třídy všech takových funkcí: ukazuje se, že tato třída je plně charakterizována několika výchozími jednoduchými funkcemi (funkce součtu, součinu apod.) a několika operacemi (substituce, rekurze, tzv. operace minima ap.), vzhledem k nimž je uzavřena. Tento fakt umožňuje dokazovat indukcí celou řadu vlastností vyčíslitelných funkcí: ukáže se, že danou vlastnost mají výchozí a že se neztrácí aplikací vyjmenovaných operací.

Uvažme nyní libovolnou pevnou množinu P; množinu $R \subset P$ nazveme *rozhodnutelnou*, existuje-li vyčíslitelná funkce $f : P \to N$ taková, že $f(x) = 0$, právě když $x \in R$ (to jest v podstatě, můžeme-li efektivně rozhodnout, zda $x \in P$ patří do R či do $P - R$). Množinu $R \subset P$ nazveme *generovatelnou*, existuje-li vyčíslitelná funkce $f : N \to R$ taková, že $R = f(N)$ (tzn. můžeme-li efektivním způsobem generovat, vypisovat postupně jednotlivé prvky množiny R: $f(0), f(1), f(2), \ldots$). Je-li sama množina P generovatelná – a to bude vždy náš případ –, plyne z rozhodnutelnosti množiny R její generovatelnost: generujeme postupně prvky P, o každém rozhodneme, je-li v R či ne; je-li, ponecháme ho v posloupnosti, jinak ho vyškrtneme; výsledkem bude tvořící se posloupnost prvků množiny R. Vzhledem k tomu, že R může být i nekonečná, nemusí však obráceně z generovatelnosti plynout rozhodnutelnost: generujeme-li R tak, že $x \in P$ nepřišlo ještě na řadu, nemůžeme rozhodnout, zda $x \in R$ či $x \in P - R$ a nastal-li druhý případ, pak – pouze na základě předpokládané generovatelnosti R – se to nedovíme po konečném počtu kroků vůbec. Všimněme si konečně, že každá konečná P je rozhodnutelná: příslušný algoritmus může sestávat z pouhého seznamu jejích prvků.

2.2 Mějme na mysli nějakou sémanticky zadanou teorii. Označme písmenem $\mathscr{F}$ množinu všech jejích smysluplných (i když ne nutně pravdivých) projevů a písmenem $\mathscr{T}$ množin všech jejích tvrzení („vět“ v matematickém smyslu); zřejmě je $\mathscr{T} \subset \mathscr{F}$. Hledání vhodného odpovídajícího formálního systému je ulehčeno vždy, kdykoliv uvažovaná teorie má ustálenou vhodnou symboliku (symboly teorie jsou prvky dané množiny $\mathscr{S}$) a je-li vypracováno nějaké její axiomatické zadání (s množinou postulátů $\mathscr{A}$). Je-li zadáno obojí, pak se formalizace provádí obvykle tak, že se formálně navíc zachytí i usuzovací obraty $\mathscr{O}$, na které se obvykle v matematických úvahách ani explicitně neukazuje, ale které tvoří jejich logickou kostru; jde o způsob odvozování závěrů z daných předpokladů, kterého si blíže všimneme v následujících dvou paragrafech.

Popíšeme nyní budování vlastního formálního systému. Definice příslušných pojmů je možno podat ryze syntakticky a neodvolávat se na obsahovou stránku věci. Je třeba, aby si čtenář tuto možnost uvědomil; na druhé straně je však vhodné, aby bylo vidět, co budou jednotlivé syntaktické pojmy znamenat v sémantické interpretaci, k vůli níž se konec konců celá formalizace dělá. Proto budeme v následujícím odstavci postupovat tak, že interpretaci udáme pouze nepřímo, volbou vhodných metateoretických názvů a volbou označení, které si čtenář sám snadno porovná s označením tohoto odstavce.

2.3 Práci na formálním systému začínáme zadáním konečné množiny nějakých navzájem dobře rozlišitelných symbolů, tzv. *abecedy* $\mathbf{S}$. V množině všech *výrazů*, tj. konečných posloupností symbolů z $\mathbf{S}$, definujeme podmnožinu $\mathbf{F}$ všech *formulí*. Požaduje se, aby $\mathbf{F}$ byla rozhodnutelná. Konečně je třeba definovat množinu $\mathbf{T}$, $\mathbf{T} \subset \mathbf{F}$, všech *odvoditelných* (též *dokazatelných*) *formulí*. Po této množině nelze – jak bude patrné z §§ 4,5 – obecně požadovat rozhodnutelnost; $\mathbf{T}$ však musí být generovatelná.

Nejobvyklejší způsob definice množiny $\mathbf{T}$ (který zaručuje její generovatelnost, jak si čtenář jistě sám rozmyslí) je tento:

1. definují se jistá *odvozovací pravidla* $\mathbf{O}$ (v konečném počtu); každé z nich vede efektivně od několika formulí předepsaného tvaru (označme je $X_1, \ldots, X_n$) k jedné výsledné (označme ji Y). Pravidlo zapíšeme ve tvaru $X_1, \ldots, X_n \vdash Y$(předpokládáme, že metamatematický symbol „ ⊢" nepatří do abecedy $\mathbf{S}$). K libovolné množině formulí $\mathbf{G}$, $\mathbf{G} \subset \mathbf{F}$, přiřadíme nyní množinu $\mathbf{O}(\mathbf{G})$ jako nejmenší množinu obsahující $\mathbf{G}$ uzavřenou vzhledem k operacím $\mathbf{O}$, tedy takovou, která obsahuje formuli Y právě tehdy, když $Y \in \mathbf{G}$ nebo když obsahuje formule $X_1, \ldots, X_n$ a mezi odvozovacími pravidly je pravidlo tvaru $X_1, \ldots, X_n \vdash Y$.

2. definuje se rozhodnutelná množina *axiomů* $\mathbf{A}$ a položí se $\mathbf{T} = \mathbf{O}(\mathbf{A})$.

Náš popis formálního systému byl zatím velmi obecný, žádná z uvažovaných množin nebyla blíže specifikována. Přesto však je možno již uvést řadu vlastností zavedených pojmů a zejména pak definovat nejdůležitější metamatematické pojmy. Tak např. platí vztahy

(i) $\mathbf{G} \subset \mathbf{O}(\mathbf{G})$,
(ii) z $\mathbf{G} \subset \mathbf{H}$ plyne $\mathbf{O}(\mathbf{G}) \subset \mathbf{O}(\mathbf{H})$,
(iii) $\mathbf{O}(\mathbf{O}(\mathbf{G})) = \mathbf{O}(\mathbf{G})$

aj., ukazující uzávěrové (v topologickém smyslu) vlastnosti odvozovacích pravidel.

Při zavedeném označení je možno místo (iii) psát

$$\text{(i)}\quad O(T) = T,$$

čili, jak se někdy říká, T je *deduktivně uzavřená* množina. Množiny s touto vlastností bývají často nazývány *teoriemi* v užším slova smyslu. Poněvadž zde jsme si vyhradili mimoděk termín „teorie" pro označení běžné sémanticky pojaté teorie, nebudeme ho zde v jiném smyslu užívat.

Velmi důležitá a na první pohled zřejmá je tato vlastnost odvozovacích pravidel: $Z \in \mathbf{O}(\mathbf{G})$ právě když existuje konečná posloupnost formulí $Z_1, \ldots, Z_k$ takových, že (i) $Z = Z_k$ (ii) pro všechna i, Z_i je buď prvkem $\mathbf{G}$, nebo pro vhodná $j_1, \ldots, j_s < i$ je $Z_{j_1}, \ldots, Z_{j_s} \vdash Z_i$ (tzn. vzniklo z předchozích aplikací některého odv. pravidla). Posloupnost $Z_1, \ldots, Z_k$ pak nazýváme *formálním důkazem* (*odvozením*) formule Z z *množiny formulí* $\mathbf{G}$.

Metamatematiku zajímají otázky dvojího druhu. Jednak je to vztah mezi danou teorií a jí formalizujícím systémem (tedy vztah mezi danou sémantikou a navrhovaným syntaktickým protějškem), jednak ryze syntaktické vlastnosti formálního systému samého (ovšem takové, které jsou motivovány – ale nic víc než motivovány – sémantickou stránkou, tj. interpretací). Otázky druhého druhu náležející metateorii v tom užším smyslu, jak o tom byla řeč již v předchozím paragrafu, úvahy o nich jsou finitního charakteru a pojmově (i když ne vždy technicky) průhledné. Naproti tomu vyšetřovat vztah mezi syntaxí a sémantikou vyžaduje samozřejmě přijmout při nejmenším prostředky uvažované sémantické teorie a ty ovšem zdaleka nemusejí být finitní.

Je třeba podotknout, že řada matematiků považuje za přípustné i v metateorii užívat libovolných metod a že někdy teprve při tomto pojetí je možno řešit i přeložené otázky syntaxe samé (viz otázka syntaktické bezespornosti formální aritmetiky diskutovaná níže).

Uveďme několik definic. Vztah mezi syntaxí a sémantikou charakterizují zejména následující dva pojmy:

Formální systém je *sémanticky bezesporný*, jestliže $\mathscr{T} \supset \mathbf{T}$, tj. jestliže každá dokazatelná formule formálního systému je tvrzením teorie.

Formální systém je *sémanticky úplný*, jestliže $\mathscr{T} \subset \mathbf{T}$, tj. jestliže každé tvrzení teorie je dokazatelné ve formálním systému.

Při těchto formulacích předpokládáme totožnost množin $\mathscr{F}$ a $\mathbf{F}$, tj. nediskutujeme hlouběji otázku rozdílu mezi věcí (např. výrokem) a jejím zápisem v uvažovaném jazyce (např. formulí). V konkrétních případech dále je tento vztah vyjasněn tím, že je udáno, jak obsahově chápat, tj. jak interpretovat předkládané formální zápisy.

Výlučně na půdě syntaxe stojí následující dva pojmy:

Formální systém je *syntakticky bezesporný*, jestliže $\mathbf{T} \neq \mathbf{F}$ (jestliže v něm není dokazatelné „všechno" — motivaci této definice poznáme v následujícím paragrafu).

Formální systém je *syntakticky úplný*, jestliže pro $\alpha \in \mathbf{F}$, $\alpha \notin \mathbf{T}$ je vždy $\mathbf{O}(\mathbf{T} \cup \cup \{\alpha\}) = \mathbf{F}$ (jestliže není možno doplnit množinu dokazatelných formulí, aniž by vznikl již systém syntakticky sporný).

V následujících třech odstavcích podáme příklady formalizovaných systémů, a to tak, že vždy nejprve popíšeme sémanticky teorii, kterou budeme potom budovat syntakticky s udáním správné interpretace. Současně se vždy zmíníme o metamatematických výsledcích a uvedeme další metamatematické pojmy.

První dva příklady (§§ 3,4) se nezabývají žádnou speciální matematickou teorií, ale mnohem obecnější strukturou usuzování, aplikovatelnou i na nematematické myšlenkové procesy. Jde o tzv. výrokový a predikátový počet, z nichž druhý (který je rozšířením prvého) postihuje způsob odvozování nových poznatků z předpokládaných a je tak obvyklou součástí matematických teorií. Jediný, zato však dostatečně typický a důležitý příklad matematické teorie — aritmetiky — je probrán v posledním paragrafu.

§ 3

3.1 Sémantické zadání výrokového počtu.

Výrokem rozumíme jakýkoliv projev, o němž má smysl prohlásit, že je pravdivý (p) či nepravdivý (n), jemuž je tedy možno přisoudit jednu ze dvou *pravdivostních hodnot* (p, n). Uvažme nějakou (pro konkrétnost, řekněme, spočetně nekonečnou) množinu M výroků; prvky množiny M budem nazývat *atomární výroky*. O jejich obsah se nebudeme zajímat; zato z nich budeme tvořit další výroky opakovaným užitím následujících *výrokových spojek*: a, nebo, jestliže ... pak, ne. Množinu všech takto získaných výroků označme $\mathscr{F}_V$.

Všechny uvedené spojky zde chápeme *extenzionálně*, tj. tak, že pravdivostní hodnota výsledného výroku závisí výhradně na pravdivostních hodnotách atomárních výroků, z nichž je sestaven (a nikoliv na jejich obsahovém smyslu). U spojek „a" a „nebo" je toto pojetí běžné (podotkněme jen, že „nebo" nebereme ve smyslu vylučovacím, takže např. výrok: „$1 + 1 = 2$ nebo $1 + 2 = 3$" je při obvyklém posouzení pravdivostních hodnot výroků „$1 + 1 = 2$" a „$1 + 2 = 3$" pravdivý). Avšak ani u další spojky nepožadujeme žádnou obsahovou souvislost, považujíce souvětí „jestliže X, pak Y" za nepravdivé, právě když Y je nepravdivé, zatímco X je pravdivé (tuto konvenci lze podpořit i pro neobvyklé kombinace pravdivostních hodnot výroků X, Y citací některých obratů hovorového jazyka; tak např. výrok „jestli $2 . 2 = 5$, pak jsem blázen" považujeme za pravdivý, přestože oba jeho atomární výroky doufejme považuje čtenář za nepravdivé). Zbývající spojka je chápána jistě správně. Detailnější informace o sémantické výstavbě výrokového počtu nalezne čtenář např. v [Z].

Všimněme si ještě nutnosti užívat závorek při tvoření komplikovanějších výroků: např. „(Vltava protéká Prahou nebo Dunaj Vídní) a Labe Brnem" je výrok nepravdivý, zatímco „Vltava protéká Prahou nebo (Dunaj Vídní a Labe Brnem)" je pravdivý.

Existují výroky, které jsou pravdivé pouze z titulu své výrokové struktury, na základě toho, jak a jakými výrokovými spojkami jsou utvořeny z atomárních. Takovéto výroky – pravdivé bez ohledu na to, jaké pravdivostní hodnoty jsou přisuzovány atomárním výrokům, z nichž se skládají – má smysl považovat za tvrzení výrokového počtu a popsat je je základní úlohou této teorie; místo „tvrzení" se jim však říká obvykle *tautologie*; jejich množinu označíme $\mathscr{T}_V$.

Příkladem tautologie je výrok „jestliže P, pak P" nebo složitější „jestliže P a ne P, pak Q" (čili: ze sporu plyne cokoliv); nejsložitější příklad, který uvedeme, bude výrok X obsahující tři atomární výroky: „jestliže (jestliže P, pak R), pak [jestliže (jestliže Q, pak R), pak (jestliže (P nebo Q), pak R)]". Čtenář se sám může přesvědčit, že všech 2^3 možností, jak rozložit pravdivostní hodnoty u atomárních výroků, vede k pravdivosti výroku X.

Na příklad je-li P, R pravdivý, kdežto Q nepravdivý výrok, je postupně: „jestliže P, pak R" pravdivý, „jestliže Q, pak R" nepravdivý, „P nebo Q" pravdivý, „jestliže (P nebo Q), pak R" pravdivý, „jestliže (jestliže Q, pak R), pak (jestliže (P nebo Q), pak R)" pravdivý a konečně celý výrok také pravdivý (srv. 3. řádek tabulky na str. 332).

Úvahy tohoto typu je možno pohodlně zachytit v tzv. *pravdivostní tabulce* zachycující závislost pravdivostních hodnot jednotlivých částí výroku na hodnotách výroků atomárních.

Všimněme si, že možnost konečným počtem kroků rozhodnout, zda v posledním sloupci tabulky jsou samá p a zda je tedy předložený výrok tautologií nebo ne, činí množinu $\mathscr{T}_V$ rozhodnutelnou.

P	Q	R	jestliže P, pak R	jestliže Q, pak R	P nebo Q	jestliže (P nebo Q), pak R	jestliže (jestliže Q, pak R), pak (jestliže (P nebo Q), pak R)	X
p	p	p	p	p	p	p	p	p
p	p	n	n	n	p	n	p	p
p	n	p	p	p	p	p	p	p
p	n	n	n	p	p	n	n	p
n	p	p	p	p	p	p	p	p
n	p	n	p	n	p	n	p	p
n	n	p	p	p	n	p	p	p
n	n	n	p	p	n	p	p	p

3.2 *Syntaktická výstavba výrokového počtu (klasický formální systém).* Definujeme:

Abeceda $\mathbf{S}_V = \{\vee, \wedge, \rightarrow, \sim, P, Q, R, ', (,)\}$ (v interpretaci po řadě: nebo, a, jestliže ..., pak, ne; atomární výroky budou značeny výrazy: P, Q, R, P', Q', R', P'' atd.; do abecedy je dále nutno zahrnout závorky).

Množina formulí $\mathbf{F}_V$: (i) do $\mathbf{F}_V$ patří všechny atomární výrazy: $P, Q, R, P', Q', \ldots$, (ii) jestliže $X, Y \in \mathbf{F}_V$, pak do $\mathbf{F}_V$ patří též: $(X) \vee (Y)$, $(X) \wedge (Y)$, $(X) \rightarrow (Y)$, $\sim (X)$, (iii) jiné výrazy než ty, které byly definovány v předchozích bodech, do $\mathbf{F}_V$ nepatří. $\mathbf{F}_V$ je zjevně rozhodnutelná; např. je vidět, že „$(P) \vee (\sim (Q))$" patří do $\mathbf{F}_V$, „$((P \rightarrow \rightarrow \vee)$" nikoliv.

Dvě poznámky: 1. Symboly X, Y nepatří na rozdíl od symbolů P, Q ... do abecedy systému; jsou to metateoretická označení libovolných již utvořených formulí. 2. V předložené induktivní definici není možné obecně vynechat žádnou z uvedených závorek; je však možno vypouštět některé závorky u konkrétních formulí na zásadě rozmanitých konvencí; dohodneme-li se např., že v posloupnosti symbolů $\sim, \wedge, \vee, \rightarrow$ „váže" každý silněji než následující a použijeme-li dalších konvencí známých z algebry, je možno např. místo $(P) \rightarrow ((Q) \rightarrow ((P) \wedge (Q)))$ psát jednoduše $P \rightarrow (Q \rightarrow P \wedge Q)$ v tom smyslu, že poslední metateoretický výraz určuje jednoznačně původní. Pro přehlednost budeme v dalším těchto konvencí někdy užívat.

Množina axiomů $\mathbf{A}_V$: (1) $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$, (2) $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R))$, (3) $P \rightarrow (Q \rightarrow P \wedge Q)$, (4) $P \wedge Q \rightarrow P$, (5) $P \wedge Q \rightarrow Q$, (6) $P \rightarrow P \vee Q$, (7) $Q \rightarrow P \vee Q$, (8) $(P \rightarrow R) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \vee Q \rightarrow R)$, (9) $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((P \rightarrow \sim Q) \rightarrow \sim P)$, (10) $\sim \sim P \rightarrow P$.

Množina axiomů je zde tedy konečná, a tedy triviálně rozhodnutelná. (Doporučujeme čtenáři, aby si některé z těchto formulí interpretoval sémanticky; jednoduché k pochopení jsou axiomy (4)–(7); axiom (2) vyjadřuje „tranzitivitu" implikace a podobně je možno interpretovat i axiomy zbývající. Sémantiky si všimneme trochu ještě v dalším.)

Odvozovací pravidla $\mathbf{O}_V$: 1. pravidlo *modus ponens*: $X, X \to Y \vdash Y$. 2. Pravidlo *substituce*: $X(A_1, \ldots, A_n) \vdash X(X_1, \ldots, X_n)$, kde výraz na levé straně označuje formuli sestavenou z atomárních výrazů $A_1, \ldots, A_n$, kdežto výraz na pravé straně označuje formuli vzniklou z předchozí nahrazením výrazu A_1 (všude kde se v uvažované formuli vyskytuje) nějakou formulí X_1, výrazu A_2 formulí $X_2, \ldots$, výrazu A_n formulí X_n.

Samozřejmě položíme konečně $\mathbf{T}_V = \mathbf{O}_V(\mathbf{A}_V)$. Tím je výstavba formálního systému ukončena. Aplikací odvozovacích pravidel na množinu axiomů získáváme řadu formulí; bude účelné, aby měl čtenář o tomto procesu konkrétnější představu ještě dříve, než přejdeme k otázkám metamatematickým. Ukážeme, že např. „$P \to P$" patří do $\mathbf{T}_V$, a to tak, že uvedeme formální důkaz této formule z množiny axiomů $\mathbf{A}_V$; jednotlivé členy důkazové posloupnosti píšeme pod sebe:

Z_1: $P \to (Q \to P)$	axiom 1
Z_2: $P \to (P \to P)$	pravidlo substituce aplikované na Z_1 (Q je nahrazeno P)
Z_3: $(P \to Q) \to ((P \to (Q \to R)) \to (P \to R))$	axiom 2
Z_4: $(P \to (P \to P)) \to ((P \to ((P \to P) \to P)) \to (P \to P))$	pravidlo substituce aplikované na Z_3 (Q je nahrazeno $P \to P$, R je nahrazeno P)
Z_5: $(P \to ((P \to P) \to P)) \to (P \to P)$	pravidlo modus ponens aplikované na Z_2 a Z_4
Z_6: $P \to ((P \to P) \to P)$	pravidlo substituce aplikované na Z_1 (Q je nahrazeno $P \to P$)
$Z_7 = Z$: $P \to P$	pravidlo modus ponens aplikované na Z_6 a Z_5

Jak je vidět, formální odvozování i jednoduchých formulí je v našem systému dost pracné; to mu však neubírá na teoretické ceně.

Sémantickou bezespornost, $\mathbf{T}_V \subset \mathcal{T}_V$, lze dokázat bez obtíží; předně lze přímým způsobem sestrojením pravdivostních tabulek prověřit, že každý z axiomů 1–10 je tautologie, když všechny symboly $\vee, \wedge, \ldots, P, \ldots$ interpretujeme tak, jak bylo naznačeno na počátku odstavce (pro axiom 8 jsme to udělali v předchozím odstavci). Užitím pravidla substituce se tautologičnost dané formule zřejmě neporuší; jsou-li konečně X a $X \to Y$ tautologie, musí být tautologií i Y; kdyby totiž pro jistou volbu pravdivostních hodnot atomárních výroků byla pravdivostní hodnota v posledním sloupci pro Y rovna n, zatímco pro X, které je podle předpokladu tautologií a má tedy v posledním sloupci vesměs stejné hodnoty, je pro stejnou volbu rovna p, dostali bychom spor s tautologičností $X \to Y$, kterážto formule by musela v uvažovaném řádku mít hodnotu n, neboť „$p \to n$" má hodnotu n.

Sémantickou úplnost, $\mathscr{T}_V \subset \mathbf{T}_V$, je obtížnější dokázat; tvrzení o ní nepatří již k triviálním, ale také ne k vrcholným výsledkům matematické logiky. Důkaz bývá veden indukcí podle složitosti formule a je obvykle konstruktivní, tzn. je ukázáno, jaké axiomy a jaká pravidla použít, je-li poslední ze spojek použitých při budování formule (tzv. *hlavní* spojka) spojka $\vee$ (a podobně pro zbývající). Detailní důkaz vyžaduje odvození celé řady konkrétních pomocných tautologií; zde ho nemůžeme provádět.

Z předcházejícího je vidět, že $\mathbf{T}_V = \mathscr{T}_V$, a tedy že formální systém v tomto ohledu zcela dokonale vystihuje sémantickou teorii: odvoditelnými jsou právě formule odpovídající tautologiím. Také analogické syntaktické otázky je možno kladně zodpovědět, a to u výrokového počtu – na rozdíl od jiných teorií – velmi jednoduše pomocí již známých tvrzení sémantických; jak je snad čtenáři zřejmé, finitní charakter sémantiky, který se projevil již rozhodnutelností množiny všech tautologií, umožňuje tento postup.

Syntaktickou bezespornost dokazuje příklad libovolné netautologie; např. $P \notin \mathscr{T}_V$, a tedy $P \notin \mathbf{T}_V$, odkud plyne $\mathbf{T}_V \neq \mathbf{F}_V$.

Syntaktickou úplnost dokážeme takto: vezměme formuli $X \notin \mathbf{T}_V$. Vzhledem k sémantické úplnosti není X tautologie a pro vhodné pravdivostní hodnoty (ozn. je $a_1, \ldots, a_k$; $a_i = p$ či n) atomárních výroků $A_1, \ldots, A_k$, z nichž je X sestavena, je pravdivostní hodnota X rovna n. Dosadíme-li nyní za každý z výroků A_i nějakou libovolnou tautologii, resp. negaci nějaké tautologie podle toho, zda $a_i = p$, resp. $a_i = n$, dostaneme formuli X^*, jejíž pravdivostní tabulka bude mít v posledním sloupci samá n, takže je negací $\sim Y$ jisté tautologie Y. Je tedy možno užitím odvozovacích pravidel odvodit Y i $\sim Y$; formálně zapsáno: $Y, \sim Y \in \mathbf{O}_V(\mathbf{A}_V \cup \{X\})$.

Mluvme na chvíli trochu obecněji a nazvěme *klasicky bezesporným* každý formální systém obsahující ve své abecedě symbol $\sim$, který nemá v množině svých dokazatelných formulí formule tvaru Y a $\sim Y$ (sémantická motivace této definice je zřejmá). Dokázali jsme tedy zatím, že přidáním neodvoditelné formule (netautologie) k axiomům formálního systému vznikne nutně systém klasicky sporný. Naznačíme, proč ve výrokovém počtu a ve všech systémech ho obsahujících má tento fakt za následek i spornost syntaktickou. Tím bude – mimo dokončení vlastního důkazu – dáno i odůvodnění na první pohled snad trochu nezvyklé definice syntaktické bezespornosti z odstavce 2.3. Ve všech takových systémech lze totiž odvodit všechny tautologie, a tedy také tautologii tvaru $Y \wedge \sim Y \rightarrow Z$ (interpretace: z „klasického" sporu plyne cokoliv).

Je-li nyní v uvažovaném systému možno odvodit Y i $\sim Y$, je v něm možno odvodit (pomocí axiomu (3) a dvojnásobným užitím pravidla modus ponens, jak si čtenář ověří jako velmi lehké cvičení) i $Y \wedge \sim Y$, a tedy užitím pravidla modus ponens i Z, kde Z je zcela libovolná formule.

Poněvadž prakticky všechny důležité formální systémy obsahují výrokový počet, je prakticky klasická bezespornost ekvivalentní syntaktické. Obecně tomu však nemusí tak být: vždy (pokud jen je „$\sim$“ v abecedě systému a lze tedy klasickou bezespornost vůbec definovat) a triviálně plyne z klasické bezespornosti syntaktická, obrácené tvrzení však neplatí. Tak např. systém, u něhož $S_* = S_V$, $F_* = F_V$, ale T_* je definováno jednoduše přímo: $T_* = \{X \to X, \sim(X \to X)\}$, je syntakticky bezesporný (ukazuje to příklad libovolné formule neobsahující žádnou implikaci), avšak evidentně sporný klasicky. Systémy tohoto typu jsou však značně umělé, neboť nepostihují žádné podstatnější sémantické vlastnosti výroků (tautologičnost).

K téže sémantické teorii – v našem případě výrokovému počtu – může být vybudována celá řada formálních systémů, které se mohou lišit řadou vlastností. Nejběžnější systémy formalizující výrokový počet jsou budovány analogicky, jak jsme ukázali v tomto odstavci; rozdíly bývají v počtu axiomů (často se uvádí Hilbertův systém s čtyřmi axiomy; na druhé straně jsou běžné systémy s nekonečným počtem axiomů, které však spadají pod konečný počet axiomových schémat – tento případ poznáme v následujícím odstavci) v počtu výrokových spojek (lze např. užít pouze spojek $\sim$, $\to$ a ostatní, které se pak stávají metateoretickými zkratkami, definovat: $P \vee Q = \sim P \to Q$, $P \wedge Q = \sim(\sim P \vee \sim Q)$ nebo naopak ještě dalších) atd. V následujícím odstavci popíšeme systém, který se bude od nahoře uvedeného lišit podstatněji, i když bude právě tak dobře vystihovat sémantickou teorii.

3.3 *Syntaktická výstavba výrokového počtu (modifikace Gentzenova logického kalkulu).*

Jednou z nejdůležitějších otázek práce v nějakém formálním systému je problém rozhodnout pro předloženou formuli, zda jde o formuli odvoditelnou; v případě že ano, zajímá nás obvykle její formální důkaz. Je-li uvedený problém algoritmicky řešitelný (existuje-li rozhodovací algoritmus), nazýváme teorii *rozhodnutelnou.* Poněvadž množina všech tautologií je rozhodnutelná, je rozhodnutelný i systém popsaný v předchozím odstavci. Avšak způsob odvozování v tomto systému je tak pracný (viz např. již odvození tak jednoduché formule, jako je „$P \to P$“), že rozhodnout o formuli čistě na základě tohoto formálního systému by bylo velmi zdlouhavé a prakticky neúnosné. Z hlediska metamatematického to nelze považovat za velký nedostatek systému; z hlediska práce v samé teorii (tj. z hlediska úkolu dokazovat nikoliv tvrzení o systému, ale hledat formální důkazy odvoditelných formulí v tomto systému) je však tato vada podstatná. Níže předložený systém (jde o Hao Wangovo vylepšení tzv. Gentzenova systému) má odstranit uvedené nedostatky: je to formální systém, v němž konkrétní práce je pohodlná, rychlá a vhodná pro úpravu pro zpracování strojem. Nese tedy všechny hlavní rysy *mechanické matematiky* (základní práce viz [W]), která si vytkla za cíl nahradit matematikovu práci s teorií strojovou prací v odpovídajícím formálním systému (který tuto teorii více či méně dobře postihuje); přitom však rozhodování, resp. generování formulí, resp. odvoditelných formulí má být nejen teoreticky možné (ve smyslu úvah o teoretické, principiální vyčíslitelnosti z odst. 2.1, kde se zdůrazňovala konečnost, ale jinak libovolná délka uvažovaných procesů), ale i prakticky uskutečnitelné.

Při definici vlastního formálního systému využijeme pro stručnost některých označení předchozího odstavce.

Definujeme:

Abeceda $\mathbf{S}_G = \mathbf{S}_V \cup \{\supset , ;\}$

Množina formulí $\mathbf{F}_G$ sestává z výrazů typu $\alpha \supset \beta$, kde písmeny řecké abecedy budeme značit konečné posloupnosti prvků z $\mathbf{F}_V$, oddělených středníkem. α i β mohou být prázdné.

Tak např. do $\mathbf{F}_G$ patří „$P \vee Q; \sim Q \supset P \wedge Q; \sim P$“ a také „$\supset \sim P \to Q$ (Výraz $X_1, \ldots; X_k \supset Y_1; \ldots; Y_l$ při tom interpretujeme sémanticky jako $X_1 \wedge \ldots \wedge X_k \to \to Y_1 \vee \ldots \vee Y_l$, takže ho považujeme za pravdivý, právě když aspoň jedno $X_i (1 \leq \leq i \leq k)$ je nepravdivé nebo aspoň jedno $Y_j (1 \leq j \leq l)$ je pravdivé. Všimněme si, že $\supset Y$ (obecněji $X \supset Y$) je v této interpretaci tautologie, právě když Y (obecněji $X \to Y$) je tautologie v interpretaci předchozího odstavce).

Množina $\mathbf{A}_G$ sestává ze všech formulí tvaru $\alpha; X; \beta \supset \gamma; X; \delta$, tedy ze všech formulí, které mají aspoň jednu stejnou formuli na levé a pravé straně symbolu $\supset$.

Odvozovací pravidla $\mathbf{O}_G$:

(1) $X; \alpha \supset \beta; \gamma$	$\vdash \alpha \supset \beta; \sim X; \gamma$
(2) $\alpha \supset \beta; X; \gamma, \quad \alpha \supset \beta; Y; \gamma$	$\vdash \alpha \supset \beta; X \wedge Y; \gamma$
(3) $\alpha \supset \beta; X; Y; \gamma$	$\vdash \alpha \supset \beta; X \vee Y; \gamma$
(4) $\alpha; X \supset \beta; Y; \gamma$	$\vdash \alpha \supset \beta; X \to Y; \gamma$
(1′) $\alpha; \beta \supset \gamma; X$	$\vdash \alpha; \sim X; \beta \supset \gamma$
(2′) $\alpha; X; Y; \beta \supset \gamma$	$\vdash \alpha; X \wedge Y; \beta \supset \gamma$
(3′) $\alpha; X; \beta \supset \gamma, \quad \alpha; Y; \beta \supset \gamma$	$\vdash \alpha; X \vee Y; \beta \supset \gamma$
(4′) $\alpha; Y; \beta \supset \gamma, \quad \alpha; \beta \supset \gamma; X$	$\vdash \alpha; X \to Y; \beta \supset \gamma$

Množinu odvoditelných formulí $\mathbf{T}_G$ definujeme opět jako $\mathbf{O}_G(\mathbf{A}_G)$.

Metamatematické problémy uvedeného systému při výše naznačené interpretaci lze řešit v podstatě stejnými myšlenkovými pochody jako u předcházejícícho; také výsledky, ke kterým dospíváme, jsou stejné: formální systém je sémanticky i syntakticky bezesporný a úplný (při tom $\mathscr{F}_G = \mathscr{F}_V$, $\mathscr{T}_G = \mathscr{T}_V$). Zde se spokojíme se dvěma příklady odvození tautologií a všimneme si – spíše než metateorie – vhodnosti systému pro rozhodování formulí.

Příklad 1: odvození tautologie $\supset X \wedge \sim X \to Y$ (přesněji: schéma nekonečně mnoha tautologií uvedeného tvaru):

Z_1: $X \supset Y; X$	prvek $\mathbf{A}_G$ $(\alpha = \beta = \delta = \phi, \gamma = \{ Y \})$
Z_2: $X; \sim X \supset Y$	(1′) aplikováno na Z_1
Z_3: $X \wedge \sim X \supset Y$	(2′) aplikováno na Z_2
Z_4: $\supset X \wedge \sim X \to Y$	(4) aplikováno na Z_3

Příklad 2: odvození tautologie $\supset (P \vee (Q \vee R)) \to ((P \vee Q) \vee R)$

Z_1: $R \supset P; Q; R$	prvek $\mathbf{A}_G$
Z_2: $Q \supset P \vee Q; R$	(3) aplikováno na Z_1
Z_3: $R \supset P \vee Q; R$	prvek $\mathbf{A}_G$

Z_4: $Q \vee R \supset P \vee Q; R$ (3′) aplikováno na Z_2 a Z_3
Z_5: $P \supset P; Q; R$ prvek $\mathbf{A}_G$
Z_6: $P \supset P \vee Q; R$ (3) aplikováno na Z_5
Z_7: $P \vee (Q \vee R) \supset P \vee Q; R$ (3′) aplikováno na Z_4 a Z_6
Z_8: $P \vee (Q \vee R) \supset (P \vee Q) \vee R$ (3) aplikováno na Z_7
Z_9: $\supset (P \vee Q \vee R)) \to ((P \vee Q) \vee R)$ (4) aplikováno na Z_8

V čtenáři jistě již vznikl dojem, že náš nový systém je při nejmenším tak komplikovaný jako původní, že nalézt důkaz nějaké tautologie vyžaduje opět buď užití nějakého složitého algoritmu, nebo intuice a zkusmého hledání. To však není pravda. Na rozdíl od dřívější situace má tento systém jednu základní vlastnost; odvozovací pravidla je možno v následujícím smyslu obrátit:

Nechť $\alpha_1 \supset \beta_1 \vdash \gamma \supset \delta$ je některé z odvozovacích pravidel, pak $\gamma \supset \delta \vdash \alpha_1 \supset \beta_1$ (tzn. jestliže z $\alpha_1 \supset \beta \in \mathbf{O}_G(\mathbf{A}_G)$ plyne $\gamma \supset \delta \in \mathbf{O}_G(\mathbf{A}_G)$, pak z $\gamma \supset \delta \in \mathbf{O}_G(\mathbf{A}_G)$ plyne $\alpha_1 \supset \beta_1 \in \mathbf{O}_G(\mathbf{A}_G)$). Podobně: nechť $\alpha_1 \supset \beta_1$, $\alpha_2 \supset \beta_2 \vdash \gamma \supset \delta$ je některé z odvozovacích pravidel, pak $\gamma \supset \delta \vdash \alpha_1 \supset \beta_1$, a $\gamma \supset \delta \vdash \alpha_2 \supset \beta_2$.

Z nahoře uvedených příkladů je vidět, jak se k požadovaným tautologiím dospěje aplikací přímých (původních) odvozovacích pravidel. K tomu, abychom viděli, jaká pravidla použít a jaké prvky z $\mathbf{A}_G$ vybrat, stačí, když celý proces obrátíme, tj. když k předložené tautologii začneme aplikovat obrácená pravidla; kvůli jednoznačnosti předpokládejme, že se zbavíme vždy nejprve té hlavní spojky (všimněme si, že aplikací obráceného pravidla vždy jedna z nich skutečně zmizí), která je nejvíce vlevo:

Příklad 1: obrácení postupu:

$\supset X \wedge \sim X \to Y$ – jedinou hlavní spojku $\to$ odstraníme aplikací obrácení (4):
$X \wedge \sim X \supset Y$ – jedinou hlavní spojku $\wedge$ odstraníme aplikací obrácením (2′):
$X; \sim X \supset Y$ – jedinou hlavní spojku $\sim$ odstraníme aplikací obrácením (1′):
$X \supset Y; X$ – prvek $\mathbf{A}_G$

Příklad 2; obrácení postupu:

$\supset (P \vee (Q \vee R)) \to ((P \vee Q) \vee R)$ — jedinou hlavní spojku $\to$ odstraníme aplikací obrácení (4):
$P \vee (Q \vee R) \supset (P \vee Q) \vee R$ — hlavní spojku $\vee$ z levé strany odstraníme aplikací obrácení (3′):

a) $P \supset (P \vee Q) \vee R$
b) $Q \vee R \supset (P \vee Q) \vee R$

Abychom získali odvození původní tautologie, musíme získat odvození obou formulí *a*, *b*. S každou z nich tedy proces opakujeme; podobně dále:

a) $P \supset (P \vee Q) \vee R$ — jedinou hlavní spojku $\vee$ odstraníme aplikací obrácení (3):
$P \supset P \vee Q; R$ — stejně:
$P \supset P; Q; R$ — prvek $\mathbf{A}_G$
b) $Q \vee R \supset (P \vee Q) \vee R$ — hlavní spojku $\vee$ z levé strany odstraníme aplikací obrácení (3′):

$ba)$ $Q \supset (P \vee Q) \vee R$
$bb)$ $R \supset (P \vee Q) \vee R$
$ba)$ $Q \supset (P \vee Q) \vee R$ — jedinou hlavní spojku $\vee$ odstraníme aplikací obrácení (3):

$Q \supset P \vee Q; R$ — stejně:
$Q \supset P; Q; R$ — prvek $\mathbf{A}_G$

$bb)$ analogicky

Nyní je již snad patrný i způsob prověřování tautologií: s předloženou formulí zacházíme tak, jak bylo uvedeno v obou předchozích příkladech. Daná formule je tautologií, právě když všechny dále neupravované formule (tj. výrazy tvaru $\alpha \supset \beta$, kde α ani β již neobsahují žádnou spojku) patří do $\mathbf{A}_G$.

Čtenář znalý programování si rozmyslí, oč výhodnější je strojové prověřování formulí založené na tomto principu než např. na pravdivostních tabulkách; zájemce o detailnější diskusi odkazuji na literaturu [W].

Literatura

[H] HILBERT D., ACKERMANN W.: *Grundzüge der theoretischen Logik.* Berlin 1928.

[H_1] HERMES H.: *Aufzählbarkeit, Entscheidbarkeit, Berechenbarkeit.* Berlin 1961.

[K] KLEENE S. C.: *Introduction to Metamathematics.* New York 1952; ruský překlad Moskva 1957.

[K_1] KURATOWSKI K.: *Teoria mnogości.* Warszawa 1952.

[U] USPENSKIJ V. A.: *Lekciji o vyčislitělnych funkcijach.* Moskva 1960.

[W] WANG HAO: Toward mechanical mathematics, IBM J. Res. Devel. *4* (1960), 2; ruský překlad v Kiberneticeskij sbornik *5*, Moskva 1962.

[Z] ZICH a kol.: *Moderní logika,* Malá moderní encyklopedie, Praha 1958.

Křemenný teploměr

využívá závislosti kmitočtu krystalového oscilátoru na teplotě. Mezi -40 a $+230$ °C je jeho linearita lepší než 0,05 % rozsahu, což je lepší než u platinového odporového teploměru. Citlivost dosahuje 10^{-3} °C při přímém měření a 10^{-4} °C při srovnávání teploty dvou míst dvěma oscilátory. Nominální kmitočet oscilátoru je 28 MHz, jeho teplotní závislost je právě 1000 Hz/°C. Pomocí počítače se dá snadno uskutečnit číslicová indikace s přesností nepřímo úměrnou trvání měření.

Sk

Rozšíření telefonního spojení v asijské části SSSR

představuje ohromný technický problém. Zdá se, že nedávnou diskusi mezi zastánci koaxiálních kabelů a přívrženci směrových spojů rozhodne spojová družice Blesk 1; podle tvrzení sovětských odborníků jde sice jen o první pokus, ale principiálně jí lze použít ke spojení mezi kterýmikoli dvěma místy v SSSR.

Sk