Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Tibor Neubrunn

O jednom úniku od spojitosti

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 33 (1988), No. 5, 273--281

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/138325`

nebo např. Gaussových křivostí

(24) $$\int_S [K - K_e(a, \alpha, \varepsilon, \Lambda_a)]^2 \, dS = \min.$$

apod. Dosud se nepodařilo obecně vyřešit míru závislosti určovaných parametrů a, α, ε, Λ_a na dodatečných podmínkách a zpřesnit existující mezinárodní definici těchto základních konstant. Číselné hodnoty pro některá tělesa sluneční soustavy jsou v tab. 2; $\bar{a}$, $\bar{\alpha}$ značí velké poloosy a zploštění odpovídajících rotačních elipsoidů.

Tabulka 2. Základní tvarové a rozměrové parametry těles sluneční soustavy

Těleso	a [km]	$1/\alpha$	$1/\varepsilon$	Λ_a	$\bar{a}$ [km]	$1/\bar{\alpha}$
Slunce					$\sim 696 \cdot 10^3$	$\sim 10^5$
Merkur					2 439,5	$8,3 \cdot 10^3$
Venuše	6 051,3	$8,56 \cdot 10^4$	$1,76 \cdot 10^5$	7,3 °E	6 052,1	$1,1 \cdot 10^5$
Země	6 378,172	297,776	92 000	14,9 °W	6 378,137	298,257
Měsíc	1 735,55	2 660	7 670	0,0°	1 735,44	3 220
Mars	3 397,8	183,9	2 630	74,8 °E	3 397,15	190,5
Jupiter			$\geqq 4,6 \cdot 10^5$		$71,4 \cdot 10^3$	15,0
Saturn					$57,9 \cdot 10^3$	10,2
Uran					$26,2 \cdot 10^3$	30,3
Neptun					$\sim 24,3 \cdot 10^3$	~ 60

Odchylky tvaru těles od rotační symetrie, především rovníková zploštění, významně ovlivňují jejich rotačně orbitální a slapovou dynamiku. Jsou dnes předmětem intenzívního výzkumu v mezinárodní spolupráci s cílem upřesnit popis dynamiky sluneční soustavy, objasnit její vznik a kvantifikovaně popsat její evoluci.

O jednom úniku od spojitosti

Tibor Neubrunn, Bratislava

1. Úvod

Zovšeobecňovanie spojitosti je prirodzené pri rôznych úvahách v matematike a jej aplikáciach. Neznamená to, že by pojem spojitosti nebol jedným z centrálnych matematických pojmov. Azda práve preto, že rozsah použitia spojitosti je veľmi široký, je pri riešení mnohých konkrétnych problémov treba pristúpiť k jej zovšeobecneniu z rôznych hľadísk, závislých od povahy skúmaného problému. Sú zovšeobecnenia spojitosti, ktoré sú všeobecne známe a o ich význame sa nepochybuje, pretože sa preukázal vo výsledkoch, ktoré sú základného charakteru a majú dostatočne širokú popularitu. Sú nepochybne aj také zovšeobecnenia, ktorých význam sa takýmto spôsobom nepreukázal a možno ani nepreukáže. Sú však aj také, ktoré nie sú dostatočne známe v širšom okruhu, a to preto, že výsledky s nimi spojené nepatria ešte k celkom bežným, napriek tomu, že buď vnútornú výstavbu matematiky, alebo jej aplikácie v širšom zmysle ovplyvňujú. Domnievame sa, že jedným z nich je aj kvázispojitosť, o ktorej chceme v tomto článku hovoriť. Samotný pojem kvázispojitosti nie je módnou záležitosťou, pretože ho sformuloval pre reálne funkcie reálnej premennej poľský matematik S. Kempisty v roku 1932 v práci [5]. Prenesenie tohoto pojmu do všeobecnejších priestorov nielenže podnietilo mnohých matematikov v nedávnom období k ďalšiemu výskumu v tejto oblasti, ale umožnilo získať také výsledky, ktoré význam pojmu kvázispojitosť zvýraznili. Viaceré z takých výsledkov v ďalšom spomenieme. Našli sa súvislosti s klasickými, ale i se zaujímavými neklasickými otázkami, v ktorých prínos kvázispojitosti nie je zanedbateľný.

Hneď v úvode treba povedať, že tu nejde o prehľadný článok o kvázispojitosti. V tejto úvahe ide o zoznámenie sa s pojmom kvázispojitosti a s viacerými výsledkami, ktoré azda dávajú oprávnenie pre jeho existenciu a podľa mienky autora môžu byť zaujímavé pre dostatočne široký okruh čitateľov.

2. Jeden klasický prístup k zovšeobecneniu spojitosti

Predtým ako zavedieme pojem kvázispojitosti, je výhodné mať aspoň jedno pomerne známe zovšeobecnenie spojitosti, s ktorým by sme to naše mohli porovnávať. Zvolíme tu teda isté zovšeobecnenie spojitosti, alebo presnejšie istý prirodzene vytvorený systém funkcií obsahujúcich všetky spojité funkcie a s tým budeme porovnávať systém kvázispojitých funkcií. V tomto paragrafe budeme hovoriť len o reálnych funkciách reálnej premennej.

Jednoduchý príklad postupnosti $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ reálnych funkcií definovaných na intervale $\langle 0, 1\rangle$ ukazuje, že funkcia, ku ktorej táto postupnosť bodovo konverguje, nie je spojitá.

Je to funkcia f, pre ktorú $f(x) = 0$ v bodoch $x \in \langle 0, 1)$ a $f(1) = 1$. Ak teda označíme znakom B_0 množinu všetkých spojitých funkcií na $\langle 0, 1\rangle$ a znakom B_1 množinu všetkých takých $f\colon \langle 0, 1\rangle \to R$, pre ktoré existuje taká postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, že $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ pre každé $x \in \langle 0, 1\rangle$ a pritom $f_n \in B_0$ pre $n = 1. 2, \ldots$, vidíme, že $B_0 \subset B_1$, $B_0 \neq B_1$. Množina B_1 je známa množina všetkých reálnych funkcií prvej Bairovej triedy na $\langle 0, 1\rangle$. Pri dostatku dobrej vôle môžeme funkcie patriace do B_1 považovať za spojité funkcie v istom zovšeobecnenom zmysle. Veľmi dobre známa je tá skutočnosť, že ak uvažujeme množinu B_2 všetkých takých funkcií $f\colon \langle 0, 1\rangle \to R$, pre ktorú existuje taká postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, že $f_n \in B_1$ pre $n = 1, 2, \ldots$ a $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ pre každé $x \in \langle 0, 1\rangle$, tak $B_1 \subset B_2, B_1 \neq B_2$. Známym príkladom funkcie patriacej do B_2 a nepatriacej do B_1 je funkcia f definovaná tak, že

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{m \to \infty} (\cos n!\,\pi x)^{2m} . \tag{1}$$

Pomerne jednoduchá úvaha ukazuje, že $f(x) = 1$, ak x je racionálne číslo a $f(x) = 0$, ak x nie je racionálne. Ide teda o dobre známu Dirichletovu funkciu.

Indukciou môžeme definovať pre každé prirodzené číslo $k \geqq 1$ množinu funkcií k-tej Bairovej triedy, a to tak, že funkcia patrí do B_k práve vtedy, keď $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ pre každé $x \in \langle 0, 1 \rangle$, pričom $f_n \in B_{k-1}$ pre $n = 1, 2, \ldots$ Je známe, že $B_k \neq B_{k-1}$ a zrejme $B_{k-1} \subset B_k$. Ak utvoríme

$$B_\omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$$

(ω tu chápme ako symbol), nie je ani táto množina uzavretá vzhľadom na bodové limity funkcí do nej patriacich. Existuje totiž $f\colon \to \langle 0, 1 \rangle \to R$ tak, že $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ pre každé $x \in \langle 0, 1 \rangle$ a pritom $f \notin B_\omega$, zatiaľ čo $f_n \in B_\omega$ pre $n = 1, 2, \ldots$

Môžeme teda prirodzeným spôsobom definovať množinu $B_{\omega+1}$ (považujme aj $\omega + 1$ za symbol) tak, že je to množina všetkých tých funkcií, ktoré sú bodovými limitami funkcií z B_ω. Ako sme už povedali $B_\omega \subset B_{\omega+1}$. Vzniká otázka, koľko takých symbolov by sme museli použiť, aby sme sa dostali k množine B, ktorá by už bola vzhľadom na bodovú konvergenciu uzavretá. Na to, aby sme to mohli seriόznym spôsobom urobiť, stačilo by množinu prirodzených čísel „vnoriť" do väčšej množiny tzv. ordinálnych čísel menších ako tzv. prvé nespočítateľné ordinálne číslo Ω. V nej ω znamená prvé ordinálne číslo nasledujúce za všetkými prirodzenými číslami, $\omega + 1$ ďalšie atď. Pre naše účely to nie je potrebné. Vystačíme s tým, čo sme naznačili. Prezraďme len to, že keď definujeme prirodzeným spôsobom B_α pre každé $\alpha < \Omega$, máme $B_\alpha \subset B_{\alpha+1}$ pre každé $\alpha < \Omega$, $B_\alpha \neq B_{\alpha+1}$ a množina

$$B = \bigcup_{\alpha < \Omega} B_\alpha$$

je už uzavretá na bodovú konvergenciu. Je to známa množina tzv. bairovských funkcií. Pre informáciu pripomeňme, že často používaná množina M lebesguovsky merateľných funkcií na $\langle 0, 1 \rangle$ súvisí s B tak, že $B \subset M$ a existuje taká $f \in M$, že $f \notin B$.

Každú z množín B_k $k = 1, 2, \ldots$, dokonca i množiny B_ω, $B_{\omega+1}$ atď. možno považovať, pravdaže už pri väčšej dávke smelosti, za množiny funkcií spojitých v akomsi zovšeobecnenom zmysle. Za takú množinu možno považovať aj množinu B. Môžeme sa pýtať, či sme prechodom k množine B od množiny B_0 podstatne zovšeobecnili spojité funkcie. Pretože pojem „podstatne" sme tu poriadne nedefinovali, môžeme na tú otázku dať hneď dve odpovede. Prvá bude: áno, a druhá: nie.

Prečo „áno"? Zdôvodnenie je hneď naporuke. Veď už do B_2 patrí funkcia (1), ktorá nie je spojitá v žiadnom bode. Teda od spojitosti sme sa dostali na míle už pri druhom kroku.

Prečo teda „nie"? Tu je uspokojivá odpoveď o niečo ťažšia, ale zvládnuteľná. Na pomoc si však treba zobrať vynikajúceho klasika v teórii reálnych funkcií N. N. Luzina (1883–1950), lepšie povedané, jeho vetu, ktorá pre náš prípad tvrdí nasledujúce.

(2.1) *Ku každej funkcii $f \in M$ a ku každému $\varepsilon > 0$ existuje taká lebesguovsky merateľná množina $E \subset \langle 0, 1 \rangle$ a taká spojitá funkcia g: $\langle 0, 1 \rangle \to R$, že množina $\langle 0, 1 \rangle - E$ má Lebesguovu mieru menšiu ako ε a $g(x) = f(x)$ pre každé $x \in E$.*

Uvedenými dvoma odpoveďmi sme chceli povedať, že záleží na hľadisku, ako sa na dané zovšeobecnenie dívame. V jadre tohoto článku chceme ukázať, že pri zavádzaní nejakého typu zovšeobecnenej spojitosti záleží tiež na tom, akým spôsobom zovšeobecnenie prevádzame. Jedným z takých spôsobov bude zavedenie kvázispojitej funkcie.

3. Kvázispojitosť

Zobrazenia, o ktorých tu budeme hovoriť, budú zobrazeniami typu f: $X \to Y$, kde X, Y sú topologické priestory. Ak si čitateľ bude pod X, Y predstavovať číselnú os a pod okolím bodu bude rozumieť obvyklé okolie, teda otvorený interval, ktorý daný bod obsahuje, bude mu to na pochopenie nasledujúcich úvah stačiť.

Dobre známy pojem spojitosti funkcie f: $X \to Y$ v bode $p \in X$ je zavedený takto: Funkcia f je spojitá v bode p, ak pre ľubovoľné okolie V bodu $f(x)$ existuje také okolie U bodu p, že $f(x) \in V$ pre každé $x \in U$. Hovoríme, že f je spojitá, ak je spojitá v každom bode $p \in X$.

Kvázispojitosť zavedenú pre reálne funkcie reálnej premennej v [5] možno všeobecnejšie definovať takto:

Hovoríme, že f: $X \to Y$ je kvázispojitá v bode $p \in X$, ak pre ľubovoľné okolie V bodu $f(p)$ a pre ľubovoľné okolie U bodu p existuje taká neprázdna otvorená množina $G \subset U$, že $f(x) \in V$ pre každé $x \in G$.

Z uvedených definícií je zrejmé, že platí

(3.1) *Každá spojitá funkcia je kvázispojitá.*

Obrátené tvrdenie neplatí. Stačí zobrať f: $R \to R$ definovanú tak, že $f(x) = 1$ pre $x \leqq 0$ a $f(x) = 0$ pre $x > 0$ a máme príklad kvázispojitej funkcie, ktorá nie je spojitá. Nie je ťažké uviesť príklady kvázispojitých funkcií podstatne vzdialenejších od spojitých, ako je tá, ktorú sme uviedli. Nebudeme to robiť, ale uvedieme namiesto toho tvrdenie, ktoré ukazuje, že môže ísť o veľmi komplikované funkcie. Toto tvrdenie súčasne naznačí, že kvázispojitosť je v istom zmysle podstatným a netradičným zovšeobecnením spojitosti. Ide o nasledujúcu vetu, ktorú dokázal S. Marcus v r. 1961 v [6].

(3.2) *Existuje funkcia f: $\langle 0, 1 \rangle \to R$, ktorá je kvázispojitá a lebesgueovsky nemerateľná.*

Pre porovnanie kvázispojitých funkcií s merateľnými, resp. bairovskými funkciami si všimnime, že množiny $B_0, B_1, \ldots, B_\omega, B_{\omega+1}, \ldots, B, M$ spomínané v časti 2. tvoria rastúci reťazec množín s prvým prvkom B_0 a posledným M. Množina K je množinou všetkých kvázispojitých funkcií. Tá obsahuje B_0 (tvrdenie 3.1) a zasahuje až do nemerateľných funkcií (tvrdenie 3.2). Množina K však neobsahuje žiadnu z množín B_α ($\alpha < \Omega$) ako celok, aj keď isté funkcie z každého B_α obsahuje. Situáciu upresňujú nasledujúce tvrdenia:

(3.3) *Pre každé $\alpha < \Omega$ existuje $f \in B$ tak, že $f \notin K$.*

Tvrdenie (3.3) je tak jednoduché, že ho môžeme dokázať. Stačí totiž zobrať také $f \in B_1$, že $f \notin K$. Taká funkcia skutočne existuje. Je ňou napríklad f: $\langle 0, 1\rangle \to R$, pre ktorú $f(x) = 0$, ak $x \in \langle 0, 1)$ a $f(1) = 1$. To, že je v B_1, sme ukázali už v paragrafe 1. Nepatrí zrejme do K, lebo nie je kvázispojitá v bode 1. Keďže $f \in B_1$, je $f \in B_\alpha$ pre $\alpha \geqq 1$, a tým sme tvrdenie dokázali.

Platí však aj silnejšie tvrdenie dokázané v [6], ktorého dôkaz robiť nebudeme.

(3.4) *Pre každé $\alpha < \Omega$ existuje taká kvázispojitá funkcia, pre ktorú platí $f \in B_\alpha$ a $f \notin B_\beta$ pre žiadne $\beta < \alpha$.*

4. O dobrých vlastnostiach kvázispojitosti

Tým, že sme našli nemerateľnú kvázispojitú funkciu, sme ukázali, že zovšeobecnenie typu kvázispojitosti je iného druhu ako zovšeobecnenie smerom na bairovské množiny funkcií. Sme náchylní považovať ho za podstatné, najmä z toho dôvodu, že zasahuje až do nemerateľných funkcií. Na druhej strane toto zovšeobecnenie vzbudzuje isté obavy z toho, či sme sa nevzdialili príliš od spojitosti. Čo dobrého možno povedať o nemerateľnej funkcii? Naliehavá je teda otázka, či neexistuje hľadisko, ktoré by ukazovalo, že aj toto zovšeobecnenie súvisí hlboko se spojitosťou. Také hľadisko skutočne existuje. Nedá sa však k nemu dôjsť cez Luzinovu vetu. Je na to treba iný aparát. Preto si pripomeňme niektoré elementárne fakty z topológie.

Množinu $S \subset X$, kde X je topologický priestor, nazývame riedku, ak v každej neprázdnej otvorenej množine $G \subset X$ existuje taká neprázdna otvorená množina $U \subset G$, že $U \cap S = \emptyset$.

Z topologického hľadiska je teda riedka množina málo významná. (Ako príklad riedkej množiny na číselnej osi môžeme uviesť množinu celých čísel.) Za topologicky málo významné považujeme aj také množiny, ktoré sú spočítateľným zjednotením riedkych množín. (Možno dokázať, že celá číselná os nie je takou množinou a mnohé ďalšie priestory nie sú také.) Množiny, ktoré sú spočítateľným zjednotením riedkych množín, nazývame množinami prvej kategórie. Tie, ktoré nie sú prvej kategórie, nazývame množinami druhej kategórie. Teraz už môžeme vysloviť tvrdenie, ktoré ukazuje, že existuje hľadisko, z ktorého kvázispojité funkcie nie sú už tak ďaleko od spojitých.

(4.1) *Nech f: $\langle 0, 1\rangle \to R$ je kvázispojitá funkcia. Potom množina bodov nespojitosti funkcie f je prvej kategórie.*

Poznamenajme, že veta (4.1) platí aj v tom prípade, keď X je ľubovoľný topologický a Y priestor spĺňajúci druhú axiómu spočítateľnosti. Známe sú mnohé s ňou súvisiace tvrdenia.

Ako je to s uzavretosťou množiny K vzhľadom na bodovú konvergenciu? Je K vzhľadom na ňu uzavretá. Odpoveď je negatívna a ukazuje to už náš známy príklad postupnosti $\{x^n\}_{n=1}$ na $\langle 0, 1\rangle$. Uspokojujúci je však nasledujúci výsledok [1].

(4.2) *Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť kvázispojitých funkcií definovaných na topologickom priestore X s hodnotami v metrickom priestore Y. Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje v každom bode k funkcii f. Potom množina bodov nespojitosti funkcie f je prvej kategórie.*

Uveďme tu ešte jeden výsledok, ktorý je pozoruhodný a pre reálne funkcie dvoch reálnych premenných známy už zo spomínanej Kempistyho práce [5]. Najprv pripomeňme známu skutočnosť, že funkcia $f: R \times R$ môže byť spojitá v každej premennej zvlášť a nemusí byť spojitá ako funkcia dvoch premenných. O to prekvapujúcejšie je spomínané Kempistyho tvrdenie.

(4.3) *Nech $f: R \times R$ je funkcia, ktorá je kvázispojitá v každej premennej zvlášť, potom f je kvázispojitá ako funkcia dvoch premenných.*

Tvrdenie (4.3) je nielen zaujímavé, ale i dobre použiteľné v mnohých súvislostiach. Pre jeho aplikovateľnosť a potrebu i vo všeobecnejších priestoroch boli robené mnohé pokusy o jeho zovšeobecnenie. Pre mnohé značne všeobecné priestory sa stretli s úspechom. Tak napríklad v [7] je tvrdenie typu (4.3) dokázané pre $f: X \times Y \to Z$, keď X je Bairov priestor, Y spĺňa lokálne druhú axiómu spočítateľnosti a Z je regulárny topologický priestor (Pre čitateľa, ktorého taký všeobecnejší prípad zaujíma pripomíname, že uvedené typy priestorov sú definované napríklad v [3], ale i v iných knihách z topológie).

5. Kvázispojitosť a niektoré otázky matematickej analýzy

Obavy, že kvázispojitosť je príliš všeobecný pojem na dobré aplikácie, sú sčasti vyvrátené (aspoň teoreticky) výsledkami predchádzajúceho paragrafu. V tejto časti chceme poukázať na užitočnosť kvázispojitosti tým, že poukážeme na jej aplikabilitu v niektorých otázkach matematickej analýzy. Z viacerých možných sme vybrali dve.

Uvažujme reálnu funkciu $f: R \times R \to R$. Predpokladajme, že f má konečné parciálne derivácie podľa x aj podľa y. Ako obvykle ich označujeme $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$. Keďže nepredpokladáme, že tie derivácie sú spojité, nevieme zaručiť diferencovateľnosť funkcie f v jednotlivých bodoch v $R \times R$. Vieme však, že v ľubovoľnom $(x, y) \in R \times R$ je

$$(2) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{n \to \infty} \frac{f\left(x + \frac{1}{n}, y\right) - f(x, y)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to \infty} n\left[f\left(x + \frac{1}{n}, y\right) - f(x, y)\right].$$

Ak označíme znakom g_n funkciu $g_n(x, y) = n[f(x + 1/n, y) - f(x, y)]$, vidíme, že g_n je spojité pre $n = 1, 2, \ldots$ v každej premennej zvlášť. Teda podľa (4.3) je g_n kvázispojitá ako funkcia dvoch premenných a podľa (4.2) je $\partial f/\partial x$ spojitá funkcia dvoch premenných na $R \times R$ až na množinu A_1 prvej kategórie. Úvahou úplne podobnou dostaneme, že $\partial f / \partial y$ je spojitá až na množinu A_2 prvej kategórie. Pre množinu A tých bodov, kde $\partial f / \partial x$, $\partial f / \partial y$ nie sú súčasne spojité, platí $A \subset A_1 \cup A_2$, a teda A je prvej kategórie. Na množine $X - A$ teda podľa známej vety z analýzy platí, že f je diferencovateľná. Máme teda výsledok ([6]).

(5.1) *Nech $f: R \times R$ má konečné parciálne derivácie podľa x aj podľa y. Potom f je diferencovateľná až na množinu prvej kategórie.*

Zmienime sa ešte o jednom použití kvázispojitosti v matematickej analýze. Jedným z dôležitých princípov matematickej analýzy (pre jednoduchosť uvažujme analýzu reálnych funkcií jednej reálnej premennej) je skutočnosť, že bodová konvergencia na množine konečnej (Lebesguovej) miery je blízka konvergencii rovnomernej. Ide o nasledujúcu klasickú Jegorovovu vetu:

(5.2) *Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť merateľných funkcií konvergujúca skoro všade na merateľnej množine E konečnej miery k funkcii f. Potom pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ existuje merateľná množina $F \subset E$ taká, že $E - F$ má mieru menšiu ako ε a na F konverguje $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ rovnomerne k f.*

Poznamenajme, že podľa známeho matematika Littlewooda je uvedená veta jedným z troch základných princípov reálnej analýzy.

Platí však (5.2) aj vtedy, keď namiesto postupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ zoberieme systém $\{f_t\}$ . . ($t \in T$), kde $T \subset R$, $t_0 \in T$ je hromadný bod množiny T, a predpokladáme, že $\lim_{t \to t_0} f_t(x) = f(x)$ skoro všade na E? Odpoveď je záporná už na číselnej osi pre Lebesguovu mieru a lebesguovskú merateľnosť. Kontrapríklad možno nájsť v práci [12]. Ak předpokladáme, že parameter t sa mení spojito v tom zmysle, že pre pevné x je $f_t(x)$ spojitá funkcia premennej t, tak veta platí. (Pozri [12].) Predpoklad o spojite sa meniacom parametri je však príliš obmedzujúci. Je otázka, či by nestačil predpoklad kvázispojitosti. V [8] sa ukázalo, že stačí. Formulácia v [8] je značne všeobecnejšia, ako sme ju tu naznačili. Výsledky úzko súvisiace s touto vetou a využívajúce kvázispojitosť sú obsiahnuté v [9]. Uvedené prípady zďaleka nevyčerpávajú možnosť použitia kvázispojitosti v matematickej analýze. Ďalšími sa v rámci tohoto pojednania nemôžeme zaoberať.

6. Kvázispojitosť v ďalších matematických disciplínach

Popri matematickej analýze sa kvázispojitosť významným spôsobom prejavuje aj cez iné matematické disciplíny. V tejto časti si všimnime súvisy s topológiou a s teóriou pravdepodobnosti.

Dobre známa globálna charakterizácia obyčajnej spojitosti hovorí nasledujúce: Funkcia $f: X \to Y$, kde X, Y sú topologické priestory, je spojitá vtedy a len vtedy, ak pre ľubovoľnú otvorenú $V \subset Y$ je množina $f^{-1}(V)$ otvorená v X. (Pritom $f^{-1}(V) = \{x: f(x) \in V\}$.)

Dôležitosť kvázispojitých zobrazení pre topológiu signalizuje táto globálna charakterizácia kvázispojitosti ([11]):

(6.1) *Zobrazenie* $f\colon X \to Y$ *je kvázispojité vtedy a len vtedy, keď pre každú otvorenú množinu* $V \subset Y$ *je* $f^{-1}(V)$ *kváziotvorená v* X.

Zmysel vety (6.1) bude jasnejší, ak vysvetlíme, že množina $A \subset X$ je kváziotvorená, ak existuje otvorená množina $G \subset A$ tak, že $G \subset A \subset \bar{G}$. Znak $\bar{G}$ tu značí uzáver množiny G. Definícia kváziotvorenej množiny ukazuje, že kváziotvorená množina je v nejakom zmysle blízka otvorenej množine a veta (6.1) teda potvrdzuje, že z istého hľadiska je kvázispojitá funkcia blízka spojitej. Mnohé topologické tvrdenia sú takého typu, že zaručujú invariantnosť niektorých dôležitých vlastností pri spojitom zobrazení. Dá sa teda očakávať, že v niektorých sa kvázispojitosť dá nahradiť spojitosťou. Také očakávanie sa skutočne potvrdilo. Z mnohých tvrdení takého druhu pripomeňme nasledujúce dve dokázané v [4]:

(6.2) *Ak* f *je prosté kvázispojité zobrazenie topologického priestoru* X *na topologický priestor* Y *spĺňajúce podmienku, že pre každú otvorenú množinu* $G \subset X$ *obsahuje jej obraz* $f(G)$ *otvorenú množinu v* Y, *tak* X *je druhej kategórie vtedy a len vtedy, keď* Y *je druhej kategórie.*

(6.3) *Ak* f *spĺňa predpoklady vety* (6.2), *pak* X *je Bairov priestor vtedy a len vtedy, keď* Y *je Bairov priestor.*

Nakonec spomeňme jeden súvis s teóriou pravdepodobnosti. Uvažujme pravdepodobnostný priestor (X, S, P), teda X je množina, S neprázdny systém podmnožín množiny X a P pravdepodobnostná miera na X. Reálnu funkciu $f\colon X \to R$ nazývame merateľnou alebo v pravdepodobnostnej terminológii náhodnou premennou, ak pre každý interval (a, b) je $f^{-1}((a, b)) \in S$. Systém $\{f_t\}$ $(t \in T)$ náhodných premenných sa nazýva stochastický proces. T je tu množina, v ktorej sa mení parameter t. Pre jednoduchosť predpokladajme, že $T \subset R$. So stochastickým procesom je ťažko pracovať, ak je úplne všeobecný, pretože obyčajne je potrebné, aby nielen platilo $f_t^{-1}((a, b)) \in S$, pre každé $t \in T$, ale aby platilo $\bigcap_{t \in T} f_t^{-1}((a, b)) \in S$. To sa vo všeobecnosti nedá zaručiť, pretože S je systém uzavretý vo všeobecnosti len vzhľadom na spočítateľné prieniky. Dobre zvládnuteľné sú separabilné stochastické procesy. Sú to procesy, pre ktoré existuje spočítateľná množina $\{t_n\colon n = 1, 2, \ldots\}$ parametrov z T tak, že

$$\bigcap_{t \in T} f_t^{-1}((a, b)) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f_{t_n}^{-1}((a, b)) \tag{3}$$

pre ľubovoľný interval (a, b). Ako však poznať, či je proces separabilný, teda či (3) platí? Jedno známe kritérium separability je spojitosť stochastického procesu, t. j. podmienka, že $f_t(x)$ je spojitá funkcia pri každom pevnom $x \in X$. Možno však dať všeobecnejšie kritérium stochastického procesu, ktorým je toto tvrdenie ([10]).

(6.4) *Kvázispojitý stochastický proces je separabilný.*

Uvedené tvrdenie je len ukážkou toho, že v niektorých tvrdeniach o stochastických procesoch možno spojitosť zameniť kvázispojitosťou. Také tvrdenia sú uvedené v [10].

Záver

Uviedli sme tu niekoľko základných tvrdení o kvázispojitých funkciách a niekoľko oblastí, kde možno kvázispojitosť použiť. Existuje celý rad ďalších súvisov medzi kvázispojitosťou a inými oblasťami matematiky. Z mnohých nespomenutých uvedieme ešte súvis s tzv. Blumbergovými množinami. Blumbergova množina pre funkciu $f: X \to R$, kde X je topologický priestor, je taká hustá množina $D \subset X$, že platí f/D je spojitá na D. H. Blumberg v práci [2] objavil, že v prípade reálnych funkcií má každé $f: R \to R$ Blumbergovu množinu. Bolo dokázané, že $f: R \to R$ je kvázispojitá práve vtedy, keď má tzv. silnú Blumbergovu množinu. Pritom tzv. silná Blumbergova množina pre $f: R \to R$ je taká Blumbergova množina D, že pre každý interval $I \subset R$ je $f(I \cap D)$ hustá množina v $f(I)$. O tomto dôležitom aspekte kvázispojitosti nebolo možné v rámci tohoto informatívneho článku hovoriť, tak isto ako u mnohých iných zaujímavých výsledkoch našich a zahraničných autorov dotýkajúcich sa kvázispojitosti.

Nakoniec ešte poznamenajme, že v posledných desiatich rokoch sa mnoho autorov zaoberalo kvázispojitosťou mnohoznačných zobrazení (multifunkcií). O výsledkoch tohoto druhu sme sa tu nezmieňovali.

Literatúra

[1] Bledsoe, W. W.: *Neighbourly functions.* Proc. Amer. Math. Soc. *3* (1952), 114—115.

[2] Blumberg, H.: *New properties of all real functions.* Trans. Amer. Math. Soc. *24* (1922), 113—128.

[3] Dugundji, J.: *Topology.* Allyn and Bacon 1976.

[4] Frolík, Z.: *Remark concerning invariance of Baire spaces under mapping.* Czech. Math. J. *86* (1961), 381—385.

[5] Kempisty, S.: *Sur les fonctions quasicontinues.* Fund. Math. *19* (1932), 184—197.

[6] Marcus, S.: *Sur les fonctions quasicontinues au sens de S. Kempisty.* Coll. Math. *8* (1961), 47—53.

[7] Neubrunn, T.: *A generalized continuity and product spaces.* Math. Slovaca *26* (1976), 97—99.

[8] Neubrunn, T.: *Almost uniform convergence for continuous parameters.* Math. Slovaca *28* (1978), 321—328.

[9] Neubrunn, T.: *Remarks on control function of a. e. convergence.* Acta Math. Univ. Comen. *33* (1977), 133—137.

[10] Neubrunn, T.: *Quasicontinuous processes.* Acta Math. Univ. Comen. *42—43* (1983), 169—178.

[11] Neubrunnová, A.: *On quasicontinuous and cliquish functions.* Čas. Pěst. Mat. *99* (1974), 109 až 114.

[12] Tolstov, G. P.: *Zamečanie k teoreme D. F. Jegorova.* Dokl. Akad. Nauk *22* (1939), 309—311.