

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Milan Bursa

Stokesovy konstanty a tvar těles sluneční soustavy

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 33 (1988), No. 5, 268--273

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/138326>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1988

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Stokesovy konstanty a tvar těles sluneční soustavy

(K třicátému výročí vypuštění první umělé družice)

Milan Burša, Praha

Úvod

Právě uplynulých třicet let družicové (kosmické) éry, čítarých od vypuštění první umělé družice, vchází do dějin globálního určování parametrů gravitačních polí a tvaru těles sluneční soustavy jako období vpravdě revoluční.

V této oblasti bylo získáno zcela novými (družicovými) metodami tolik informací o tělesech sluneční soustavy, že mnohonásobně převyší vše, co bylo v epoše předdružicové vůbec vykonáno. Zejména v globálním popisu gravitačních polí a tvaru těles sluneční soustavy bylo dosaženo doslova explozivního pokroku. Například geocentrická gravitační konstanta (součin Newtonovy gravitační konstanty a hmotnosti Země) byla zpřesněna o celých pět řádů, velká poloosa zemského elipsoidu nejméně o dva řády, pólové zploštění o tři řády.

V popisu gravitačních polí těles mají zásadní důležitost Stokesovy konstanty, které jsou sice definovány hustotním uspořádáním a okrajovou plochou tělesa, avšak určitelny z informací pouze ve vnějším prostoru, tj. mimo těleso. Těmi mohou být právě údaje o trajektoriích umělých družic — a to je klíč k řešení celého problému. Trajektorie družic se s maximální možnou přesností (dnes s chybou jen několika centimetrů) empiricky určují na základě laserových měření ze sítě pozorovacích stanic, které jsou dobře rozmístěny po celém zemském povrchu. Z odchylek trajektorií od ideálních oskulačních Keplerových elips lze pak získat vstupní data k řešení inverzní úlohy nebeské mechaniky. Tou je určení zdrojů poruch v gravitačním potenciálu, jimiž jsou pozorované odchylky vybuze-y. Zcela ve stručnosti úlohu ozřejmíme a uvedeme některé zásadní výsledky, jichž bylo v uplynulých třiceti letech dosaženo.

Gravitační potenciál V obecného tělesa, vymezeného objemem τ , je v obecném vnějším bodě P^* , tj. v libovolném bodě mimo těleso (obr. 1), určen jeho hustotním uspořádáním:

$$(1) \quad V(P) = G \int_{\tau} \frac{\sigma}{r} d\tau ;$$

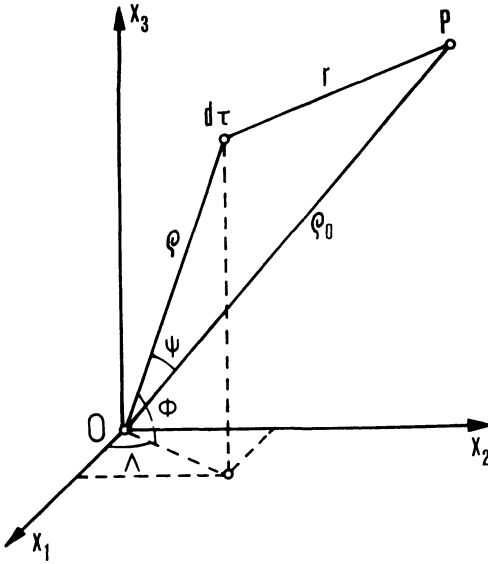
G značí gravitační konstantu**), r vzdálenost objemového elementu $d\tau$ od P . Kdyby hustota σ byla v každém objemovém elementu tělesa známa (třeba diskrétně), mohli bychom vnější gravitační potenciál podle (1) spočítat.

Hustotní rozložení v tělesech sluneční soustavy neznáme. Můžeme se o něm dovídat pouze zprostředkovaně, hlavně z údajů seizmických, které však máme k dispozici jen v případě Země a částečně Měsíce. Vztahu (1) pro výpočet vnějšího gravitačního poten-

*) Pól; vztažné místo; potenciálový bod; oční bod; poljus; Aufpunkt.

**) Ze soudobého laboratorního měření je její hodnota známa takto: $G = (6\,673 \pm 4) \cdot 10^{-14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}$.

ciálu nebeských těles nelze tedy použít. Není možno počítat ani s přímým experimentálním určením veličiny V , neboť gravitační potenciál neumíme přímo měřit.



Obr. 1. Vzájemná poloha potenciálového bodu P a objemového elementu $d\tau$.

Výtečné východisko zde však skýtá první identita Greenova. Pro libovolné dvě funkce U , V s omezenými druhými derivacemi uvnitř τ i na okrajové ploše Σ , která τ vymezuje, platí:

$$(2) \quad \int_{\tau} (U \Delta V - V \Delta U) d\tau = \int_{\Sigma} \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) d\Sigma;$$

n značí vnější normálu k ploše Σ . Volíme-li za U funkci, která je uvnitř τ harmonická, je

$$(3) \quad \Delta U = 0;$$

je-li V gravitační potenciál, pak jeho Laplaceův symbol uvnitř τ je

$$(4) \quad \Delta V = -4\pi G\sigma,$$

tj. V splňuje rovnici Poissonovu.

Po dosazení (3) a (4) do (1) dostáváme vztah

$$(5) \quad \int_{\tau} \sigma U d\tau = S = -\frac{1}{4\pi G} \int_{\Sigma} \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) d\Sigma.$$

Integrál (5), který jsme označili S , se nazývá *Stokesova konstanta tělesa*; lze jej vypočítat z hodnot funkcí U , V a jejich normálových derivací pouze na okrajové ploše Σ .

To znamená, že při výpočtu integrálů typu S nemusíme znát hustotní funkci σ ; funkce U musí ovšem být harmonická. To však je případ právě $1/r$ v integrandu (1), neboť $1/r$ lze vyjádřit rozvojem v řadu kulových funkcí

$$(6) \quad Y_n^{(k)} = \varrho^n P_n^{(k)}(t) \begin{matrix} \cos k\lambda \\ \sin k\lambda \end{matrix};$$

$t = \sin \Phi$; ϱ , Φ , Λ jsou sférické souřadnice; n je stupeň, k řád Legendrových přidružených funkcí $P_n^{(k)}$. Pro tyto funkce vždy platí

$$(7) \quad \Delta Y_n^{(k)} = 0,$$

neboť jsou právě řešením Laplaceovy rovnice a jejich Laplaceův symbol je tedy roven nule. Počátek souřadnicového systému (střed pomocné sféry) může být libovolný, umístíme jej však do středu hmotnosti O daného tělesa. Pak v rozvoji odpadnou členy 1. stupně a platí (označení veličin je patrné z obr. 1)

$$(8) \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{\varrho_0} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\varrho}{\varrho_0} \right)^n P_n^{(0)}(\cos \psi) \right] = \\ = \frac{1}{\varrho_0} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^n \left(\frac{\varrho}{\varrho_0} \right)^n \frac{(2 - \delta_{k0})(n-k)!}{(n+k)!} P_n^{(k)}(t) P_n^{(k)}(t_0) \cos k(\Lambda - \Lambda_0) \right];$$

δ_{k0} je Kroneckerovo delta; $t_0 = \sin \Phi_0$; ϱ_0 , Φ_0 , Λ_0 jsou sférické souřadnice potenciálového bodu P ; ϱ , Φ , Λ sférické souřadnice elementu $d\tau$.

Dosadíme-li (8) do (1) a označíme-li

$$(9) \quad \frac{J_n^{(k)}}{S_n^{(k)}} = \frac{(2 - \delta_{k0})(n-k)!}{Ma_0^n(n+k)!} \int_{\tau} \sigma Y_n^{(k)} d\tau,$$

dostaneme pro gravitační potenciál (1) rozvoj v řadu funkcí sférických

$$(10) \quad V(P) = \frac{GM}{\varrho_0} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^n \left(\frac{a_0}{\varrho_0} \right)^n (J_n^{(k)} \cos k\Lambda_0 + S_n^{(k)} \sin k\Lambda_0) P_n^{(k)}(t_0) \right];$$

M je celková hmotnost tělesa, a_0 libovolný délkový faktor, zpravidla střední rovníkový průvodič plochy, která těleso vymezuje.

Konstanty (9) patří do třídy konstant Stokesových S , splňujících identitu (5) pro $U = Y_n^{(k)}$. Mohou být tedy určeny bez znalosti rozložení hustoty v tělese, z hodnot V a normálových derivací $\partial V / \partial n$ na okrajové ploše Σ , která ovšem musí být rovněž známa. Existují však i další cesty, jak Stokesovy konstanty (9) nebeských těles určovat.

Nejefektivnější je dnes metoda dráhových analýz umělých družic, které okolo daného tělesa obíhají. Položíme-li hmotnost družice rovnou jednotce, pak její potenciální energie je rovna záporně vzatému potenciálu (10) a Hamiltonova funkce H tedy

$$(11) \quad H = T - V;$$

T je energie kinetická. Pohybové rovnice (q_i jsou proměnné popisující souřadnice mechanického systému; p_i jsou proměnné popisující momenty)

$$(12) \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i}$$

obsahují tedy Stokesovy konstanty (9) a ty musí být pro řešení (11), tj. určení dráhy družice, a priori známy.

Lze však řešit inverzní úlohu nebeské mechaniky, tj. určit trajektorii empiricky a

určit síly, které pohyb budí, neboli potenciál (10). A v něm právě vystupují Stokesovy konstanty (9), které jsou jedinými neznámými, ovšem za předpokladu, že se všechny jiné, tj. i negravitační síly podařilo předem vypočítat a z jejich vlivu korigovat empirickou dráhu družice. Úloha je usnadněna tím, že pohyb v ideálně sféricky symetrickém poli, kdy $V(P) = GM/\varrho_0$ ($J_n^{(k)} = 0$, $S_n^{(k)} = 0$ pro $n > 0$), je znám a priori, probíhá přesně podle Keplerových zákonů, trajektorie je kuželosečkou. Proto vliv Stokesových konstant má charakter poruch a k řešení lze s výhodou použít Lagrangeovy metody variace integračních konstant. V kartézských souřadnicích x_j je ideální keplerovský pohyb popsán soustavou tří ($j = 1, 2, 3$) homogenních diferenciálních rovnic druhého řádu

$$(13) \quad \ddot{x}_{j_1} + \frac{GM}{\varrho^3} x_j = 0$$

a pohyb reálný, rušený, soustavou rovnic nehomogenních

$$(14) \quad \ddot{x}_j + \frac{GM}{\varrho^3} x_j = \frac{\partial R}{\partial x_j};$$

$$(15) \quad R = V - \frac{GM}{\varrho} = \frac{GM}{\varrho} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^n \left(\frac{a_0}{\varrho}\right)^n (J_n^{(k)} \cos k\lambda + S_n^{(k)} \sin k\lambda) P_n^{(k)}(t);$$

ϱ , Φ , λ jsou nyní sférické souřadnice družice.

Poruchový potenciál R je v porovnání s celkovým potenciálem tím větší, čím větší jsou odchylky centrálního tělesa, okolo kterého družice obíhá, od ideální koule. Největší je zpravidla zonální člen 2. stupně, buzený pólovým zploštěním tělesa; určuje řádově velikost poruchové funkce (15). Lze jej vyjádřit pomocí hlavních momentů setrvačnosti tělesa $C > B > A$:

$$(16) \quad J_2^{(0)} = [\frac{1}{2}(A + B) - C]/(Ma_0^2).$$

Fyzikálně důležitý je sektorální člen 2. stupně $J_2^{(2)}$; určuje rovníkové zploštění tělesa

$$(17) \quad J_2^{(2)} = (B - A)/(4Ma_0^2).$$

Stokesovy konstanty lichých stupňů indikují nesymetrii tělesa vzhledem k rovině rovníku. Obecně každý harmonický člen ($J_n^{(k)} \cos k\lambda + S_n^{(k)} \sin k\lambda$) $P_n^{(k)}(t)$ popisuje specifické zvlnění ekvipotenciální plochy tělesa. V řadě (15) existuje pro každý stupeň n celkem $(2n + 1)$ lineárně nezávislých členů s konstantami $J_n^{(k)}$, $S_n^{(k)}$, $k = 0, 1, \dots, n$. Je-li \bar{n} nejvyšší stupeň řady, pak (15) má celkem $(\bar{n} + 1)^2$ členů, a tedy $(\bar{n} + 1)^2$ Stokesových konstant.

Řešením inverzní úlohy bylo již dosaženo v popisu gravitačního pole Země $\bar{n} = 180$, Marsu $\bar{n} = 18$, Měsíce $\bar{n} = 16$, Venuše $\bar{n} = 16$, Jupitera a Saturna $\bar{n} = 4$, Merkuru $\bar{n} = 2$. Zonální Stokesovy konstanty druhého stupně těles sluneční soustavy a planeo-centrické gravitační konstanty jsou v tab. 1.

Souborem Stokesových konstant a centrickou gravitační konstantou GM je popsán soubor vnějších hladinových ploch tělesa, tj. ploch o konstantním tíhovém potenciálu $W = V + Q$, kde $Q = \frac{1}{2}\omega^2\varrho^2 \cos^2 \Phi$ je potenciál odstředivé síly, ω úhlová rychlost rotace tělesa, považovaná zde za konstantu.

Tabulka 1. Planeocentrické gravitační konstanty GM a Stokesovy konstanty 2. stupně těles sluneční soustavy

| Těleso | GM [$10^9 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$] | $J_2^{(0)}$ [10^{-6}] | $J_2^{(2)}$ [10^{-6}] | $S_2^{(2)}$ [10^{-6}] |
|---------|---|------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| Slunce | $13\,271\,244,0 \cdot 10^4$ | -10 | | |
| Merkur | 22 031,8 | -80 | | |
| Venuše | 324 858,8 | -5,972 | 0,91 | 0,24 |
| Země | 398 600,440 | -1 082,625 | 1,570 | -0,902 |
| Měsíc | 4 902,799 | -202,151 | 22,1 | 0,0 |
| Mars | 42 828,44 | -1 959,2 | -54,9 | 31,3 |
| Jupiter | $126\,686,9 \cdot 10^3$ | -14 733 | -0,2 | -0,3 |
| Saturn | $37\,940,6 \cdot 10^3$ | $-16,47 \cdot 10^3$ | | |
| Uran | $585 \cdot 10^4$ | -3 350 | | |
| Neptun | $686 \cdot 10^4$ | $-4 \cdot 10^3$ | | |

Položíme-li

$$(18) \quad \frac{GM}{\varrho} \left\{ 1 + \sum_{n=2}^i \sum_{k=0}^n \left(\frac{a_0}{\varrho} \right)^n (J_n^{(k)} \cos k\lambda + S_n^{(k)} \sin k\lambda) P_n^{(k)}(t) + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} q \left(\frac{a_0}{\varrho} \right)^{-3} [1 - P_2^{(0)}(t)] \right\} = W_0 = \text{const},$$

můžeme odtud vyjádřit průvodič hladinové plochy $W = W_0$

$$(19) \quad \varrho = \varrho(\Phi, \lambda; GM, J_n^{(k)}, S_n^{(k)}, q); \quad n = 2, 3, \dots, \bar{n};$$

$$(20) \quad q = \omega^2 a_0^3 / (GM);$$

plocha (19) je obecným sféroidem \bar{n} -ho stupně se středem totožným se středem centrálního elipsoidu setrvačnosti tělesa. Abychom mohli vypočítat její základní tvarové vlastnosti, tj. pólové (α) a rovníkové (ε) zploštění, je třeba ji nahradit plochou koncentrického trojosého elipsoidu. To však není úloha jednoznačná; nutno klást dodatečné podmínky. Je-li $\varrho_e = \varrho_e(\Phi, \lambda; a, \alpha, \varepsilon, A_0)$ průvodič plochy trojosého elipsoidu o čtyřech hledaných parametrech a (největší poloosa), α , ε , A_a (parametr definující orientaci poledníku o největší poloose a), pak např.

$$(21) \quad \int_S [\varrho - \varrho_e(a, \alpha, \varepsilon, A_a)]^2 dS = \text{min.};$$

S značí danou hladinovou plochu $W = W_0$.

Lze např. minimalizovat integrál čtverců rozdílů tíhových potenciálů obou ploch

$$(22) \quad \int_S [W_0 - W_e(a, \alpha, \varepsilon, A_a)]^2 dS = \text{min.}$$

nebo tíží

$$(23) \quad \int_S [g - g_e(a, \alpha, \varepsilon, A_a)]^2 dS = \text{min.}$$

nebo např. Gaussových křivostí

$$(24) \quad \int_S [K - K_e(a, \alpha, \varepsilon, A_a)]^2 dS = \min.$$

apod. Dosud se nepodařilo obecně vyřešit míru závislosti určených parametrů a , α , ε , A_a na dodatečných podmínkách a zpřesnit existující mezinárodní definici těchto základních konstant. Číselné hodnoty pro některá tělesa sluneční soustavy jsou v tab. 2; \bar{a} , $\bar{\alpha}$ značí velké poloosy a zploštění odpovídajících rotačních elipsoidů.

Tabulka 2. Základní tvarové a rozměrové parametry těles sluneční soustavy

| Těleso | a [km] | 1/α | 1/ε | A _a | \bar{a} [km] | 1/ $\bar{\alpha}$ |
|---------|-----------|-------------------|------------------------|----------------|------------------------|-------------------|
| Slunce | | | | | $\sim 696 \cdot 10^3$ | $\sim 10^5$ |
| Merkur | | | | | 2 439,5 | $8,3 \cdot 10^3$ |
| Venuše | 6 051,3 | $8,56 \cdot 10^4$ | $1,76 \cdot 10^5$ | 7,3 °E | 6 052,1 | $1,1 \cdot 10^5$ |
| Země | 6 378,172 | 297,776 | 92 000 | 14,9 °W | 6 378,137 | 298,257 |
| Měsíc | 1 735,55 | 2 660 | 7 670 | 0,0° | 1 735,44 | 3 220 |
| Mars | 3 397,8 | 183,9 | 2 630 | 74,8 °E | 3 397,15 | 190,5 |
| Jupiter | | | $\cong 4,6 \cdot 10^5$ | | $71,4 \cdot 10^3$ | 15,0 |
| Saturn | | | | | $57,9 \cdot 10^3$ | 10,2 |
| Uran | | | | | $26,2 \cdot 10^3$ | 30,3 |
| Neptun | | | | | $\sim 24,3 \cdot 10^3$ | ~ 60 |

Odchyly tvaru těles od rotační symetrie, především rovníková zploštění, významně ovlivňují jejich rotačně orbitální a slapovou dynamiku. Jsou dnes předmětem intenzivního výzkumu v mezinárodní spolupráci s cílem upřesnit popis dynamiky sluneční soustavy, objasnit její vznik a kvantifikovaně popsat její evoluci.

O jednom úniku od spojitosti

Tibor Neubrunn, Bratislava

1. Úvod

Zovšeobecňovanie spojitosti je prirodzené pri rôznych úvahách v matematike a jej aplikáciach. Neznamená to, že by pojem spojitosti nebol jedným z centrálnych matema-