

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

L. S. Pontrjagin

Optimalizace a diferenciální hry

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 25 (1980), No. 6, 318--324

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/138190>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1980

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Optimalizace a diferenciální hry*)

L. S. Pontrjagin

Otázka, čím se zabývat, stojí před matematiky snad ještě ostřeji než před odborníky v jiných oblastech vědění. Hlavním úkolem matematiky, jež vznikla jako čistě praktická věda, je i v dnešní době studium okolního materiálního světa, aby mohl sloužit potřebám člověka. Ale má také svoji vnitřní logiku vývoje, podle níž matematici vytvářejí pojmy a dokonce celé obory, jež jsou výsledkem čistě duševní činnosti, nijak nesouvisejí s vnější materiální skutečností a nemají v současné době žádných aplikací. Tyto obory se často vyznačují nádhernou výstavbou, jsou svým způsobem krásné. Ale krásou tohoto druhu se nedá zdůvodnit jejich právo na existenci. Matematika totiž není hudba, jejíž krásy jsou dostupné velkému počtu lidí. Krásy matematiky mohou pochopit jen mnozí odborníci. Matematici, kteří je vytvářejí, pracují vlastně jen pro sebe. Přesto nemůžeme tvrdit, že tyto vnitřně harmonické, ale neaplikovatelné matematické obory nemají právo na existenci. Jsou vnitřní tkáně vědy, jejímž protnutím bychom narušili celý organismus. Kromě toho se stává, že některé matematické obory, jež nemají použití po dlouhá staletí, později své použití nacházejí. Klasickým příkladem jsou křivky druhého stupně, vytvořené ve starověku z vnitřních potřeb vědy, jež se dočkaly teprve později důležitého uplatnění. Na druhé straně některé matematické disciplíny žijící jen svými vnitřními problémy postupně degenerují a téměř jistě nejsou k ničemu. Za těchto okolností je pro matematiky otázka výběru výzkumné tematiky velmi znepokojivá. Domnívám se, že ne-li všichni, pak jistě mnozí matematici by se měli ve své práci obracet k prvotním zdrojům, totiž k aplikacím matematiky.

Jednak proto, abychom zdůvodnili svoji existenci, ale také je zapotřebí vlít nový svěží proud do vědeckých výzkumů. Na základě těchto úvah, ale také pod jistým naléháním vedení Stěklovského institutu, jsem se spolu se svými třemi spolupracovníky E. F. MIŠČENKEM, R. V. GAMKRELIDZEM a V. G. BOLĚANSKÝM rozhodl, že budeme hledat aplikovatelná témata pro naše výzkumy, a to v teorii vlnění, přesněji v matematickém studiu elektronických přístrojů, a v teorii regulace, již je nyní rozumnější nazývat teorií řízení i když poněkud obecněji. Hned zpočátku jsme ze svých úvah vyloučili matematické úlohy, které technici již zformulovali, a založili jsme naše hledání témat na seznamování s původními technickými problémy; využili jsme osobní kontakty s mnoha odborníky v oblasti techniky. Při tom jsme se nesnažili jednoduše najít aplikace matematiky, nýbrž jsme usilovali o nové formulace matematických úloh zajímavých z hlediska samotné matematiky. Mezi mnoha technickými úlohami, s nimiž jsme se seznámili, byla i tato úloha: Jakýsi specialista v oboru letectví řekl: „Když jedno letadlo pronásleduje druhé, pak samozřejmě pilot pronásledovatel to musí umět, ale bylo by zajímavé mít teorii, dokonce snad takovou, jež by umožnila pronásledování pomocí automatu“. Všichni

*) Předneseno na zasedání Prezidia AN SSSR dne 22. prosince 1977. Vyšlo v časopise *Uspěchi matematických nauk*, sv. XXXIII (1978), č. 6 (204), str. 22—28. Přeložil PAVEL GORALČÍK.

teď z doslechu víme, že existují samonaváděcí rakety, a ty samozřejmě musejí mít nějakou teorii pronásledování. Ale samonaváděcí raketa má pravděpodobně nad letadlem takovou převahu v rychlosti a manévrovatelnosti, že teorie, na níž je založeno její chování, může být velmi hrubá. Chtěl bych hned upozornit na podivnost této úlohy, jež se nám zdála být zpočátku zcela nepřístupná. Vskutku, letadlo pronásledovatel zcela zřejmě nesmí směřovat k tomu místu, v němž se v daném okamžiku nachází prchající letadlo, protože to samozřejmě z něho uletí. Zároveň je nesmyslné předpokládat, že prchající letadlo se bude pohybovat po přímce: může zatočit, a při tom neznámo kam. Pokud je mi známo, úloha o pronásledování jednoho letadla druhým nebyla dosud vyřešena. Zkoumaly se zjednodušené modely pronásledování, jež jsou předmětem tak zvané teorie diferenciálních her. Slovo „hra“ má vystihnout tu okolnost, že budoucí chování obou letadel je neznámé: závisí na vůli pilotů. „Diferenciální“ se tato hra nazývá proto, že pohybový zákon letadla popisujeme diferenciálními rovnicemi.

Abychom mohli použít matematiku k řešení jakékoliv technické úlohy, musíme dát především její matematický popis. V daném případě začneme matematickým popisem pohybu letadla. Při tom, jak už to matematici vždy dělají, budeme abstrahovat od přílišné konkrétnosti a zaměříme se na hlavní charakteristické rysy technické úlohy, již chceme vyřešit. Letadlo budeme považovat za bod pohybující se v prostoru. Víme, že poloha bodu v prostoru je určena třemi souřadnicemi. Označíme je x_1, x_2, x_3 . Protože náš bod (letadlo) se pohybuje, má kromě polohy také jistý vektor rychlosti. Složky tohoto vektoru označíme x_4, x_5, x_6 . Veličiny x_1, x_2, \dots, x_6 určují stav pohybujícího se bodu v daném časovém okamžiku a nazývají se jeho fázovými souřadnicemi. Abychom abstrahovali od přílišné konkrétnosti, budeme uvažovat objekt, jehož stav v daném časovém okamžiku je určen nikoli šesti, nýbrž libovolným počtem fázových souřadnic. Označíme je x_1, x_2, \dots, x_n . Je zvykem označovat soubor všech těchto veličin jedním písmenem, proto položíme

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Zde x je bod fázového prostoru našeho objektu nebo fázový vektor našeho objektu. Libovolnou fázovou souřadnici objektu značíme x_i , kde i může nabývat libovolných hodnot: $i = 1, 2, \dots, n$. Protože stav objektu se mění v čase, také veličina x_i se mění v čase a rychlost její změny obvykle značíme \dot{x}_i . Je to derivace veličiny x_i podle času t . Fyzikální zákonitost chování objektu zpravidla spočívá v tom, že rychlost \dot{x}_i změny fázové souřadnice x_i našeho objektu je jednoznačně určena jeho fázovými souřadnicemi, což matematicky zapisujeme ve tvaru formule

$$(1) \quad \dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_i(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

To znamená, že \dot{x}_i je funkcí veličin x_1, x_2, \dots, x_n , tj. dá se vypočíst, pokud veličiny x_1, x_2, \dots, x_n známe. Zde máme n neznámých veličin, jež jsou proměnlivé v čase, tj. jsou funkcemi času $x_i = x_i(t)$, a n diferenciálních rovnic, takže můžeme úlohu řešit matematicky a získat zákonitost časové změny objektu ve tvaru funkce času $x = x(t)$.

Pomocí rovnic tvaru (1) můžeme popisovat velmi různorodé objekty. Nemusí to být jen objekty mechanické, ale i jiného druhu, rovnice typu (1) mohou například popisovat

chemický proces. V tomto případě jsou fázovými souřadnicemi objektu hmotnosti různých látek vstupujících do reakce. Stejnými rovnicemi můžeme popsat i biologický proces, například soužití vlků, zajíců a trávy na ostrově. Rovněž ekonomické zákonitosti připouštějí popis soustavou rovnic typu (1).

Uvedený popis pohybu letadla neobsahuje zatím pro nás hlavní prvek. V letadle sedí pilot, jenž podle své vůle může měnit zákonitost jeho pohybu pomocí řídicích pák. Může měnit tah motoru, polohu ocasního kormidla nebo polohu křídélek. Poloha každého řídicího prvku je určena jistým číslem. Všechna tato čísla označíme pomocí u_1, u_2, \dots, u_r a jejich soubor označíme opět jedním písmenem $u = (u_1, u_2, \dots, u_r)$. Zde u je vektor, jehož složky určují polohu ovládacích pák. Pohyb letadla tedy není popsán rovnicemi (1), ale rovnicemi

$$(2) \quad \dot{x}_i = f_i(x, u) \quad (i = 1, \dots, n),$$

kde v pravé části vystupuje vektor řízení u . Vektor řízení se mění v čase podle pilotovy vůle, proto je dán jako funkce času $u = u(t)$. Takže rovnice (2) mají ve skutečnosti tvar

$$(3) \quad \dot{x}_i = f_i(x, u(t)) \quad (i = 1, \dots, n),$$

kde $u(t)$ je řízení objektu konkrétně uskutečňované v čase. Systém rovnic (3) již můžeme řešit. Musíme při tom vzít v úvahu jednu důležitou okolnost. Veličiny u_1, u_2, \dots, u_r určující polohu pák nemohou být libovolné. Tak třeba jestliže u_1 je velikost tahu motoru, pak je jasné, že ji můžeme měnit jen v jistých mezích od 0 do určité hodnoty a , $0 \leq u_1 \leq a$. Stejně tak ocasní kormidlo se může otáčet jen v jistých mezích, takže jestli u_2 je úhel jeho natočení, pak musí vyhovovat jistým nerovnostem $-b \leq u_2 \leq b$. Abychom abstrahovali od přílišné konkrétnosti, můžeme jednoduše říct, že vektor u není libovolný vektor r -rozměrného prostoru, ale patří do nějaké zadané množiny Ω tohoto prostoru. Soustava diferenciálních rovnic (3) spolu se zadanou množinou Ω dává matematický popis možností chování řízeného objektu. Takový objekt budeme nazývat říditelný, protože jeho chování závisí na tom, jakou zvolíme funkci řízení $u(t)$.

Dříve, než se pustíme do řešení úlohy o pronásledování jednoho letadla druhým, měli bychom i druhé letadlo popsat jako říditelný objekt a pak úlohu pronásledování přesně zformulovat. Ale, jak již jsem řekl dříve, sama herní formulace úlohy je natolik podivná, že jsme se zpočátku raději pokusili řešit jinou úlohu, v níž hrový prvek není. Učinili jsme předpoklad, že druhý objekt je nehybný. V pojmech letadel šlo nyní o to, jak převést letadlo z jednoho stavu do druhého v co nejkratším čase. Matematicky se tato úloha formuluje takto: V počátečním časovém okamžiku je dán jistý výchozí fázový stav objektu, jenž označíme x^0 . Kromě toho máme ještě nějaký jiný fázový stav objektu x^1 . Jestliže můžeme vhodným řízením převést objekt z fázového stavu x^0 do fázového stavu x^1 , pak vzniká úloha, jak volit řízení, jež by uskutečnilo tento přechod v nejmenším čase. Je to úloha optimalizace rychlosti. Řízení $u(t)$ získané řešením této úlohy se nazývá časově optimální co do rychlosti, samotný pohyb řízeného objektu se rovněž nazývá časově optimální co do rychlosti. V průběhu pohybu objektu se nemusí jednat jen o jeho časovou stránku, ale může nás zajímat jakákoliv jiná veličina, například spotřeba paliva. V takovém případě můžeme klást otázku optimalizace spotřeby paliva

při přechodu za stavu x^0 do stavu x^1 . Takováto úloha je velmi důležitá, když uvažujeme o přechodu kosmické lodi z jedné oběžné dráhy na druhou, při němž úspornost spotřeby paliva hraje ohromnou roli.

Takto formulovanou úlohu optimalizace by mohl řešit variační počet, kdyby nebylo omezení na řídicí vektor u , totiž kdyby vektor u byl libovolný vektor. Okolnost, že vektor náleží zadané množině Ω , okamžitě situuje optimalizační úlohu, již jsme zformulovali, mimo okruh úloh klasického variačního počtu. Jestliže vektor u je libovolný, pak naše úloha je úlohou klasického variačního počtu. Je ale třeba podotknout, že v klasickém variačním počtu se nikdy neřešila v tom tvaru, jak ji zde klademe. Úlohy formulované v klasickém variačním počtu jsou obecnější povahy než naše a postrádají tu konkrétnost, již jsme získali díky tomu, že zkoumáme technický objekt. Ukázalo se, že tento konkrétnější charakter variační úlohy v důsledku zkoumání říditelného objektu vedl k novým možnostem řešení samotné úlohy, poskytl jisté hypotézy, k nimž by bylo velmi obtížné dojít při obecné variační úloze.

Zformuluji nyní řešení, jež jsme získali pro úlohu na rychlost. Zavedeme pomocné veličiny $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ v počtu n a jejich soubor označíme jedním písmenem

$$\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n),$$

kde ψ je vektor se složkami $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$. Sestavíme pomocnou veličinu

$$(4) \quad H = \psi_1 f_1(x, u) + \psi_2 f_2(x, u) + \dots + \psi_n f_n(x, u) = H(\psi, x, u).$$

Okamžitě vidíme, že veličina H je závislá na třech vektorech ψ, x a u , což je vyjádřeno v pravé části poslední rovnosti. Novou pomocnou veličinu (4) jsme označili H proto, že potřebné rovnice z ní získané se velmi podobají Hamiltonovým rovnicím, jež všichni známe z mechaniky. Vypadají takto:

$$(5) \quad \begin{cases} \dot{x}_i = \frac{\partial H(\psi, x, u)}{\partial \psi_i}, \\ \dot{\psi}_i = - \frac{\partial H(\psi, x, u)}{\partial x_i}. \end{cases}$$

Takto získaná soustava diferenciálních rovnic (5) sestává z $2n$ rovnic. V nich vystupují neznámé funkce $x_1, x_2, \dots, x_n, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, u_1, u_2, \dots, u_r$, tedy počet neznámých funkcí je $2n + r$. To znamená, že systém je neúplný. Nemůžeme ho řešit. Soustavu rovnic doplníme touto podmínkou: řídicí vektor u je třeba vybrat tak, aby při libovolných pevně zvolených hodnotách ψ, x funkce $H(\psi, x, u)$ nabývala svého maxima při této hodnotě u . Soustava rovnic (5) doplněná touto podmínkou je již úplná a právě tuto soustavu vztahů musíme řešit, chceme-li najít časově optimální řešení naší úlohy. Tento výsledek jsme nazvali princip maxima. Úlohy na optimalizaci kterékoliv jiné veličiny než času, například spotřeby paliva, se řeší velice podobně. Nebudu zde toto řešení formulovat. Za cíl pohybu objektu pokládáme jeho určitý fázový stav x^1 , tedy dosažení určitého místa určitou rychlostí. Princip maxima se však hodí i k řešení jiných úloh, například cílem může být dosažení určitého místa s libovolnou rychlostí.

Jestliže řídicí vektor u může nabývat libovolných hodnot a není vázán podmínkou příslušnosti k jisté množině Ω , pak z podmínky maximality funkce $H(\psi, x, u)$ vzhledem k proměnné u plyne, že všechny parciální derivace této funkce podle proměnných u_1, u_2, \dots, u_r jsou rovny nule, tedy musí být splněno r vztahů:

$$(6) \quad \frac{\partial H(\psi, x, u)}{\partial u_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, r).$$

Tento výsledek plyne z obecných výsledků klasického variačního počtu, ale v takovéto formě nebyl nikdy formulován, neboť v klasickém variačním počtu se o říditelných objektech vůbec neuvažovalo. Poznamenejme, že v případě libovolně proměnného u jsou vztahy (6) slabší než podmínka maximality H vzhledem k u .

Uvedeme nyní řešení jedné velmi jednoduché úlohy na časovou optimalizaci co do rychlosti, jež lze získat pomocí principu maxima, nikoli však metodami klasického variačního počtu.

Uvažujme matematické kyvadlo, tj. přímočarý pohyb hmotného bodu přitahovaného k nějakému pevnému bodu 0 v přímce jeho pohybu silou přímo úměrnou vzdálenosti od něho. Zvolíme přímku, po níž se bod pohybuje, za osu souřadnic s počátkem v bodě 0. Souřadnici pohybujícího se bodu označíme x . Pohybové rovnice tohoto bodu pak zapíšeme ve tvaru

$$(7) \quad \ddot{x} + x = 0,$$

kde \ddot{x} je druhá derivace souřadnice x podle času, tedy zrychlení pohybujícího se bodu. Jedinou rovnicí (7) můžeme přepsat jako dvě rovnice prvního řádu:

$$(8) \quad \dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x.$$

Nechť $x = x(t)$, $y = y(t)$ je libovolné řešení soustavy (8). Abychom je znázornili geometricky, uvažujme časově proměnný bod $(x(t), y(t))$ ve fázové rovině proměnných (x, y) . Křivka vzniklá ve fázové rovině v důsledku pohybu bodu se nazývá fázová trajektorie. Pro soustavu (8) je to kružnice se středem v počátku souřadnic, na níž se bod pohybuje s konstantní úhlovou rychlostí jednoho radiánu za sekundu ve směru hodinové ručičky. Předpokládejme nyní, že na náš pohybující se bod působí vnější síla velikosti v absolutní hodnotě nepřesahující jednotku. V tomto případě pohybová rovnice bodu má tvar

$$\ddot{x} + x = u$$

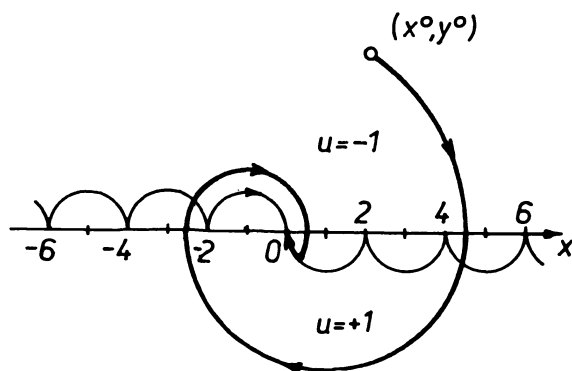
nebo tvar soustavy rovnic

$$(9) \quad \dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + u.$$

Soustava rovnic (9) popisuje pohyb řízeného objektu, kde u je řídicí parametr. Pokusme se teď uvést bod, jenž se nachází v počátečním okamžiku v libovolné poloze (x^0, y^0) , do stavu klidu, tj. do počátku souřadnic fázové roviny, v minimálním čase pomocí řídicího parametru u . Z principu maxima bezprostředně plyne, že při optimálním řízení u může nabývat pouze hodnot ± 1 . Při $u = +1$ fázovou trajektorii soustavy (9) je

kružnice se středem v bodě $(1, 0)$, při $u = -1$ je fázovou trajektorií soustavy (9) kružnice se středem v bodě $(-1, 0)$. Když víme, že optimální hodnoty jsou $u = \pm 1$, zbývá nám jen určit, jak se mění u mezi těmito dvěma hodnotami během pohybu. Z principu maxima lehce odvodíme, že hodnota u závisí jen na poloze fázového bodu ve fázové rovině, totiž celá fázová rovina se rozpadá na dvě části, v jedné z nich u musí mít hodnotu $+1$ a v druhé -1 . Rozklad fázové roviny na tyto dvě části se děje podle křivky znázorněné na obrázku. Křivka se skládá z polokružnic o poloměru jedna se středy na ose souřadnic, přičemž na kladné části osy souřadnic jsou polokružnice obráceny dolů a na záporné části osy souřadnic jsou polokružnice obráceny nahoru. Dvě polokružnice přimykající se k počátku souřadnic jsou samy optimální trajektorie, takže jestliže pohybující se bod se nachází na jedné z nich, pak jeho optimální cesta do počátku souřadnic se uskuteční po této polokružnici. Dále se ukazuje, že pro fázový bod pod touto dělicí křivkou hodnota u musí být $+1$ a nad touto křivkou -1 . Lehce narýsujeme trajektorii optimálního pohybu bodu vycházející z libovolně zadané počáteční polohy (x^0, y^0) (viz obr. 1). Pro libovolný výchozí bod (x^0, y^0) je pohyb určen rovnicí (9) s jistou hodnotou $u = \pm 1$,

Obr. 1



přičemž tato hodnota se mění na opačnou při průchodu trajektorie dělicí křivkou. Nakonec se bod dostane na jednu z polokružnic dělicí křivky přimykajících se k počátku; potom bod pokračuje po této kružnici k počátku souřadnic.

Princip maxima je všeobjímající univerzální metoda pro řešení úloh optimalizace. Našel početné aplikace v různých oblastech vědění a podstatně ovlivnil rozvoj variačního počtu. V herních úlohách se nám nepodařilo dosáhnout natolik obecných výsledků. Těmi se nyní zabývá velký počet matematiků, zmiňme se o skupině spolupracovníků Stětklovského institutu a o škole N. N. KRASOVSKÉHO ve Sverdlovsku. Ti dosáhli významných výsledků. Zde se omezím jen na to, že uvedu jeden konkrétní příklad úlohy pronásledování.

V prostoru R libovolné dimenze n , $n \geq 2$, uvažujme dva body x a y , z nichž každý můžeme současně chápat jako vektor. Bod x bude pronásledovatel, y bude prchající bod. Pronásledování považujeme za skončené, jakmile x se rovná y . Pohyb těchto bodů popisují tyto rovnice:

$$(10) \quad \ddot{x} + \alpha \dot{x} = u, \quad \ddot{y} + \beta \dot{y} = v.$$

Zde u a v jsou vektory prostoru R . V naší úloze jsou to řídicí vektory. Můžeme libovolně volit jejich směr, ale jejich délky jsou omezeny podmínkami

$$|u| \leq \varrho, \quad |v| \leq \sigma.$$

Čísla α , β , ϱ , σ jsou kladná. To znamená, že rovnice (10) popisují pohyb bodu s lineárním třením α pod vlivem síly u , již můžeme volit libovolně co do směru, ale jejíž velikost nepřesahuje číslo ϱ . Podobné tvrzení platí i o veličině y . Na proces pronásledování můžeme pohlížet dvěma způsoby. Při prvním se ztotožňujeme s pronásledovatelem. Naše úloha tak spočívá v završení pronásledování výběrem vhodného řízení u . Během pronásledování stále pozorujeme chování prchajícího objektu. Při druhém způsobu se ztotožňujeme s prchajícím objektem a naše úloha spočívá v tom, abychom uprchli před pronásledováním výběrem vhodného řízení v . Při tom stále pozorujeme objekt, jenž nás pronásleduje. Základní výsledek, jenž zde platí, je tento:

1. Úloha pronásledování má vždy kladné řešení, tj. pronásledování lze dovést ke konci, jestliže jsou splněny dvě nerovnosti

$$(11) \quad \frac{\varrho}{\alpha} > \frac{\sigma}{\beta}, \quad \varrho > \sigma.$$

2. Úloha úniku má kladné řešení vždy tehdy, je-li splněna nerovnost

$$\sigma > \varrho.$$

Ukazuje se, že při řešení úlohy pronásledování v případě, kdy jsou splněny podmínky (11), vždy máme nejlepší způsob chování pronásledovatele, tj. existuje jediné optimální řízení pronásledovatele $u(t)$, od něhož každá odchylka nutně prodlužuje čas pronásledování. Při tom optimální řízení pronásledovatele $u(t)$ se určuje postupně s průběhem času t a v závislosti na chování prchajícího objektu.

Vliv jaderných elektráren na životní prostředí

Bedřich Heřmanský, Praha

27. června 1954 byla v Obninsku v SSSR uvedena do provozu první experimentální jaderná elektrárna. Ačkoliv její výkon 5 MW byl ve srovnání s dnešními elektrárnami malý, předznamenává novou etapu řešení energetického problému a lze ji považovat