

# Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

---

Jan Kopka

O jednom interdisciplínovém problému

*Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, Vol. 23 (1978), No. 5, 286--287

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/138216>

## Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1978

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

## O jednom interdisciplinovém problému

Jan Kopka, Ústí nad Labem

*Nutnost spolupráce matematiků s psychologi se proklamuje už delší dobu, ale spolupráce není realizována v tom rozsahu, jak by to bylo žádoucí. Účelem tohoto sdělení je informovat čtenáře o problému, který se octl v kruhu zájmu matematiků, didaktiků matematiky a psychologů teprve nedávno a který má význam pro všechny tři zmíněné vědecké disciplíny. Jde o pojem grupování, na němž založil svou teorii inteligence<sup>1)</sup> známý švýcarský psycholog J. Piaget. Pochopitelný je zájem didaktiků matematiky; psychologové pocítují nutnost precizovat pojmy a ověřovat empirií poznatky matematicky získané. Konečně i matematika, která poskytuje pracovní aparát, může mít užitek ze studia nových struktur, k jejichž vzniku dala podnět psychologie.*

*Kabinet pro modernizaci vyučování matematice MÚ ČSAV zařadil do svého programu na 6. pětiletku jako jedno téma matematickou precizaci Piagetova pojmu grupování, řešitel je jediný dr. Jan Kopka z pedagogické fakulty v Ústí n. L. Zpracování tématu řešitelem bylo uzavřeno dne 9. 12. 1977 obhajobou (opONENTI byli prof. dr. M. Zedek a doc. dr. J. Blažek, CSc.); výtah z práce dr. J. Kopky, která je dosti rozsáhlá (přes 200 stran), bude publikován ve Sborníku ped. fakulty v Ústí n. L. Anotace autora dr. J. Kopky následuje:*

Uvedme hned na počátku, že název grupování je nevhodný. Přibližně řečeno grupováním rozumí Piaget soustavu činností

<sup>1)</sup> J. PIAGET: *Psychologie inteligence*, SNP Praha 1961.

nebo přesněji zvnitřněných činností, které jsou koordinovány a organizovány v struktuře. Jako členy této soustavy se činnosti nazývají *operace*. Skládání operací v rámci grupování musí mít tyto vlastnosti: složitelnost, reverzibilitnost, asociativnost a existenci identické operace a tautologie.

Jak je vidět z předchozích několika řádků, největší obtíž je v tom, nač narazili matematikové, když asi před 10 lety vstoupili do spolupráce: „přeložit“ problémy psychologie do jazyka matematiky. Slovo „přesnost“ znamená něco jiného pro matematika než pro psychologa. Matematikové museli leckdy spíše objevovat, co psychologové chtěli vyjádřit, než zformulovat to, co skutečně vyjádřili.

Výzkumy matematiků můžeme rozdělit do dvou etap:

1. vytvoření adekvátní definice grupování, rozvinutí matematické teorie grupování a jejích modelů;
2. aplikování matematické teorie grupování na vyučování matematice, a to na teorii i praxi v současnosti i budoucnosti.

Ad. 1. Po mnoha neúspěšných pokusech matematiků vytvořil první vhodnou definici E. WITTMANN<sup>2)</sup>; vhodnost definice záležela v tom, že v ní byly zahrnuty všechny druhy grupování, které popsal Piaget. Wittmannova definice byla algebraicky zjednodušena<sup>3)</sup> a zobecněna pomocí pojmu kategorie<sup>4)</sup>. Zobecnění definice struktury grupování zní:

<sup>2)</sup> E. WITTMANN: *The Concept of Grouping in Jean Piaget's Psychology*. Educ. St. in Math. 5/1973.

<sup>3)</sup> H. G. STEINER: *Mathematical Analysis of Piaget's Grouping, Concept Papy's Minicomputer as a Grouping*. Int. J. Math. Educ. Sci. Technol 5/1974.

<sup>4)</sup> E. WITTMANN: *Natural Numbers and Groupings*. Educ. St. in Math. 6/1975.

Buďte dány dvě neprázdné množiny  $S$ ,  $T$  a neprázdna podmnožina  $E \subset T$ ; v množině  $T$  je zavedená binární operace (skládání) označená  $o$ . Struktura  $(S, T, E, o)$  se nazývá grupování, právě když má tyto vlastnosti:

- (1)  $(S, T, o)$  je kategorie, v níž je  $S$  množina objektů,  $T$  množina šipek (morfismů) a  $o$  je skládání šipek.
- (2) Ke každé šípce  $m \in T$  existuje opačná šipka  $m^{-1} \in T$ , tj. kategorie  $(S, T, o)$  je grupoid vzhledem k skládání šipek<sup>5)</sup>.
- (3) Každá šipka  $m \in T$  se dá složit z konečného systému šipek z  $E \cup E^{-1}$ , kde  $E^{-1}$  je množina všech šipek opačných k šípkám z  $E$ .

Je-li  $\Gamma = (S, T, E, o)$  grupování, nazýváme prvky množiny  $S$  stavy, prvky množiny  $T$  ( $E$ ) operace (elementární operace).

Podmínka (3) vyjadřuje, že množina  $E \cup E^{-1}$  generuje množinu  $T$  vzhledem ke skládání. Byla sestrojena celá řada modelů abstraktní teorie grupování. Tzv. počítačích číselné grupování má podle tvrzení psychologů zásadní význam pro vytváření pojmu čísla u dětí.

Ad. 2. O teorii grupování se opírá tzv. operativní princip. Jeho obecná formulace zní asi takto:

Činnosti žáků se vytvářejí operace. Vyučování organizujeme tak, aby se tyto operace seskupovaly v různých modelech struktury grupování.

<sup>5)</sup> S. MAC LANE: *Categories for the Working Mathematician*. New York, Heidelberg, Berlin 1971.

V modelech se pak studují tyto problémy: skládání operací, působení operací na vlastnosti stavů, např. na relace zavedené na stavech; přenášení (transfer) vlastností stavu (např. relací) z jednoho modelu grupování do druhého, a to pomocí morfismů.

Chceme-li uplatnit operativní princip ve vyučování, řídíme se těmito zásadami: v dané matematické teorii vybereme důležité pojmy; vytvoříme pro ně model grupování a pomocí něho pronikáme s žáky do příslušné teorie.

Grupování a operativní princip nám poskytují jednotný způsob, jak žákům předkládat různá témata, např. manipulaci s Papyho minipočítačem, aritmetiku přirozených čísel, základy množinového aparátu, základy lineární algebry aj. Je však také možné zkoumat množinu všech modelů grupování, které mají žáci při výuce matematiky získat, a uspořádat ji pomocí relace „být izomorfně vnořen“. Tato uspořádání by nám mohla pomoci nejen při výběru témat výuky, ale při jejich řadě.

*Obhájená práce obsahuje nejen nejdůležitější výsledky, které až dosud byly publikovány, ale také je kriticky hodnotí. Obhacuje matematickou teorii grupování o nové pojmy (např. podgrupování, morfismus grupování) a uvádí některé nové modely. Zabývá se však i jinde dosud nestudovanými otázkami vztahu grupování a jazyka.*

*Budoucnost ukáže, zda a jak účinně se uplatní tato matematicko-psychologická teorie v pedagogické praxi. Bylo by záhodno, aby se u nás věnovalo této tematice více pracovníků.*